

位相空間の帰納的極限の位相

平井武, 下村宏彰, 辰馬伸彦

位相群の帰納的極限が, 数学辞典等で通常定義される位相により, 必ずしもまた位相群にならない事は既に報告した. (cf. N. Tatsuuma-H. Shimomura-T. Hirai: On group topologies and unitary representations of inductive limits of topological groups and the case of the group of diffeomorphism, J. Math. Kyoto Univ. 38(1998) pp185-212. 辰馬伸彦, 位相群の帰納的極限の群位相, 数学, 50(1998) pp204-207)

ここで挙げた反例では, その原因がこれらの群を位相空間と見ての積位相が極限操作と可換でない事に基づいている. そこでこの報告では, 積位相と極限操作が可換となる為の条件を調べ, 更に極限位相の定義をどの様に変更すれば, 極限操作と積位相順序が交換出来るかを考える. ここでは取りあえず今まで得られた結果を報告する.

§ 1 帰納的極限. Net $A \equiv \{a\}$ (order: $<$) を添数に持つ位相空間族 $\{X_a\}$ (X_a の位相を τ_a と書く) が

$$\forall a < b \quad \exists \varphi_{ba}(\text{連続}): X_a \rightarrow X_b(\text{into}) \text{ s.t. } \forall a < b < c \quad \varphi_{ca} = \varphi_{cb} \varphi_{ba}$$

を満たすとする. 和集合 $X \equiv \coprod_a X_a$ に同値関係 $x_a \in X_a, x_b \in X_b$ で

$$x_a \sim x_b \Leftrightarrow \exists c \text{ s.t. } c > a, b \quad \varphi_{ca}(x_a) = \varphi_{cb}(x_b)$$

を入れ, その同値関係で割った空間を $X \equiv \lim_a X_a$ と書く.

$x_a \in X_a$ にそれが属する X 内での coset を対応させる map を φ_a とすれば, 明らかに $\varphi_b \varphi_{ba} = \varphi_a$ を満たす.

今 X_a を, 像 $\varphi_a(X_a)$ に X_a からの商位相を入れた空間と置き換えても,

$X \equiv \lim_a X_a$ は同じものとなるから, $X_a \subset X_b$ でその injection map φ_{ba} が連続であるとしてよい. すなわち集合として $X = \bigcup_a X_a$ としても以下の議論に差し支えは生じないから, 簡単の為以下そう仮定する.

この $X \equiv \lim_a X_a$ に $\{\tau_a\}$ から導かれる位相を入れる事を考える.

その条件として " $\forall a \in A \quad \varphi_a$ が連続" を取る. すなわち

(*) $\forall$ 開集合 $U(\subset X)$ で $\forall a \in A \quad U_a \equiv U \cap X_a$ が τ_a -開集合.

定義 1 [帰納的位相 τ^1] 次の条件

(**) $U(\subset X)$ が開集合 $\Leftrightarrow \forall a \in A \quad U_a \equiv U \cap X_a$ が τ_a -開集合.

により定義される $X \equiv \lim_a X_a$ の位相を, $\{\tau_a\}$ から導かれる(帰納的)極限位相と呼び, τ^1 で示す. ■

τ^1 が (*) を満たす事は見やすい. τ^1 は (*) を満たす X の位相の中で最強の位相である. しかしこの τ^1 には次の様な問題点がある.

別に位相空間 Y (位相 τ_2) を取り, X との積空間を考える. $X \times Y = (\lim_a X_a) \times Y$ は集合として $\lim_a (X_a \times Y)$ と同一になる. $X \times Y$ には積位相 $\tau^1 \times \tau_2$, $\lim_a (X_a \times Y)$ には $\tau_a \times \tau_2$ から上記の様に作られる極限位相 σ が入る. 一般にはこの2つの位相は一致しない.

例 2 $Y \equiv \mathbb{Q}$ (有理数全体), $G(j) \equiv \mathbb{R}$ (実数全体) ($j=1, 2, 3, \dots$) に通常の位相をいれる. $G_j(\equiv X_j) \equiv \prod_{k=1}^j G(k)$ とする. X_j を X_{j+1} に埋め込み, j の通常順序で, 定義1の代数的な帰納的極限をつくと $X \equiv \lim_j X_j = \prod_{k=1}^{\infty} G(k)$ (制限直積) が得られる.

また $\lim_j (X_j \times Y)$ は同様に $\bigcup_j (\prod_{k=1}^j G(k) \times Y)$ として定義出来る. この両者は $(\bigcup_j X_j) \times Y = \bigcup_j (X_j \times Y)$ の対応で集合として同一視出来る.

$\lim_j X_j, \lim_j (X_j \times Y)$ それぞれの極限位相 τ_1, σ を考えよう. Y の位相を τ_2 と書けば $(\lim_j X_j) \times Y$ の位相は $\tau_1 \times \tau_2$ で点 $((0), 0) \in X \times Y$

の任意の近傍は $E \times (-a, a) \subset X \times Y$ ($\forall j$ で $E \cap X_j$ は X_j の開集合, $a > 0$) の形の集合を含む. 座標表示して

$X \ni x = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$ ($x_k \in G(k)$) と書く.

一方 σ での開集合 $U \subset X \times Y$ は " $\forall n$ について $U \cap (X_n \times Y)$ が $X_n \times Y$ で開集合" として特長付けられる. そこで $X \times Y$ の集合

$$U \equiv \{ (x, y) \mid |x_j| < |\cos(jy)| \ (j=1, 2, 3, \dots) \} \\ = \bigcap_{j=1}^{\infty} \{ (x, y) \mid -|\cos(jy)| < x_j < |\cos(jy)| \} \quad (\ni ((0), 0))$$

を考えると $\forall n$ について

$$U \cap (X_n \times Y) = \bigcap_{j=1}^n \{ (x, y) \mid -|\cos(jy)| < x_j < |\cos(jy)| \}$$

は $X_n \times Y$ で開集合であるから, U は σ -開集合である.

一方 U は上記の $E \times (-a, a)$ を含まぬから $\tau_1 \times \tau_2$ -開ではない. ■

☆ この例はまた $X_j \times Y$ を位相群と見た時に, その帰納的極限 $\lim_j (X_j \times Y)$ が帰納的極限位相で位相群にならない例を与えている.」

さて一般的に次は成立する.

補題 3 $\tau_1 \times \tau_2 < \sigma$.

証明 $\tau_1 \times \tau_2$ -開集合 U の $\forall a$ で $X_a \times Y$ への制限 $U \cap (X_a \times Y)$ は $\tau_a \times \tau_2$ -開集合であるから, 定義により U は σ -開集合でもある. ■

一方肯定的な例として次がある.

例 4 $X \equiv \lim_j X_j$ (極限位相 τ_1), $Y \equiv \lim_j Y_j$ (極限位相 τ_2) (共に可算列の極限) で X_j, Y_j が全て局所コンパクト空間であるならば $X \times Y = \lim_j (X_j \times Y_j)$ (極限位相 σ) が位相もこめて成立する. すなわち $\tau_1 \times \tau_2 = \sigma$ となる.

証明 $\tau_1 \times \tau_2 < \sigma$ は補題 3 である. 逆の $\tau_1 \times \tau_2 > \sigma$ を示す.

$\forall (x_0, y_0) \in X \times Y$ を固定して, その $\forall \sigma$ -開近傍 W に対して

x_0 の τ_1 -近傍 U と y_0 の τ_2 -近傍 V を取り, $U \times V \subset W$ となる事を言えばよい. $W_j \equiv W \cap (X_j \times Y_j)$ と書く.

まず位相 σ の定義と X_j, Y_j が全て局所コンパクトとの仮定から
 $\exists$ 相対コンパクト開集合 $U_0(\ni x_0) \text{ in } X_0, V_0(\ni y_0) \text{ in } Y_0$ で $\overline{U_0} \times \overline{V_0} \subset W_0 \subset W_1$. W_1 は $X_1 \times Y_1$ の開集合だから, $\exists$ 相対コンパクト開集合 $U_1(\supset \overline{U_0}) \text{ in } X_1, V_1(\supset \overline{V_0}) \text{ in } Y_1$ で $\overline{U_1} \times \overline{V_1} \subset W_1 \subset W_2$.
 再び W_2 は $X_2 \times Y_2$ の開集合で, 同様相対コンパクト開集合 $U_2(\supset \overline{U_1}) \text{ in } X_2, V_2(\supset \overline{V_1}) \text{ in } Y_2$ で $\overline{U_2} \times \overline{V_2} \subset W_2 \subset W_3$ と取れる.

