

Siegel 領域上の affine 変換群の表現と Riesz 超函数

伊師英之 (京大 理)

§1. 序.

Siegel 領域 D 上に分裂型可解 Lie 群 G が affine 変換群として単純推移的に作用しているとする. 領域 D の Bergman 核を K とし D 上の測度 μ を $d\mu(p) := K(p, p)^{-1} dm(p)$ ($p \in D$, dm は Euclid 測度) と定義すると μ は G の作用に関して不変である. Siegel 領域 D 上の G -相対不変な正值函数 Δ に対し (すなわち或る G の 1 次元表現 ν が存在して, 任意の $p \in D$ と $g \in G$ に対し $\Delta(g \cdot p) = \nu(g)\Delta(p)$ が成り立つ), D 上の正則函数 f で norm

$$\|f\|^2 := \int_D |f(p)|^2 \Delta(p) d\mu(p)$$

が有限なものからなる Hilbert 空間を $\mathcal{H}$ とする. すなわち $\mathcal{H}$ は $K(p, p)^{-1}\Delta(p)$ を weight とする weighted Bergman 空間である. このような $\{0\}$ ではない $\mathcal{H}$ は必ずしも任意の相対不変函数 Δ に対して存在するとは限らないが, もし存在すれば $\mathcal{H}$ 上に次のように G の unitary 表現 π が実現されることが容易にわかる:

$$\pi(g)f(p) := \nu(g)^{-1/2} f(g^{-1} \cdot p) \quad (g \in G, p \in D, f \in \mathcal{H}).$$

Rossi-Vergne [11] および Gindikin [5] は $\mathcal{H}$ が $\{0\}$ でないような全ての Δ を決定し, しかも Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ は再生核をもつことを示した. 以上のことをふまえて我々は G の 1 次元表現 χ について次の (i), (ii) をみたす $\{0\}$ でない Hilbert 空間 $\mathcal{H}_\chi$ を考察する.

- (i) $\mathcal{H}_\chi$ は D 上の正則函数からなる函数空間で, 再生核をもつ,
- (ii) $\mathcal{H}_\chi$ 上には次のような G の unitary 表現 π_χ が実現される:

$$\pi_\chi(g)f(p) := \chi(g)f(g^{-1} \cdot p) \quad (g \in G, p \in D, f \in \mathcal{H}_\chi).$$

結論を述べると, このような $\mathcal{H}_\chi$ は或る等質錐上の positive な Riesz 超函数と一対一の対応が付けられるので筆者 [6] による positive な Riesz 超函数についての研究結果を応用して完全に決定される. その上に実現される G の表現 $(\pi_\chi, \mathcal{H}_\chi)$ は全て既約であり, その同値類は orbit method を使うことにより分類できる. なお $\chi(g)$ ($g \in G$) が affine 変換 g の Jacobian の巾乗のとき, $\mathcal{H}_\chi$ の再生核は Bergman 核の巾乗であるから, 我々の結果は Wallach [13], Vergne-Rossi [12] により為された Wallach set の決定を含む.

§2. Siegel 領域 と 正規 j 代数.

実 vector 空間 V , 複素 vector 空間 W , 直線を含まない V の中の open convex cone Ω と Hermitian map $Q : W \times W \rightarrow V_{\mathbb{C}}$ について, Q が Ω -positive のとき (すなわち任意の $u \in W \setminus \{0\}$ について $Q(u, u) \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}$ となるとき) $V_{\mathbb{C}} \times W$ の中の複素領域

$$D(\Omega, Q) := \{(z, u) \in V_{\mathbb{C}} \times W \mid \Im z - Q(u, u) \in \Omega\} \quad (1)$$

を Siegel 領域とよぶ. 領域 $D = D(\Omega, Q)$ に正則同型群 $\text{Hol}(D)$ が推移的に作用するとき §1 で述べたような affine 変換群, すなわち $\text{Hol}(D)$ の 分裂型可解 Lie 部分群 G で D に単純推移的に作用するものが存在する. Lie 群 G の Lie 代数を $\mathfrak{g}$ とすると $\mathfrak{g}$ には正規 j 代数の構造が入るが, Pyatetskii-Shapiro は 等質 Siegel 領域 D の正則同値類全体とこの正規 j 代数の同型類との間に一対一の対応があることを示した. そこで我々は 正規 j 代数から出発してそれに対応する Siegel 領域 $D(\Omega, Q)$ を構成し, その $D(\Omega, Q)$ について議論をすすめていくことにする.

