

古典群の退化系列表現について

松本久義 (東大数理)

G を実簡約 Lie 群とする。 G の表現論において 基本的な問題の 1 つは、 G の放物型部分群 P の (admissible) 既約表現 σ からの誘導表現 $\text{Ind}_P^G(\sigma)$ の構造を調べるということになる。

例えば、 σ が P の Levi part の表現として (limits of) discrete series と (unitary とは限らない) 1次元表現の外部テンソル積となるような場合は、いわゆる standard 表現というものになり、 Kazhdan-Lusztig Conjecture の解決をうけ Vogan によって既約分解を与えるアルゴリズムが与えられている。

実は P の (admissible) 既約表現からの誘導表現も上記 Vogan のアルゴリズムを組み合わせると “原理的には既約分解を決定できる” ことがわかる。しかしそれは G の rank があまり小さくなくても実行するのは計算量が多すぎる。多くの場合は “アルゴリズムがある” というのを知見するのは困難である。

σ が 1次元表現であるような $\text{Ind}_P^G(\sigma)$ は退化系列表現と呼ばれ、既約分解については、まだ一般的にはわかっていない。しかし、

これまでに知られている結果から推測すると、既約分解についてかなりきれいとした分解法が得られるのではと期待される。

一般化された退化系列

$\mathfrak{g}$ を G の複素化された Lie 環とし、 θ を G のある Cartan involution に対応する $\mathfrak{g}$ の自己同型とする。 $\mathfrak{g}_\theta$ を $\mathfrak{g}$ の θ -stable な故物型部分 Lie 環、 L を $\mathfrak{g}_\theta$ の Levi part に対応する G の部分族とし、 τ を L の admissible 表現とする。適当な τ と $\mathfrak{g}_\theta$ に対する条件のもとで $R_{\mathfrak{g}}(\tau)$ なる G の admissible 表現 (cohomological induction) が定義できる。これは、Vogan, Zuckerman らにより適当な条件のもとで以下の性質をもつことが知られている。

① τ が unitary なら $R_{\mathfrak{g}}(\tau)$ も unitary

② τ が 既約 なら $R_{\mathfrak{g}}(\tau)$ も 既約

特に τ が 1次元 unitary 表現のとき $R_{\mathfrak{g}}(\tau)$ は derived functor module といわれる。

$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_\theta$ のとき $R_{\mathfrak{g}}(\tau) = \tau$ となることに注意して退化系列表現の概念を以下のように一般化する。

$P = MAN$ を M, A が θ -stable になるような Langlands 分解
 とし. $\mathfrak{g}$ を M の複素化された Lie 環の θ -stable な放物型部分環
 とし τ を $\mathfrak{g}$ の Levi part の 1 次元 unitary 表現. ν を A の (unitary とは限らない)
 1 次元表現とし. 誘導表現 $\text{Ind}_P^G(R_{\mathfrak{g}}(\tau) \otimes \nu)$ を一般化された
 退化系列表現と呼ぶことにする.

Change of polarization

ここで適当な $\tau, \nu, P, \mathfrak{g}$ についての条件のもとで表現
 $\text{Ind}_P^G(R_{\mathfrak{g}}(\tau) \otimes \nu)$ に対してある θ -stable parabolic
 subalgebra $\mathfrak{g}' \subseteq \mathfrak{g}$ ($\mathfrak{g}$ は G の複素化された Lie 環),
 $\mathfrak{g}$ の Levi part に対応する G の部分群 L' , L' の放物型
 部分群 P' , P' の 1 次元表現 τ' が存在して,

$$\text{Ind}_P^G(R_{\mathfrak{g}}(\tau) \otimes \nu) = R_{\mathfrak{g}'}(\text{Ind}_{P'}^{L'}(\tau'))$$

が成り立つ Virtual character module の中で 1 になる
 場合がある.

この場合, $R_{\mathfrak{g}'}$ が適当な状況のもとでは既約性をたも
 exact functor になっているので 自然なことは, $\text{Ind}_P^G(R_{\mathfrak{g}}(\tau) \otimes \nu)$
 の既約分解が $\text{Ind}_{P'}^{L'}(\tau')$ のそれと一致することになる.

たとえば Schmid の Character identity はこのやり方で導き出すことが出来る。

また G が古典群で V が unitary になるおな場合は 110 ページ (7.1.1) にある種の regularity を仮定すると、右辺の $\text{Ind}_P^{G'}(\tau')$ として非常に特殊な退化系列表現 (たとえば外部積) が出てこないようにできる。たとえば $G = U(m, n)$ の場合はいわゆる Siegel parabolic についての退化系列表現の場合に帰着できることがわかり、Translation principle と结合起来。

$\text{Ind}_P^G(R_g(\tau \otimes V))$ (V : unitary) の分解がとれることができる。
 $SO^*(2n), Sp(m, n)$ についても同様であるが。
 $Sp(n, \mathbb{R}), SO_0(m, n)$ などの場合については難しい。
(Comp. Math 100) (1981) 1-39

V が unitary という仮定をはずしても、Change of Polarization の idea は適用できるが、右辺に出てくる $\text{Ind}_P^{G'}(\tau')$ はかなりいろいろな退化系列が出てくることになる。