繰り返して 相対コンパクト開集合 $U_{n+1}(\supset \overline{U_n}) \text{ in } X_{n+1}, V_{n+1}(\supset \overline{V_n}) \text{ in } Y_{n+1}$ を $\overline{U_{n+1}} \times \overline{V_{n+1}} \subset W_{n+1}$ を満たす様にとって行き, 最後に $U \equiv \bigcup_n U_n, V \equiv \bigcup_n V_n$ とおけば, 定義から U は τ_1 -開集合, V は τ_2 -開集合で, $U \times V (\subset W)$ が (x_0, y_0) の $\tau_1 \times \tau_2$ -開近傍となる. ■

ここでは, $X \times Y (= (\lim_a X_a) \times Y) = \lim_a (X_a \times Y)$ が極限位相をこめて成立するための条件を求める. そして $X = \lim_a X_a$ で条件(*)の下での位相の積が, 極限と可換にするにはどのような位相の定義がふさわしいかを考え, さらに X_a が位相群である時, 自然に導入された群構造で X が位相群になる条件を考える.

§ 2 Fish-bone type net. 少し Net について準備をする.

定義 5 $B(\subset A)$ cofinal (in A) $\Leftrightarrow \forall a \in A, B \cap \{x \in A \mid x > a\} \neq \emptyset$.

また 2つの nets A_1, A_2 が互いに順序同型な cofinal subsets を持つ時 A_1 と A_2 は cofinal 同型であるといい, $A_1 \sim A_2$ と書く.

cofinal 同型は同値対応であり, その同値類を cofinal type と言う. ■

容易に $B(\subset A)$ cofinal $\Rightarrow B: \text{net}$.

補題 6 $B(\subset A)$ cofinal なら, $\{X_a\}_{a \in A}$ の部分族 $\{X_b\}_{b \in B}$ は
また帰納的極限 $X_B \equiv \lim_{b \in B} X_b$ を持ち, 極限位相をこめて $X_B = \lim_a X_a$.

証明 $\forall a \in A \exists b \in B \quad b \succ a$ だから $X_b \supset X_a$, 従って集合として
 $X_B = \lim_a X_a$. さらに, φ_{ba} の連続性から X_B の開集合 W について,
 $W \cap X_a = (W \cap X_b) \cap X_a$ が X_a で開集合となる. ■

一般の net は扱い難いので, A が全順序に置き換えられる場合を考える.

定義 7 net A が fish bone type (FB と略記する) であるとは
cofinal な全順序(totally ordered)部分 net がある事を言う. ■

補題 8 Totally ordered net A は常に well-ordered な cofinal 部分
net を持つ. (Totally ordered set I が well-ordered とは, $\forall S$
 $\subset I, \exists s = \text{Minimum of } S, \text{ i.e. } s \in S \ \& \ \forall x \in S \quad x \leq s.$)

証明 A の well-ordered subnets の全体に, 後ろに伸びる時を"大"とす
る部分順序を入れて超限帰納法を適用すればよい. ■

補題 6 と 8 から FB-type の index set A をもつ $X = \lim_a X_a$ を
研究するには, A はもともと well-ordered net であるとして良い.

以下この場合に限る. well-ordered A に順序同型な順序数 $\tau(A)$ が只
1つ存在する. さらに順序数の集合は well-ordered だから次が定義出来る.

定義 9 $\tau(A)$ に対して cofinal な最小の順序数 $\sigma(A) \equiv \sigma(\tau(A))$
を A の coinality(共終度)と呼ぶ.

$\sigma(A)=1$ となる well-ordered net を有限的(finite type), $\sigma(A)=\omega$
となるものを可算的(ω -type)であると言う. ■

同じ cofinality を持つ well-ordered nets は同値類を作る.

A が finite type なら, A に最終元 a_0 があるから, $X_{a_0} = \lim_a X_a$
となり, 話は単一の空間 X_{a_0} の事となり, 帰納的極限を考える必要がない.

そこで最低でも ω -type の時を考える必要があるが、大きな順序数に対応する場合は難しいので、 ω -type を考える。

さてどのような時に整列 net(順序数) A が ω -type になるかだが、

- (1) ω は当然 ω -type.
- (2) $\omega \cdot n \sim \{\omega \cdot (n-1)+1, \omega \cdot (n-1)+2, \dots\}$ ($n=1, 2, \dots$) で ω -type.
- (3) $\omega^\omega \sim \{\omega^1+1, \omega^2+1, \dots\}$ で ω -type.
- (4) 一般に $a \sim \omega$ なら $a \sim \{a_1, a_2, \dots\}$ として、 $\forall b > 0$ に対して $b^a \sim \{b^{a_1}+1, b^{a_2}+1, \dots\}$ となるから、 $b^a \sim \omega$.
- (5) 可算個の単調増大順序数 $\{a_1, a_2, \dots\}$ で $\sup_n a_n = \sup_n (a_n+1) \sim \omega$.
例えば $\omega(1) \equiv \omega, \omega(2) \equiv \omega^{\omega(1)}, \omega(3) \equiv \omega^{\omega(2)}, \dots$ で、
 $\omega(\infty) \equiv \sup_n (\omega(n)) \sim \omega$.

順序数の集合 $\{a_b\}_b$ が ω -type sequence を作るなら、 $\sup_b a_b \sim \omega$.

- (6) $A = \omega^{a(1)} n_1 + \dots + \omega^{a(m)} n_m$ ($a(1) > \dots > a(m) \geq 0$ [順序数],
 $0 < n_j < +\infty$) を Cantor の標準型とする. $a(m)=0$ なら最大元
 $\omega^{a(1)} n_1 + \dots + n_m$ があり、 $\sigma(A)=1$ で finite type となるので、
 $a(m) > 0$ とする. $A = \omega^{a(1)} n_1 + \dots + \omega^{a(m)} (n_m-1) + \omega^{a(m)} \sim \omega^{a(m)}$.

(7) 一般の net で $\#A = \aleph_0$ なら、 A は FB-type で finite もしくは ω -type である. 何故なら $A \equiv \{a_1, a_2, \dots\}$ に対し、 $b_j \equiv \max\{b_{j-1}, a_j\}$ と置くと、 $\{b_j\}_j$ は A で cofinal で、 $\exists k$ s.t. $\forall j > k \quad b_j = b_k$ なら finite type, それ以外は ω -type である. J

この様に ω -type になる場合はかなりある. そこで 以下 A は FB- ω -type net の場合に限る. すなわち置き換えて net $A = N = \{1, 2, 3, \dots\}$ とし、順序 $<$ は通常の $<$ とする.

A が ω -type である時の位相 τ^1 について、次の考察を行う.

$X \equiv \lim_j X_j$ で $\varphi_j: X_j \rightarrow X$ は τ^1 について 1対1連続と仮定した。
 位相 τ^1 の各 X_j への制限位相を τ_j^1 とすれば、上の事から元の τ_j と
 同値又はより弱い位相である。 X_j 上の位相 τ_j^1 より、再び帰納極限位相
 τ^{11} を $X \equiv \lim_j X_j$ 上に作る事が出来る。ここで

補題 10 $\tau^1 = \tau^{11}$.

証明 $\forall j \quad \tau_j^1 < \tau_j$ より $\tau^{11} < \tau^1$ は明らか。

逆は $\forall \tau^1$ -開集合 $W = \bigcup_j (W \cap X_j)$ で、定義により $W \cap X_j$ は τ_j^1 -
 -開集合だから、 W は τ^{11} -開集合でもある。 ■

従って $\tau_j \rightarrow \tau_j^1$ の位相の置き換えを行っても、 $X \equiv \lim_j X_j$ は τ^1 を含め
 て同一で変わる事がない。そしてこの時 $\varphi_j: X_j \rightarrow X$ の埋め込み map は同
 相写像となる。そこで以下の議論では、この位相の置き換えを行ったとして、

(**) $\varphi_j: X_j \rightarrow X$ の埋め込み map は同相写像である。

との条件を入れる。此の場合当然 $\varphi_{1j}: X_j \rightarrow X_1$ の埋め込み map も同相写
 像となる。

所で2つの帰納系 $\{X_a(\text{位相 } \tau_a^x)\}, \{Y_b(\text{位相 } \tau_b^y)\}$ に対して、

補題 11 $X \equiv \lim_a X_a$ (極限位相 τ_x), $Y \equiv \lim_b Y_b$ (極限位相 τ_y) で、
 $\lim_{ab} (X_a \times Y_b)$ の帰納的極限位相 τ^1 が、 $\tau_x \times \tau_y$ と一致するならば、
 $\forall b$ で $\lim_a (X_a \times Y_b)$ (極限位相 $\tau_x(b)$) = $(\lim_a X_a) \times Y_b$, $\forall a$ で
 $\lim_b (X_a \times Y_b)$ (極限位相 $\tau_y(a)$) = $X_a \times (\lim_b Y_b)$ が位相を込めて成立する。
 すなわち $\tau_x(b) = \tau_x \times \tau_b^y$, $\tau_y(a) = \tau_a^x \times \tau_y$.