正規 j 代数とは, $\mathbb{R}$ 上の分裂型可解 Lie 代数 $\mathfrak{g}$, $j^2 = -\text{id}$ となる $\mathfrak{g}$ 上の 1 次変換 j と $\omega \in \mathfrak{g}^*$ の組で次の (i), (ii) をみたすものをいう:

- (i) 任意の $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{g}$ について $[Y_1, Y_2] + j[jY_1, Y_2] + j[Y_1, jY_2] - [jY_1, jY_2] = 0$,
- (ii) $(Y_1|Y_2) := \omega([Y_1, jY_2])$ は $\mathfrak{g}$ 上の j -不変な内積を定める.

この内積 $(\cdot|\cdot)$ に関する $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}$ の直交補空間を $\mathfrak{a}$ とすると $\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{g}$ の可換部分代数である. 以下に述べる Pyatetskii-Shapiro の構造定理はこの $\mathfrak{a}$ によって $\mathfrak{g}$ が “root 分解” されることを示す. すなわち $\mathfrak{a}$ 上の線形形式 α について

$$\mathfrak{g}_{\alpha} := \{Y \in \mathfrak{g} \mid [C, Y] = \alpha(C)Y \text{ for all } C \in \mathfrak{a}\}$$

とすると次が成り立つ.

定理 1 ([9]). (i) ある $\mathfrak{a}$ の基底 $A_1, \dots, A_r$ ($r := \dim \mathfrak{a}$) が存在して $(\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\} \subset \mathfrak{a}^*$ をその双対基底とする), $\mathfrak{g}$ は 次のように分解される: $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(0) \oplus \mathfrak{g}(1/2) \oplus \mathfrak{g}(1)$,

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}(0) &= \mathfrak{a} \oplus \left(\sum_{1 \leq k < m \leq r}^{\oplus} \mathfrak{g}_{(\alpha_m - \alpha_k)/2} \right), \quad \mathfrak{g}(1/2) = \sum_{k=1}^r \mathfrak{g}_{\alpha_k/2}, \\ \mathfrak{g}(1) &= \left(\sum_{k=1}^r \mathfrak{g}_{\alpha_k} \right) \oplus \left(\sum_{1 \leq k < m \leq r}^{\oplus} \mathfrak{g}_{(\alpha_m + \alpha_k)/2} \right). \end{aligned}$$

- (ii) $E_k := -jA_k$ ($k = 1, 2, \dots, r$) とすると $\mathfrak{g}_{\alpha_k} = \mathbb{R}E_k$.
- (iii) $[\mathfrak{g}(p), \mathfrak{g}(q)] \subset \mathfrak{g}(p+q)$ (ただし $p > 1$ のとき $\mathfrak{g}(p) := \{0\}$ とする).
- (iv) $j\mathfrak{g}(0) = \mathfrak{g}(1)$ かつ $j\mathfrak{g}(1/2) = \mathfrak{g}(1/2)$.

定理 1 (iv) から $\mathfrak{g}(1/2)$ 上には j によって複素構造が入るが, この複素 vector 空間 $(\mathfrak{g}(1/2), j|_{\mathfrak{g}(1/2)})$ を W とする. 一方定理 1 (iii) から $\mathfrak{g}(0), \mathfrak{g}(1)$ はそれぞれ $\mathfrak{g}$ の部分代数および可換な ideal で $\mathfrak{g}(0)$ に対応する Lie 群 $H := \exp \mathfrak{g}(0)$ は $\mathfrak{g}(1)$ に随伴表現によって作用していることがわかる. 実 vector 空間 $\mathfrak{g}(1)$ を V とし $E := E_1 + \cdots + E_r \in V$ を通る H -軌道を Ω とすると, Ω は V の中の open convex cone で H は Ω に単純推移的に作用している. 群 H は W にも随伴表現で作用しており, その作用は j と可換である. 複素 vector 空間 W 上の Hermitian map $Q : W \times W \rightarrow V_{\mathbb{C}}$ を $Q(u, u') := ([ju, u'] + i[u, u'])/4$ と定義すると Q は Ω -positive で

$$Q(t \cdot u, t \cdot u') = t \cdot Q(u, u') \quad (t \in H, u, u' \in W) \quad (2)$$