証明 何れも集合としては $\bigcup_{ab} (X_a \times Y_b)$ であって一致する。

$\tau_x(b) = \tau_x \times \tau_b^y$ について示せば十分である。 $\lim_b ((\lim_a X_a) \times Y_b)$ を考
 える。この帰納的極限位相を τ^* と書く。 τ^* での開集合 W は $\forall b$ で
 $W \cap (\lim_a X_a \times Y_b)$ が $\tau_x \times \tau_b^y$ -開集合となる事で特徴付けられるが、

これからさらに $\forall a$ で $W \cap (X_a \times Y_b)$ が $\tau^x_a \times \tau^y_b$ -開集合になる．ところで τ^1 は $\forall a, b$ で $W \cap (X_a \times Y_b)$ が $\tau^x_a \times \tau^y_b$ -開集合になる様な最強の位相であったから， $\tau^* < \tau^1$ だが仮定により $\tau^1 = \tau_X \times \tau_Y$ でこれは $\lim_b (X \times Y_b)$ の帰納的極限位相が $X \times (\lim_b Y_b)$ の位相で押さえられる事を意味する．補題3 と合わせて結局 $\tau^* = \tau_X \times \tau_Y$ を得る．この関係を部分空間 $\lim_b (X \times Y_b) = X \times (\lim_b Y_b)$ に制限して結果が得られる． ■

§3 傾斜被覆． この § では X を T_1 -位相空間(即ち相異なる任意の2点に対し，それぞれ他の点を含め近傍が取れる)とする．

定義 12 X の閉集合 E に，net B を index set とする開被覆 $E \subset \bigcup_{a \in B} O_a$ が存在して， $\forall a \in B \quad O_a \subset \bigcup_{b < a} O_b$ が満たされる時，この被覆 $\mathfrak{A} \equiv \{O_a\}_{a \in B}$ を E の傾斜被覆と言う．

B の cofinal type を $\mathfrak{A}$ の cofinal type と言う．

また E の全ての傾斜開被覆の濃度より大きい濃度の最小を E の被覆指数と言う． ■

補題 13 E の傾斜被覆 $\mathfrak{A} \equiv \{O_a\}_{a \in B}$ と B の cofinal subnet B_0 が与えられた時， B_0 を index set とする傾斜被覆 $\mathfrak{A}_0 \equiv \{O^0_a\}_{a \in B_0}$ を作る事が出来る．

証明 $\forall a \in B_0 \quad O^0_a \equiv \bigcup_{b \in B_a} O_b$ ($B_a \equiv \{b \in B \mid b \leq a\}$) とすればよい． ■

補題 14 任意の開被覆 $E \subset \bigcup_{a \in R} O_a$ について， R の部分集合からなるある well-ordered set $I = \{b\}$ を取り傾斜被覆 $E \subset \bigcup_{b \in I} O_b$ を作る事が出来る．

証明 整列可能定理により $R = \{a\}$ を並べ， $I \equiv \{b \in R \mid E \cap O_b \subset \bigcup_{a < b} O_a\}$ と置けばよい． ■

☆ 同じ開被覆 $E \subset \bigcup_{a \in R} O_a$ から，異なる多くの傾斜被覆を作る事が出来る．しかし与えられた cofinal type を index set とする傾斜被覆を作る事は難しい．只次が言える．

補題 15 空間 E に，集積点のない部分集合 $S \equiv \{s\}$ があれば， $\#B \leq \#S$ となる $\forall \text{net } B \equiv \{b\}$ を index set とする傾斜被覆を作る事が出来る．

証明 $\#S_0 = \#B$ となる S の部分集合 S_0 を1つ取る． B から S_0 への1対1対応 $B \ni b \rightarrow s_b \in S_0$ とし， $S(b) \equiv \{s_c \in S_0 \mid c \succ b\}$ と定める． S の仮定から $S(b)$ は閉集合で $c \succ b \Rightarrow S(c) \subset S(b)$ である．

$O_b \equiv E - S(b)$ とおけば $E \subset \bigcup_{b \in B} O_b$ が求める傾斜被覆である． ■

補題 16 空間 E の可算開被覆 $E \subset \bigcup_{a \in R} O_a$ が有限部分被覆を持たなければ， ω -type の well-ordered set I を index set に持つ傾斜部分被覆 $E \subset \bigcup_J O_J$ を作る事が出来る．

証明 R を1列に並べて， $R = \{a_1, a_2, \dots\}$ とし， $\{O_{a_j}\}_j$ から $O_{a_j} \subset \bigcup_{k < j} O_{a_k}$ となる O_{a_j} を除いた列 $\{O_{a_j}'\}_j$ を作るとよい． ■

定義 17 τ を或る無限基数とする． X の閉集合 E が τ -コンパクトとは，任意の開被覆 $E \subset \bigcup_{p \in B} O_p$ に対して，常に部分被覆 $E \subset \bigcup_{p \in C} O_p$ ($C \subset B$, $\#C < \tau$) を選ぶことが出来る事を言う．

$x \in X$ が τ -コンパクト点であるとは， x が τ -コンパクト集合からなる基本近傍系を持つ事を言う． X の全ての点が τ -コンパクト点である時， X を局所 τ -コンパクト空間と言う．

特に $\tau = \aleph_0$ で τ -コンパクトを単にコンパクト， $\aleph_1$ の時 Lindelöf と言う．

補題 18 τ -コンパクト集合 E の閉部分集合 F はまた τ -コンパクト集合である．

証明 F の開被覆 $F \subset \bigcup_{p \in B} O_p$ で， $E \subset \bigcup_{p \in B} O_p \cup F^c$ は E の

開被覆だから, $E \subset \bigcup_{p \in C} O_p \cup F^c$ ($C \subset B, \#C < \tau$). これで $F \subset \bigcup_{p \in C} O_p$ が求める部分被覆である. ■

補題 19 X が T_3 -空間 ($\forall$ 閉部分集合 $F, \forall x \notin F, \exists$ 開集合 O_1 ($\supset F$), $\exists$ 開集合 O_2 ($\ni x$) s.t. $O_1 \cap O_2 = \emptyset$.) なら,
 $x \in X$ が τ -コンパクト点(τ -cp点) $\Leftrightarrow \exists x$ の τ -コンパクト近傍.

証明 ($\Rightarrow$) は定義より明らか. ($\Leftarrow$) を示す.

先ず T_3 -空間では $\forall x \in X$ の任意の開近傍 U に対し, $F = U^c$ と置くと,
 $\exists$ 開集合 O_1 ($\supset U^c$), $\exists$ 開集合 O_2 ($\ni x$) s.t. $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ だから,
 $(U \cap O_2)^-$ が U に入る x の閉近傍となる. すなわち閉近傍からなる x の基本近傍系がとれる. ■

補題 20 $\forall E$ で, それが τ -コンパクトである様な τ の最小がある.

証明 先ず $\forall \tau > \sigma$ で E が σ -コンパクトなら, E はまた τ -コンパクトである. 一方 E には常に $\#E$ -被覆が存在するから, E は $\#E$ -コンパクトである. 従って $\kappa(E) \equiv \min(\tau \mid E \text{ が } \tau\text{-コンパクト})$ が存在する. ■

補題 21 E の閉部分集合 F について, $\kappa(F) \leq \kappa(E)$.

証明 E が τ -コンパクトなら, F も τ -コンパクトであるから. ■

補題 22 $\forall \sigma < \kappa(E)$ に対して, $E \subset \bigcup_{p \in C} O_p$ ($C \subset B, \#C < \sigma$) なる部分被覆の存在しない開被覆 $E \subset \bigcup_{p \in B} O_p$ が存在する.

証明 もしある σ で $\forall$ 開被覆 $E \subset \bigcup_{p \in B} O_p, \exists C \subset B, \#C < \sigma$ s.t. $E \subset \bigcup_{p \in C} O_p$ とすれば, E は σ -コンパクトとなり, $\kappa(E)$ の定義に反する. ■

系1 無限集合 E で $\kappa(E) \leq \#E$.

証明 E は $\#E$ -コンパクトだから. ■

系2 E が普通のコンパクト集合 $\Leftrightarrow \kappa(E) = \aleph_0$.

従って局所コンパクト空間 X の各点は $\aleph_0$ -コンパクト点である. ■

系3 E が離散無限集合なら $\kappa(E) = \#E$. ■

§4. 可算帰納系の積空間

§2の結果を踏まえて、考える位相空間の族 $\{X_j\}_j$ (X_j の位相: τ_j)で
 $\forall j < k \quad X_j \subset X_k$ (into) が同相の埋込とし、 Y を別に与えられ
た位相空間(位相: σ)とする. $X \equiv \lim_j X_j$ と $Z_0 \equiv \lim_j (X_j \times Y)$ の帰納
的極限位相をそれぞれ τ^1, τ^2 とする. 集合として $Z \equiv X \times Y = \lim_j (X_j \times Y)$
 $= (\cup_j X_j) \times Y = \cup_j (X_j \times Y) = Z_0$. 補題3 より $\tau^1 \times \sigma < \tau^2$.

ここで $\tau^1 \times \sigma = \tau^2$ となる為の条件を求める. その為には
 $\forall (x_0, y_0) \in X \times Y$ を取り、その近傍系を調べればよい. $x_0 \in X_{j_0}$
とすれば、 A は cofinal subnet $\{j \in A \mid j \geq j_0\}$ で置き換えてよい
から、 $\forall j \in A \quad x_0 \in X_j$ としてよい.

ここで " x_0 が X_{k+1} 中で X_k の τ_{k+1} -内点でない" という条件を $Ni(k)$
と示す. 次の2つの場合がある.

Case 1 ω と cofinal な $K \equiv \{k_j\}$ が有って、 $\forall j \in K$ で $Ni(k_j)$.

Case 2 $\exists k_0 \in A \quad \forall k \geq k_0$ で x_0 が X_{k+1} 中 X_k の τ_{k+1} -内点である. ■

x_0 が X_{k+1} 中で X_k の τ_{k+1} -内点であれば、 x_0 の X_k 中の近傍での議
論は、 X_{k+1} 中でのそれと一致するから、列 $\{X_j\}_j$ から X_{k+1} を省く事が
できる. 従って Case 1 の時は、必要なら A を K で置き換えて $\forall j \in A$
で $Ni(j)$ と仮定してよい.

Case 2 では、先ず A を $\{k \in A \mid k \geq k_0\}$ で置き換えてよい.

ここでまた2つの場合がある.

Case 2-1 $\exists U (\subset \cap_j U_j)$ s.t. U は $\forall n$ で x_0 の τ_n -開近傍.

Case 2-2 ω と cofinal な $K \equiv \{k_j\}$ が有って、 $\forall j \in K$ で x_0 の

$\forall \tau_{kj}$ -開近傍 U_{kj} で $\exists k(j) > k_j$ s.t. U_{kj} は $\tau_{k(j)}$ -開集合ではない.

Case 2-1 では議論を U に限り, 即ち $\forall n \quad X_n = U$ と見なして議論を進めて良い, つまり A に最大元がある場合同様, 位相の問題はなくなる.

Case 2-2 の場合では次の例がある.

例 23 前同様, $Y \equiv \mathbb{Q}$ (有理数全体), $G(j) \equiv \mathbb{R}$ (実数全体)($j=1, 2, 3, \dots$) に通常の位相(X_n の位相を τ_n , Y の位相を σ と書く)を入れたものを考える. $G_j(\equiv X_j) \equiv \prod_{k=1}^j G(k)$, そして $X \equiv \lim_j X_j = \prod_{k=1}^{\infty} G(k)$ (制限直積) の座標表示 $X \ni x = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$ ($x_k \in G(k)$) で $X^\omega(n) \equiv \{x \in X_n \mid \forall k \leq n \quad |x_k| \leq 2^{-n} (n=1, 2, \dots)\}$ と置くと, $\forall k \leq n$ で $X^\omega(n) \cap X_k \subset X^\omega(k)$ である. ここで $X_\omega \equiv \bigcup_n X^\omega(n)$, $X_n^\omega \equiv X_\omega \cup X_n$ と置く. 元の $X \equiv \lim_n X_n$ には X_n の位相 τ_n から作った τ^1 -位相が入るが, $X_n^\omega (\subset X)$ の位相としては, τ^1 -位相を X_n^ω に制限した τ_n^ω -位相を採用する事とする. 明らかに $\{X_n^\omega\}$ は帰納系を作り, 集合としては $\lim_n X_n^\omega = \bigcup X_n^\omega = \bigcup X_n = \lim_n X_n$ である. この空間に τ_n^ω -位相から作った $\tau^{\omega 1}$ -位相を考えると, $\forall \tau^1$ -開集合 E に対して, 定義から $E \cap X_n^\omega$ は τ_n^ω -開集合だから $\tau^1 < \tau^{\omega 1}$.

一方 $\forall \tau^{\omega 1}$ -開集合 E では, $E \cap X_n^\omega$ は τ_n^ω -開集合で $\exists \tau^1$ -開集合 $E_n (\subset X)$ s.t. $E_n \cap X_n^\omega = E \cap X_n^\omega$. すなわち $E \cap X_n = (E \cap X_n^\omega) \cap X_n = (E_n \cap X_n^\omega) \cap X_n = E_n \cap X_n$ となるが, E_n が τ^1 -開集合だから $E_n \cap X_n = E \cap X_n$ は τ_n -開集合で, $E = \bigcup_n (E \cap X_n)$ は τ^1 -開集合となる. すなわち $\tau^{\omega 1} < \tau^1$. 結局 $\tau_{\text{ind}} = \tau^{\omega \text{ind}}$ が言える.

同様 $\lim_j (X_j^\omega \times Y)$ でも, $(\tau^\omega \times \sigma)^1$ -位相は $(\tau \times \sigma)^1$ -位相に等しい. 所で先に示した様に, $(\lim_j X_j^\omega) \times Y = (\lim_j X_j) \times Y = \lim_j (X_j \times Y) = \lim_j (X_j^\omega \times Y)$ の部分集合 $U \equiv \{(x, y) \mid |x_j| < |\cos(jy)| (j=1, 2, \dots)\}$

は $(\tau \times \sigma)^1$ -開集合であつたが、 $(\tau^1 \times \sigma)$ -開集合ではなかつた。すなわち $(\tau^0 \times \sigma)^1$ -開集合だが、 $(\tau^{01} \times \sigma)$ -開集合ではない。これは $(\tau^0 \times \sigma)^1 \neq (\tau^{01} \times \sigma)$ を示す。 ■

そこで以下 Case 1 の場合、即ち $\forall j$ で x_0 は X_{j+1} 中での X_j の τ_{j+1} -内点ではない時のみを考える事とする。

定義 24 x_0 が X_{j+1} 中での X_j の τ_{j+1} -内点ではない時、 x_0 を X_{j+1} 中での X_j の 縁点と言う。 ■

補題 25 x_0 が T_1 -空間 X_{j+1} 中での X_j の縁点である時、 X_{j+1} 中での x_0 の τ_{j+1} -開近傍族 $\mathcal{U}_j \equiv \{U^j_b\}_{b \in B_j}$ を次の様にとれる。

- (1) B_j は net で $b_1 < b_2$ なら $U^j_{b_1} \cup X_j \supset (\neq) U^j_{b_2} \cup X_j$,
- (2) $\bigcap_{b \in B_j} U^j_b \cup X_j$ はもはや x_0 の X_{j+1} 中での近傍ではない。

証明 x_0 は T_1 -空間 X_{j+1} 中で X_j の τ_{j+1} -内点でないから、 X_{j+1} での x_0 の基本開近傍系の作る net $B_j^0 = \{U^j_b\}$ に対して、 $\bigcap_{b \in B_j} U^j_b \cup X_j = X_j$ は x_0 の X_{j+1} での近傍ではない。ここで $\exists b_0 < b$ s.t. $U^j_{b_0} \cup X_j = U^j_b \cup X_j$ となる B_j^0 の元 b を除いて出来る net を B_j とすればよい。 ■

定義 26 補題 25 の $\mathcal{U}_j = \{U^j_b\}$ を x_0 の (X_{j+1}, X_j) -分離(開近傍)族, net B_j の cofinal type を $\mathcal{U}_j$ の cofinal type と言う。