が成り立つ. このようにして構成された V, W, Ω, Q から (1) によって定まる $D(\Omega, Q)$ が正規 j 代数 $(\mathfrak{g}, j, \omega)$ に対応する Siegel 領域である. 可解 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対応する Lie 群 $G := \exp \mathfrak{g}$ は D を保存する $V_{\mathbb{C}} \times W$ 上の affine 変換群として実現されるが, それを述べるために G の構造について説明する. まず $\mathfrak{n}(Q) := V \oplus W$ は定理 1 (iii) により $\mathfrak{g}$ の巾零 ideal であるが, この $\mathfrak{n}(Q)$ に対応する群を $N(Q)$ とし, その元 $\exp(x + u)$ ($x \in V, u \in W$) を $n(x, u)$ で表す. このとき $[u, u'] = 4\Im Q(u, u')$ ($u, u' \in W$) に注意すると Campbell - Hausdorff の公式から次の乗法公式が得られる:

$$n(x, u)n(x', u') = n(x + x' + 2\Im Q(u, u'), u + u') \quad (x, x' \in V, u, u' \in W).$$

一方 G は $N(Q)$ と H の半直積で

$$tn(x, u)t^{-1} = n(t \cdot x, n \cdot u) \quad (t \in H, x \in V, u \in W)$$

が成り立つ. そこで $G = N(Q) \rtimes H$ の $V_{\mathbb{C}} \times W$ への作用が

$$\begin{aligned} n(x_0, u_0)t_0 \cdot (z, u) &:= (t_0 \cdot z + x_0 + 2Q(t_0 \cdot u, u_0) + Q(u_0, u_0), t_0 \cdot u + u_0) \\ (t_0 \in H, n(x_0, u_0) \in N(Q), (z, u) \in V_{\mathbb{C}} \times W). \end{aligned} \quad (3)$$

と定義でき, これによって G は D に単純推移的に作用している.

パラメーター $s = (s_1, s_2, \dots, s_r) \in \mathbb{C}^r$ に対し χ_s を G の 1 次元表現で $\exp \mathfrak{a}$ 上の値が $\chi_s(\exp \sum_{k=1}^r c_k A_k) := e^{s_1 c_1 + \cdots + s_r c_r}$ ($c_1, \dots, c_r \in \mathbb{R}$) となるようなものとする. すると $\mathfrak{n}(Q) \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ だから $\chi_s|_{N(Q)} = 1$ である. 錐 Ω 上の函数 Δ_s を

$$\Delta_s(t \cdot E) := \chi_s(t) \quad (t \in H). \quad (4)$$

で定義する. このとき $|s| := \sum_{k=1}^r s_k$ とすると

$$\Delta_s(\lambda x) = \lambda^{|s|} \Delta_s(x) \quad (\lambda > 0, x \in \Omega) \quad (5)$$

が成り立つ.

§3. 双対錐上の Riesz 超函数.

錐 $\Omega \subset V$ について V^* の中の部分集合

$$\Omega^* := \{ \xi \in V^* \mid \langle x, \xi \rangle > 0 \text{ for all } x \in \overline{\Omega} \setminus \{0\} \}$$

を Ω の双対錐とよぶ. 群 H は V^* への反傾表現 (すなわち $\xi \in V^*$ への $t \in H$ の作用を $t \cdot \xi := \xi \circ t^{-1}$ と定義する) によって Ω^* に単純推移的に作用している. 2^r 個の $\varepsilon \in \{0, 1\}^r$ について V^* の元 E_ε^* を

$$\left\langle \sum_{k=1}^r x_{kk} E_k + \sum_{m>k} X_{mk}, E_\varepsilon^* \right\rangle = \sum_{k=1}^r \varepsilon_k x_{kk} \quad (x_{kk} \in \mathbb{R}, X_{mk} \in \mathfrak{g}_{(\alpha_m + \alpha_k)/2}) \quad (6)$$

と定義すると $E^* := E_{(1, \dots, 1)}^*$ は Ω^* の元で, それ以外の E_ε^* は Ω^* の境界 $\partial\Omega^*$ に属している.