さらに x_0 の (X_{j+1}, X_j) -分離(開近傍)族 $\mathcal{U}_j$ の濃度の、 $\mathcal{U}_j$ を走らせた時の最低を x_0 の (X_{j+1}, X_j) -分離指数と言う。 ■

☆後に示す様に x_0 の (X_{j+1}, X_j) -分離族 $\mathcal{U}_j$ は一般的に一意に決まらない。従つて net B_j やその cofinal type は $\mathcal{U}_j$ の取り方による。

補題 27 x_0 の (X_{j+1}, X_j) -分離族 $\mathcal{U}_j = \{U^j_b\}_{b \in B_j}$, $B_j \supset B_j^0 \sim B_j$ とすると、 $\mathcal{U}_j^0 = \{U^j_b\}_{b \in B_j^0}$ は又 x_0 の (X_{j+1}, X_j) -分離族である。

証明 補題 25 の条件 (1), (2) は $\mathcal{U}_j^0$ でも満たされる。 ■

補題 28 (1) X_j の縁点 x_0 における (X_{j+1}, X_j) -分離族 $\mathcal{U}_j$ の cardinality $\rho(\mathcal{U}_j)$ は $\aleph_0$ 以上で, X_{j+1} での x_0 の基本近傍系の cardinality より大きくない. 特に X_{j+1} が τ_{j+1} -可算基本近傍系を持てば, $\rho(\mathcal{U}_j)$ は $\aleph_0$ である.

(2) $j \leq k < n$ で $\mathcal{U}_k$ を x_0 における (X_{k+1}, X_k) -分離族とする時, (X_n, X_j) -分離族 $\mathcal{U}_{(n,k)}$ で 同じ cofinal type を持つものが取れる.

証明 (1) 有限個の x_0 の近傍の共通部分は又近傍だから, $\bigcap_b U^j_b \cup X_j$ が x_0 の近傍でない為には, 族 $\{U^j_b\}$ は無限集合でなくてはならない. また補題 25 の証明で x_0 の τ_{j+1} -基本近傍系 $\{U^j_b\}$ で, $\bigcap_b U^j_b \cup X_j$ は x_0 の近傍でないから後半が結論される.

(2) $\mathcal{U}_k = \{U^k_b\}$ を x_0 の (X_{k+1}, X_k) -分離族とする. $X_{k+1} \subset X_n$ が同相の埋め込みだから, 各 U^k_b に対して x_0 の τ_n -開近傍族 $\mathcal{U}_{(n,k)} \equiv \{U^k_b \sim\}$ を単調で $U^k_b = U^k_b \sim \cap X_{k+1}$ となる様にとる事ができる. もし $\bigcap_b U^k_b \sim \cup X_j (\subset \bigcap_b U^k_b \sim \cup X_{k+1})$ が x_0 の τ_n -近傍なら, $(\bigcap_b U^k_b \sim \cup X_{k+1}) \cap X_{k+1} = \bigcap_b U^k_b$ は τ_{k+1} -近傍で, $\mathcal{U}_k = \{U^k_b\}$ を x_0 の (X_{k+1}, X_k) -分離族とした事に反する. すなわち $\mathcal{U}_{(n,k)}$ が $\mathcal{U}_k$ と同じ cofinal type を持つ x_0 の (X_n, X_j) -分離族である. ■

一般の位相空間 $(Y \supset X)$ に対して, (Y, X) -分離族を考えよう.

例 29 実数体 $\mathbb{R}$ の c 乗を Y , (0) を X とする. (0) の近傍として, $\mathfrak{B} \equiv \{(x_\alpha)_\alpha \mid \text{高々可算個の } \alpha \text{ で } x_\alpha = 0, \text{他はfree}\}$ で生成される基本近傍系を採用すると, この系より補題 25 の証明で作った, 点 0 の (Y, X) -分離族 $\mathcal{U}$ は可算個の交叉で閉じていて, cofinal type は ω より大きい.

例 30 無限次元ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ に弱位相を入れたもの Y , (0) を X とする. この位相は第一可算公理を満たさない. 即ち基本近傍系 $\mathcal{U}$ の基数

は $\aleph_0$ より確かに大きい、 $w \neq 0$ を 1 つ固定し集合族 $\mathcal{U} \equiv \{U_n = \{w \mid 1 < w, x > 1 < 1/n\}\}_n$ は 0 の開近傍族で、明らかに 0 の (Y, X) -可算分離族を与える。つまり $\mathcal{U}$ の cofinal type は ω と一致する。

例 31 $Y \equiv \mathbb{R}$, $X \equiv \{0\}$ とし、その上の位相を任意の高々可算部分集合 $E (\subset Y)$ の補集合 $\overline{E} (\equiv Y - E)$ の全体を開集合基としてそれから生成される位相とする。この時開集合達の可算無限交叉はまた開集合となるから、 $\forall x \in Y$ で x の (Y, X) -分離族 $\mathcal{U}$ でその cofinal type は ω より確かに大きい。しかし $\# \mathbb{R} = c$ だからその cardinality は c より大きくない。

例 32 $Y \equiv Y_1 \times Y_2$, Y_1 を例 29 の空間, Y_2 を例 30 の空間とし、積位相をいれる。 $X \equiv \{0\}$ ($= \{0\} \times \{0\}$) とする。 Y_1, Y_2 にはそれぞれ 0 における $(Y_j, \{0\})$ -分離族 $\mathcal{U}_j$ があるが、補題 28(2) の論法そのままに、 Y の上の 0 の開近傍族 $\mathcal{U}_j \sim$ を作ると、それぞれ 0 における (Y, X) -分離族となり、 $\mathcal{U}_1$ の cofinal type は ω , $\mathcal{U}_2$ のは ω より大となる。 ■

ここで次の条件を考える。

[条件 C] (1) $\forall j$ で x_0 は系 X_{j+1} の中の X_j の縁点である。

(2) Y は T_3 -分離公理を満たし、 $y_0 \in Y$ の近傍系は第一可算公理を満たす。(その基本開近傍系を $\{V_j\}_j$ ($\overline{V_{j+1}} \subset V_j$) とする。

(3) $\forall j$ で同じ cofinal type を持つ (X_{j+1}, X_j) -分離族 $\mathcal{U}_j$ と V_j の傾斜被覆 $\{V_b^j\}_{b \in B_j}$ が存在する。 ■

☆ここで(3)は補題 13 と補題 27 により、cofinal 部分 net に置き換えて、
“(3') $\forall j$ で順序同型対応する (X_{j+1}, X_j) -分離族 $\mathcal{U}_j$ と $\overline{V_j}$ の傾斜被覆 $\{V_b^j\}_{b \in B_j}$ が存在する。” に替える事が出来る。

命題 33 [条件 C] を満たす極限空間 $X \equiv \lim_j X_j$, と Y では、
(x_0, y_0) ($\in X \times Y$) の τ^2 -開近傍であるが、 $\tau^1 \times \sigma$ -開近傍にならぬ

$X \times Y$ の集合を作る事が出来る。

証明 [方針] $(x_0, y_0) \in X_J \times Y$ の $\tau_J \times \sigma$ -開近傍 W_J in $X_a \times Y$ を, $\forall j < k (j \in A)$ で $W_J = W_k \cap (X_J \times Y)$ を満たし且つ $W \equiv \bigcup_j W_J$ が $\tau^1 \times \sigma$ -開近傍 in $X \times Y$ にならぬ様にとれる事を示す。

まず A の先頭元 1 に対して, $(x_0, y_0) \in X_1 \times Y$ の $\tau_1 \times \sigma$ -開近傍 W_1 を適当にとり, 後は index j に従い帰納的に作る。

$W_J = W_{J+1} \cap (X_J \times Y)$ となる W_{J+1} (以下 $k = j + 1$ と書く) を作るには, 先ず W_J は $\tau_J \times \sigma$ -開集合だから, $\forall (x, y) \in W_J$ に対して, $\exists U_0(x, y) \ni x, V_0(x, y) \ni y$ のそれぞれ τ_J -開集合, σ -開集合があって, $U_0(x, y) \times V_0(x, y) \subset W_J$ と出来る。

仮定より $X_J \subset X_k$ が同相の埋め込みであったから, $\exists U^\sim(x, y) : x$ の τ_k -開近傍 in X_k s.t. $U_0(x, y) \supset U^\sim(x, y) \cap X_J$ 。