定理 2. (i) 群 H の中の $\xi \in V^*$ における stabilizer を H_ξ とし (すなわち $H_\xi := \{t \in H \mid t \cdot \xi = \xi\}$), H_ξ の Lie 代数を $\mathfrak{h}_\xi$ とする. このとき $\varepsilon \in \{0, 1\}^r$ について

$$\mathfrak{h}_{E_\varepsilon^*} = \sum_{\varepsilon_k=0}^{\oplus} \mathbb{R} A_k \oplus \sum_{\varepsilon_k=0, i<k}^{\oplus} \mathfrak{g}_{(\alpha_k - \alpha_i)/2}.$$

(ii) それぞれの $\varepsilon \in \{0, 1\}^r$ に対して E_ε^* を通る V^* の中の H -軌道を $\mathcal{O}_\varepsilon^*$ とすると, 双対錐 Ω^* の閉包 $\overline{\Omega^*}$ は

$$\overline{\Omega^*} = \bigsqcup_{\varepsilon \in \{0, 1\}^r} \mathcal{O}_\varepsilon^*$$

と H -軌道分解される.

さて $s \in \mathbb{C}^r$ について $s^* := (s_r, s_{r-1}, \dots, s_1)$ とし Ω^* 上の函数 Δ_s^* を

$$\Delta_s^*(t \cdot E^*) := \chi_{-s^*}(t) \quad (t \in H) \quad (7)$$

によって定義する. 双対錐 Ω^* 上の H -不変測度を μ^* とし, 整数 q_k ($k = 1, \dots, r$) を $q_k := \sum_{m>k} \dim \mathfrak{g}_{(\alpha_m - \alpha_k)/2}$ で定める. パラメーター $s \in \mathbb{C}^r$ が条件 $\Re s_{r+1-k} > q_k/2$ ($k = 1, \dots, r$) を満たすとき Ω^* 上の Γ -積分

$$\Gamma_{\Omega^*}(s) := \int_{\Omega^*} e^{-\langle E, \xi \rangle} \Delta_s^*(\xi) d\mu^*(\xi)$$

は絶対収束し, 定数倍を除いて $\prod_{k=1}^r \Gamma(s_{r+1-k} - q_k/2)$ に等しい. そこで同じ条件をみたす s について V^* 上の緩増加超函数 $\mathcal{R}_s^*$ を

$$\langle \mathcal{R}_s^*, \psi \rangle := \frac{1}{\Gamma_{\Omega^*}(s)} \int_{\Omega^*} \psi(\xi) \Delta_s^*(\xi) d\mu^*(\xi) \quad (\psi \in \mathcal{S}(V^*)) \quad (8)$$

と定義する. 右辺は s の正則函数として $\mathbb{C}^r$ 全体に解析接続されるので, それによって全ての $s \in \mathbb{C}^r$ について緩増加超函数 $\mathcal{R}_s^*$ を定め, これを Ω^* 上の Riesz 超函数とよぶ. Riesz 超函数 $\mathcal{R}_s^*$ は H の作用に対して相対不変性をもつ:

$$\langle \mathcal{R}_s^*, \psi \circ t^{-1} \rangle = \chi_{-s^*}(t) \langle \mathcal{R}_s^*, \psi \rangle \quad (t \in H). \quad (9)$$

命題 3. (i) 任意の $y \in \Omega$ と $s \in \mathbb{C}^r$ について

$$\langle \mathcal{R}_s^*, e^{-\langle y, \xi \rangle} \rangle_\xi = \Delta_{-s^*}(y).$$

(ii) 錐 Ω 上の函数 Δ_s は $\Omega + iV$ 上の正則函数として次のように解析接続される:

$$\Delta_s(y + ix) = \langle \mathcal{R}_{-s^*}^*, e^{-\langle y + ix, \xi \rangle} \rangle_\xi \quad (y \in \Omega, x \in V).$$

Riesz 超函数の positivity に関する次の定理は [6] を応用することで得られる.