ここで $U^\sim(x, y), V_0(x, y)$ を以下の様にそれぞれ $U(x, y) : x$ の τ_k -開近傍 ($\subset U^\sim(x, y)$) in X_k , $V(x, y) : y$ の σ -開近傍 ($\subset V_0(x, y)$) in Y と取り直して, $W_k \equiv \bigcup_{(x, y) \in W_J} (U(x, y) \times V(x, y))$ と置くと

(a) $W_k : (x_0, y_0)$ の $\tau_k \times \sigma$ -開近傍, (b) $W_J = W_k \cap (X_J \times Y)$

は容易にしめされる。

[$(U(x, y), V(x, y))$ の作り方] $(x, y) \in W_J$ とする。

Case 1. $y \notin \overline{(V_J)}$ の場合。

$U(x, y) \equiv U^\sim(x, y), V(x, y) \equiv V_0(x, y) \cap (\overline{(V_J)})^c$ と置く。

Case 2. $y \in \overline{(V_J)}$ の場合。

[条件 C]より各 $j \in A$ に対して X_{j+1} の中の x_0 の $(X_{j+1}, X_j)\tau_{j+1}$ -開分離族 $\mathcal{U}_j \equiv \{U^j_b\}_{b \in B_j}$ から $\overline{V_J}$ の傾斜被覆 $\{V^j_b\}_{b \in B_{j \in J}}$ への順序同型を与える全単射があるから, それを $U^j_b \leftrightarrow V^j_b$ と同じ b により示す。

$y \in V^j_b$ となる b があるから、対応する U^j_b を使って

$U(x, y) \equiv \tilde{U}(x, y) \cap (U^j_b \cup X_j)$, $V(x, y) \equiv V_0(x_0, y) \cap V^j_b$ と定める.

もし y が2つ以上の V^j_b に属している時は、 $b_1 < b_2$ なら $U^j_{b_1} \supset U^j_{b_2}$ なので、和を取った時に y では $U^j_{b_1} \times \{y\} (\supset U^j_{b_2} \times \{y\})$ が利いて来る.

こうして作った $W = \bigcup_j W_j$ は (x_0, y_0) を含み、 $\forall j \in A$ で $W_j = W \cap (X_j \times Y)$ は $\tau_j \times \sigma$ -開集合だから、 τ^2 -開近傍である. 従ってこれが $\tau^1 \times \sigma$ -開近傍にならぬ事を示す.

もし W が (x_0, y_0) の $\tau^1 \times \sigma$ -開近傍であるならば、 $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ のそれぞれ τ^1 -, σ -開近傍 $U(\subset X)$, $V(\subset Y)$ があり $U \times V \subset W$ となる.

さて $\mathfrak{B} \equiv \{V_j\}$ は $y_0 \in Y$ の単調減少基本開近傍系だから $\exists j \in A$ s.t. $V \supset V_j$. 上の取り方から $W_k = W \cap (X_k \times Y) = \bigcup_{(x, y) \in W_j} (U(x, y) \times V(x, y))$. これが $U_k \times V = U \times V \cap (X_k \times Y)$ の形の近傍を含むから、 $\forall y \in V_k$ について、特に $\forall (x, y) \in W_j$ $U(x, y) \supset U$ でなくてはならない. ところで上記の Case 2 の取り方により、 $U(x, y) \subset U^j_b$, 即ち

$$U \subset \bigcap_{y \in V_j} U(x, y) \subset \bigcap_b U^j_b.$$

仮定により右辺は x_0 の近傍ではないのでこれは矛盾である. ■

命題 34 Y を T_3 -空間, $x_0 \in X \equiv \lim_j X_j$ (位相は τ^1) で X_j の中の x_0 のある τ_j -開近傍 $U(j)$ が $U(j) \subset U(j+1)$ を満たす様に取れて、その各点の X_{j+1} の中の X_j の分離指数が一様に s 以上であるとする. 一方 $y_0 \in Y$ (位相は σ) が被覆指数が s 以下の基本開近傍系 $\{\bar{V}_j \mid V_j: \text{開集合}\}$ を持つとする.

この時 $(x_0, y_0) \in X \times Y \equiv \lim_j (X_j \times Y)$ の τ^2 -近傍はまた $\tau^1 \times \sigma$ -近傍である.

証明 (x_0, y_0) の $X \times Y$ の中の τ_2 -開近傍を W とし、 $W_j = W \cap$

$(X_j \times Y)$ と書く. $x_0 \in X$ の τ_1 -開近傍 U と $y_0 \in Y$ の σ -近傍 V が取れて, $U \times V \subset W$ が言えればよい.

さて $(x_0, y_0) \in W_1(\tau_1 \times \sigma\text{-開}) \subset X_1 \times Y$ より x_0 の開近傍 $U^1(\subset U(1))$ と y_0 の開近傍 $V(\subset V_1)$ があって, $U^1 \times \bar{V} \subset W_1$ となる.

次に $\forall k \leq j$ で x_0 の τ_k -開近傍 U^k が (1) $U^k \subset U(k)$, (2) $U^{k-1} = U^k \cap X_{k-1}$, (3) $U^k \times V \subset W_k$ を満たす様に作れたとして, U^{j+1} をつくる.

$U^j \times \bar{V} \subset W_j$ より, $\forall x \in U^j$ で $\{x\} \times \bar{V} \subset W_j$. 即ち $x \in U^j$ の τ_{j+1} -開近傍 $U_{j+1}(x, y)$ と $y \in \bar{V}$ の σ -開近傍 $V_{j+1}(x, y)$ があって,

(1) $U_{j+1}(x, y) \subset U(j+1)$, (2) $U_{j+1}(x, y) \cap X_j \subset U^j$, (3) $U_{j+1}(x, y) \times V_{j+1}(x, y) \subset W_{j+1}$.

明らかに $\bar{V} \subset \bigcup_{y \in \bar{V}} V_{j+1}(x, y)$. $\bar{V}$ の被覆指数が s 以下だから, この被覆から基数 s 以下の部分被覆 $\bar{V} \subset \bigcup_{y \in I_s} V_{j+1}(x, y)$ を取る事が出来る.

x での分離指数が s より大きいとの仮定から対応して $U_{j+1}(x) \subset \bigcap_{y \in I_s} U_{j+1}(x, y)$ となる x の開近傍が取れて, 作り方から (1) $U_{j+1}(x) \subset U(j+1)$, (2) $U_{j+1}(x) \cap X_j \subset U^j$, (3) $U_{j+1}(x) \times \bar{V} \subset W_{j+1}$ を満たす.

$U_{j+1} \equiv \bigcup_{x \in U_j} U_{j+1}(x)$ と置くと上から

(1) $U_{j+1} \subset U(j+1)$, (2) $U_{j+1} \cap X_j = U^j$, (3) $U_{j+1} \times \bar{V} \subset W_{j+1}$ となる. $U \equiv \bigcup_j U_j$ は (2) より τ^2 -開集合で, (3) より $U \times \bar{V} = \bigcup_j U_j \times \bar{V} \subset \bigcup_j W_j = W$ を満たし, 従って求めるものである. ■

系 $X \equiv \lim_j X_j$ の $\forall j$ で x_0 が X_{j+1} の中の X_j の縁点であり, cardinality $\aleph_0$ の (X_{j+1}, X_j) -分離族 $\mathcal{U}_j$ を持つとする. また Y は第一可算公理を満たす T_3 -空間で, y_0 は Lindelöf 点であるとする.

この時 y_0 が Y で, コンパクトな近傍を持つ事が, (x_0, y_0) の $\forall \tau^2$ -近傍が, 又 $\tau^1 \times \sigma$ -近傍となる為の必要十分条件である.

特に $\{X_j\}_j$ が全て第一可算公理を満たし、全ての X_j の点が X_{j+1} の中の X_j の縁点となるなら、 Y が局所コンパクト空間である事が、 $\tau^2 = \tau^1 \times \sigma$ となる為の必要十分条件である。

証明 [十分性] コンパクト空間は T_3 -分離公理を満たすから、 y_0 は基本閉(コンパクト)近傍系 $\{\bar{V} \mid V: \text{開集合}\}$ を持つ。 y_0 はコンパクト点で $\bar{V}$ の被覆指数は $\aleph_0$ 、また 補題 28 (1) により、全ての点で分離指数は $\aleph_0$ 以上であるから、命題 34 を使い結果が得られる。

特に Y が局所コンパクト空間なら、全ての $y \in Y$ はコンパクト点で、 $\forall y$ の $\forall \tau^2$ -近傍が又 $\tau^1 \times \sigma$ -近傍となり、従って $\tau^2 = \tau^1 \times \sigma$ となる。

[必要性] $\{X_j\}_j$ が全て第一可算公理を満たすとしたから、補題 28 により、 X の分離指数は $\aleph_0$ で cofinal type は ω -type である。もし y_0 が Y で Lindelöf 点でコンパクトな近傍を持たないなら、 y_0 の基本開近傍系 $\{V_j\}_j$ で、 $\forall j$ で $\bar{V}_j$ が非コンパクト、すなわち $\bar{V}_j$ の被覆指数は有限ではなくしかも $\aleph_0$ 以下、つまり丁度 $\aleph_0$ で、cofinal type は ω -type になる。従って [条件 C] が満たされ、命題 33 により、 $(x_0, y_0) (\in X \times Y)$ の τ^2 -開近傍であるが、 $\tau^1 \times \sigma$ -開近傍にならぬ集合を作る事ができる。

つまり $\tau^2 = \tau^1 \times \sigma$ の為には、 $\forall y \in Y$ がコンパクト近傍を持つ事、すなわち Y が局所コンパクトである事が必要である。 ■

☆一般に Y_j が全て局所コンパクト空間でも $Y \equiv \tau^1\text{-}\lim_j Y_j$ は局所コンパクトにはならない。つまり例 4 の結果は“ Y 自身が局所コンパクト”が積位相が極限操作と可換になる為に必要ではない事を示す。例 4 と命題 34 を比べると、 Y が第一可算公理を満たしていない事に起因する事が判る。

§ 5. τ_{BS} -位相

全 § で見た様に、帰納的極限位相 τ^1 では、積位相が極限操作と可換に

なる為に、両積空間の位相に相互に関連した条件を必要とした。これは τ^1 が強過ぎる為であるとも考えられる。そこで条件 (*) の下でもっと弱い位相を選んで、積と極限操作が可換になるものが無いかを考える。その1つが前報告の中で位相群に対して定義した筈位相 τ_{BS} に準じる以下の位相である。

ここでは $X \equiv \lim_j X_j$ に現れる空間 X_j は全て一様位相空間とし、埋め込み $X_j \subset X_{j+1}$ は常に一様連続であるとする。

位相空間 X で $\Delta \equiv \{(x, x) \in X \times X\}$, $A, B \subset X \times X$ に対して

$$A^{-1} \equiv \{(y, x) \in X \times X \mid (x, y) \in A\},$$

$$A \circ B \equiv \{(x, z) \in X \times X \mid \exists y \in X \text{ s.t. } (x, y) \in A, (y, z) \in B\} \text{ と書く.}$$

定義 35 X 上の一様構造 $\mathcal{U} \equiv \{U\}$ とは、 $X \times X$ の部分集合の族で次の条件を満たすものを言う。

$$(1) \quad \forall U \in \mathcal{U}, \forall V (\subset X \times X) \supset U \Rightarrow V \in \mathcal{U},$$

$$(2) \quad \forall U, V \in \mathcal{U} \Rightarrow \exists W \in \mathcal{U} \text{ s.t. } W \subset U \cap V \in \mathcal{U}$$

$$(3) \quad \forall U \in \mathcal{U} \Rightarrow \Delta \subset U$$

$$(4) \quad \forall U \in \mathcal{U} \Rightarrow U^{-1} \in \mathcal{U}$$

$$(5) \quad \forall U \in \mathcal{U} \Rightarrow \exists V \in \mathcal{U} \text{ s.t. } V \circ V \subset U.$$

$\mathcal{U}$ の元 U を近域(entourage)と呼ぶ。特に次の分離条件を仮定する。

$$(6) \quad \bigcap U = \Delta$$

X 上の一様構造 $\mathcal{U}$ に対して、 $\forall x \in X$ と $U \in \mathcal{U}$ で $U(x) \equiv \{y \in X \mid (x, y) \in U\}$ とすると、 $\mathcal{U}(x) \equiv \{U(x) \mid U \in \mathcal{U}\}$ は x の近傍系を与える。各 $x \in X$ について近傍系 $\mathcal{U}(x)$ を与えこれが定義する X の位相を一様位相と言い、この様な構造を持った X を一様位相空間であると言う。 ■

【一様位相空間の積】2つの一様位相空間 X, Y の一様構造をそれぞれ $\mathcal{U} \equiv \{U (\subset X \times X)\}$, $\mathcal{V} \equiv \{V (\subset Y \times Y)\}$ とすると、 $\mathcal{W} \equiv \{U \times V \subset$

$X \times X \times Y \times Y \mid U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}\}$ は積空間 $Z \equiv X \times Y$ の一様構造を与える. この一様位相空間 Z を X, Y の積空間と言う. ■

[一様連続性] 一様位相空間 X から, 別の一様位相空間 Y への写像 $\varphi: X \rightarrow Y$ が一様連続であるとは, Y の近域 V の $\varphi \times \varphi$ による逆像 $(\varphi \times \varphi)^{-1}(V)$ が, X の近域となる事を言う. ■

☆一様連続写像は, 対応する位相で測って連続である.

定義 36 一様構造 $\mathcal{U} = \{U\}$ を持つ空間 X の部分集合 E と,
 $\forall U \in \mathcal{U}$ に対して $U(E) \equiv \{x \in X \mid \exists y \in E \text{ s.t. } (y, x) \in U\}$ を E の $(U-)$ 一様近傍と言う. ■

$X \equiv \lim_j X_j$ において, 各 X_j が一様位相空間(近域の全体を $\mathcal{U}_j = \{U_j\}$ とする)の時を考える.

定義 37 [PTA-集合] $B (\subset X_j \times X_j)$ が PTA-集合であるとは,
 $\forall k > j$ に対して, $\forall$ 近域 $U_k (\subset X_k \times X_k)$ で $\exists$ 近域 $V_k (\subset X_k \times X_k)$ で
 $U_k \circ B \supset B \circ V_k$ となる事を言う.

また $\forall j$ で空間 X_j に PTA-集合である近域系の基が存在する時, 一様位相空間族 $\{X_j\}_j$ を PTA-族であると言う.

補題 38 2つの PTA-族 $\{X_j\}_j, \{Y_j\}_j$ から作った一様空間族 $\{X_j \times Y_j\}_j$ はまた PTA-族をなす.

証明 定義によりそれぞれの[PTA]-近域族 $\{U_j\}_j, \{V_j\}_j$ に対して, その積 $\{U_j \times V_j\}_j$ は空間族 $\{X_j \times Y_j\}_j$ に対して [PTA]-近域族を作る. ■

補題 39 PTA-族 $\{X_j\}_j$ で, それぞれの j について PTA-集合である近域 U_j を取り固定する. そして $U_N \sim \equiv U_N \circ U_{N-1} \circ \cdots \circ U_2 \circ U_1$ を作り, $U \sim \equiv U_N U_N \sim$ と置くと, $\{U_j\}_j$ を走らせた $\{U \sim\}$ 全体は $X \equiv \lim_j X_j$ の一様構造を与え, $U \sim$ はその近域となる. ■

証明 一様構造の条件(1),(3),(6)は明らか。(2) は各 j で $\exists W_j \in \mathcal{U}_j$
s.t. $W_j \subset U_j \cap V_j$ となるから, $W_N \sim \equiv W_N \circ W_{N-1} \circ \cdots \circ W_2 \circ W_1$,
 $W \sim \equiv \bigcup_N W_N \sim$ と置くと, $W \sim \subset U \sim \cap V \sim$ となる。(4) は [PTA] を使って,
 $\forall N$ で $U_N \circ U_{N-1} \circ \cdots \circ U_1 \supset V_1^{-1} \circ V_2^{-1} \circ \cdots \circ V_N^{-1}$ となる近
域系 $\{V_j\}$ が取れるので, この系から $V \sim$ を作ればよい。

(5) はまず各 U_j に対して $V_j \circ V_j \subset U_j$ を満たす [PTA] の V_j を取
る. まず $W_1 \equiv V_1$ とし, j についての induction で [PTA]-近域族 $\{W_j\}$ を,
 $(W_{N-1} \circ \cdots \circ W_1) \circ (W_{N-1} \circ \cdots \circ W_1) \subset U_{N-1} \circ \cdots \circ U_1$ より $W_N \subset$
 V_N かつ $V_N \circ (W_{N-1} \circ \cdots \circ W_2 \circ W_1) \supset (W_{N-1} \circ \cdots \circ W_2 \circ W_1) \circ W_N$
となるように W_N を決めて行く. そうすれば $\forall N$ で $U_N \circ \cdots \circ U_1 \supset$
 $(W_N \circ \cdots \circ W_2 \circ W_1) \circ (W_N \circ \cdots \circ W_2 \circ W_1)$ となる事が言えるから,
 $W_N \sim \equiv W_N \circ \cdots \circ W_2 \circ W_1$, $W \sim \equiv \bigcup_N W_N \sim$ で $W \sim \circ W \sim \subset U \sim$ となる. ■

定義 40 補題 39 で与えた X の近域を 筈型近域, $\{U_j\}$ をそれぞ
れの j について X_j の一様構造を与える近域を全て走らせて出来る X の
近域系 $\{U \sim\}$ から定義される X の一様構造を 筈型一様構造と言ひ, この
構造により導入される X の一様位相 τ_{BS} を 筈型一様位相と言う. ■

補題 41 2つの一様位相空間の [PTA]-族 $\{X_j\}_j$, $\{Y_j\}_j$ とその
積空間族 $\{X_j \times Y_j\}_j$ のそれぞれから作った帰納的極限 $X \equiv \lim_j X_j$,
 $Y \equiv \lim_j Y_j$, $Z \equiv \lim_j (X_j \times Y_j)$ に, それぞれ 筈型一様構造をいれ,
それにより導入される 筈型一様位相をそれぞれ τ_X , τ_Y , τ_Z とすれば,

$$\tau_X \times \tau_Y = \tau_Z .$$

証明 $\tau_X \times \tau_Y < \tau_Z$ (一様) は補題 4 の議論の通りで容易に判る.

逆を示す. それぞれの近域系を $\{U \sim\}$, $\{V \sim\}$, $\{W \sim\}$ とする. $x_0 \in$
 X , $y_0 \in Y$ を取る. 簡単の為, $x_0 \in X_1$, $y_0 \in Y_1$ としてよい. $x_0 \in X$, $y_0 \in$

$Y, (x_0, y_0) \in X \times Y$ それぞれの近傍は $\{x \in X \mid (x_0, x) \in U^\sim\}, \{y \in Y \mid (y_0, y) \in V^\sim\}, \{(x, y) \in X \times Y \mid ((x_0, y_0), (x, y)) \in W^\sim\}$ の形で与えられる. $W^\sim$ は $X \times Y$ の近域だから, $\bigcup_N W_N^\sim$ の形の集合を含む. ここで $X_j \times Y_j$ それぞれの近域族 $\{W_j\}_j$ が存在して $W_N^\sim = W_N \circ \cdots \circ W_2 \circ W_1$ である. W_j は $X_j \times Y_j$ の近域なので, X_j の近域 U_j, Y_j の近域 V_j が存在して $U_j \times V_j \subset W_j$ となる. すなわち $W_N^\sim = W_N \circ \cdots \circ W_2 \circ W_1 \supset (U_N \times V_N) \circ \cdots \circ (U_2 \times V_2) \circ (U_1 \times V_1) = (U_N \circ \cdots \circ U_2 \circ U_1) \times (V_N \circ \cdots \circ V_2 \circ V_1) = U_N^\sim \times V_N^\sim$, 但し $U_N^\sim \equiv U_N \circ \cdots \circ U_2 \circ U_1, V_N^\sim \equiv V_N \circ \cdots \circ V_2 \circ V_1$ はそれぞれ X_N, Y_N の近域である. そこで $W^\sim \supset \bigcup_N W_N^\sim \supset \bigcup_N (U_N^\sim \times V_N^\sim) = (\bigcup_N U_N^\sim) \times (\bigcup_N V_N^\sim) = U^\sim \times V^\sim$ となり $\tau_X \times \tau_Y \succ \tau_Z$ (一様) が示された. ■

§ 6 帰納的極限同士の写像の連続性

位相空間の2つの帰納系 $\{X_j\}$ と $\{Z_j\}$ で, 各 j について連続写像 $\varphi_j: X_j \rightarrow Z_j$ があり, $\forall k > j$ で $\varphi_k|_{X_j} = \varphi_j$ とすると $\varphi|_{X_j} \equiv \varphi_j$ として $\varphi: X \equiv \lim_j X_j \rightarrow Z \equiv \lim_j Z_j$ への写像 φ を一意に定義出来る.

補題 42 $X \equiv \lim_j X_j$ で各 j に対して, X_j の開集合 W_j が与えられて, $\forall j$ で $W_j \subset W_{j+1}$ を満たしているとする. この時 $W \equiv \bigcup_j W_j$ は帰納的極限位相に関して開集合である.

証明 " $\forall j$ $W \cap X_j$ が X_j で開集合" を言えばよいが, $\forall k > j$ で W_k は X_k で開集合だから当然 $W_k \cap X_j$ が X_j で開集合であって, $W \cap X_j = \bigcup_{k > j} W_k \cap X_j$ は X_j で開集合である. ■

補題 43 X, Z に共に極限位相を入れる時, φ は連続である.

また $\{X_j\}$ と $\{Z_j\}$ が共に一様位相空間の [PTA]-族であるなら, 2つ

の帰納的極限空間に入れた τ_{BS} -位相で φ は一様連続となる。

証明 X, Z の極限位相を τ_X, τ_Z , τ_{BS} -位相を τ^{BS}_X, τ^{BS}_Z と書く。

τ_Z -開集合 $W(\subset Z)$ に対して, $\varphi^{-1}(W)$ が τ_X -開集合になる事を言う。

$\forall x \in \varphi^{-1}(W)$ で $\exists j$ s.t. $x \in X_j, \exists z \in W$ s.t. $\varphi(x)=z$. φ の定義より $\varphi_j(x)=z \in W \cap Z_j$ としてよい. つまり $\varphi^{-1}(W) = \bigcup_j \varphi_j^{-1}(W \cap Z_j)$.

さて " $W(\subset Z)$ が τ_Z -開集合" $\Leftrightarrow$ " $\forall j$ $W \cap Z_j$ が Z_j で開集合"

$\Rightarrow \varphi_j$ が連続だから $\varphi_j^{-1}(W \cap Z_j)$ が X_j で開集合

補題42 により $\varphi^{-1}(W) = \bigcup_j \varphi_j^{-1}(W \cap Z_j)$ は τ_X -開集合である。

次に $W^\sim(\subset Z \times Z)$ を Z の τ^{BS}_Z を定義する近域とする. $W^\sim = \bigcup_N W_N^\sim$, $W_N^\sim = W_N \circ \dots \circ W_2 \circ W_1$ (W_j は Z_j の近域)としてよい. $\overline{\varphi_j^{-1}(W_j)} \equiv (\varphi_j^{-1} \times \varphi_j^{-1})(W_j)$ は X_j の近域で, $\overline{\varphi_N^{-1}(W_N)} \circ \dots \circ \overline{\varphi_2^{-1}(W_2)} \circ \overline{\varphi_1^{-1}(W_1)} = \overline{\varphi_N^{-1}(W_N \circ \dots \circ W_2 \circ W_1)} = \overline{\varphi_N^{-1}(W_N^\sim)} \equiv U_N^\sim$ から作った $U^\sim \equiv \bigcup_N U_N^\sim = \overline{\varphi^{-1}(W^\sim)}$ は X の近域である. ■

さて $\{X_j\} = \{Z_j\}$ ($\equiv \{G_j\}$) が位相群である時を考える. $G \equiv \lim_j G_j$ が位相群になる為には, 群演算 $G \times G \ni (g, h) \rightarrow gh^{-1} \in G$ 連続である事が必要十分である. ところで $\forall j$ で G_j は位相群であるから $G_j \times G_j \ni (g, h) \rightarrow gh^{-1} \in G_j$ は連続であるから, 補題43 により

系 群演算に対応する写像で $\lim_j (G_j \times G_j) \rightarrow \lim_j G_j$ は, 両辺の帰納的極限位相を関して連続である。

また $\{G_j\}$ が [PTA]-系なら, 両辺の筈一様位相を関して連続である. ■

最終的に補題41とあわせて

補題44 位相群の帰納系 $\{G_j\}$ において, $\tau^1((\lim_j G_j) \times (\lim_j G_j)) = \tau^1(\lim_j (G_j \times G_j))$ なら, $\lim_j G_j$ は極限位相で位相群になる。

また $\{G_j\}$ が [PTA]-系なら, $\lim_j G_j$ は筈一様位相で位相群になる. ■