定理 4. それぞれの $\varepsilon \in \{0, 1\}^r$ について $q_k(\varepsilon) := \sum_{m>k} \varepsilon_m \dim \mathfrak{g}_{(\alpha_m - \alpha_k)/2}$ ($k = 1, \dots, r$) と整数 $q_k(\varepsilon)$ を定め, パラメーター s の集合 $\mathfrak{X}(\varepsilon)$ を

$$\mathfrak{X}(\varepsilon) = \left\{ s \in \mathbb{R}^r \left| \begin{array}{l} s_{r+1-k} > q_k(\varepsilon)/2 \quad (\text{if } \varepsilon_k = 1) \\ s_{r+1-k} = q_k(\varepsilon)/2 \quad (\text{if } \varepsilon_k = 0) \end{array} \right. \right\} \quad (10)$$

と定義する. このとき Riesz 超函数 $\mathcal{R}_s^*$ が正の測度となる必要十分条件は $s \in \bigsqcup_{\varepsilon \in \{0, 1\}^r} \mathfrak{X}(\varepsilon)$ であり, $s \in \mathfrak{X}(\varepsilon)$ のとき $\mathcal{R}_s^*$ は $\mathcal{O}_\varepsilon^*$ 上の H -相対不変測度である.

§4. W 上の Fock 空間.

元 $\xi \in \overline{\Omega^*}$ に対し W 上の Hermitian 形式 Q_ξ を $Q_\xi(u, u') := 2\langle Q(u, u'), \xi \rangle$ ($u, u' \in W$) と定義する. Hermitian map Q は Ω -positive なので Q_ξ は半正定値である. そこで $N_\xi := \{v \in W \mid Q_\xi(v, v) = 0\}$ とすると Q_ξ は 商空間 $M_\xi := W/N_\xi$ 上の正定値形式を定める. 空間 M_ξ の元 $u + N_\xi$ ($u \in W$) を $[u]_\xi$ とかく. 次の (i), (ii) をみたす W 上の正則函数 ϕ のなす空間を $\mathcal{F}_\xi$ とする:

(i) 任意の $u \in W$ と $v \in N_\xi$ について $\phi(u + v) = \phi(u)$,

(ii) $\|\phi\|_\xi^2 := \int_{M_\xi} |\phi(u)|^2 e^{-Q_\xi(u, u)} dm_\xi([u]_\xi) < \infty$.

ただし dm_ξ は $\int_{M_\xi} e^{-Q_\xi(u, u)} dm_\xi([u]_\xi) = 1$ となるように正規化された M_ξ 上の Lebesgue 測度である. すなわち $\phi \in \mathcal{F}_\xi$ を M_ξ 上の正則函数とみなすと $\mathcal{F}_\xi$ は M_ξ 上の Fock 空間である. 次の補題は Fock 空間の一般論から従う ([1]).

補題 5. 函数空間 $\mathcal{F}_\xi$ は Hilbert 空間であり $e^{Q_\xi(\cdot, \cdot)}$ は $\mathcal{F}_\xi$ の再生核である. 特に

$$\int_{M_\xi} e^{Q_\xi(u, u_2)} \overline{e^{Q_\xi(u, u_1)}} e^{-Q_\xi(u, u)} dm_\xi([u]_\xi) = e^{Q_\xi(u_1, u_2)} \quad (u_1, u_2 \in W). \quad (11)$$

群 H の元 t に対し W 上の函数 φ の t による translation を $S_t\varphi$ とかく. すなわち $S_t\varphi(u) := \varphi(t^{-1} \cdot u)$ ($u \in W$) とする.

補題 6. 元 $t \in H$ に対し S_t は $\mathcal{F}_\xi$ から $\mathcal{F}_{t \cdot \xi}$ への Hilbert 空間としての同型を引き起こす. すなわち $\phi \in \mathcal{F}_\xi$ について $S_t\phi \in \mathcal{F}_{t \cdot \xi}$ かつ $\|S_t\phi\|_{t \cdot \xi} = \|\phi\|_\xi$ となる. さらに $t' \cdot \xi = t \cdot \xi$ となる $t' \in H$ については $S_t\phi = S_{t'}\phi$ であり, 特に $t \cdot \xi = \xi$ (すなわち $t \in H_\xi$) の場合は $S_t\phi = \phi$ となる.

空間 $\mathcal{F}_\xi$ 上に群 $N(Q)$ の unitary 表現 τ_ξ を次のように定義する:

$$\tau_\xi(n(x_0, u_0))\phi(u) := e^{-i\langle x_0, \xi \rangle - Q_\xi(u, u_0) + Q_\xi(u_0, u_0)/2} \phi(u - u_0) \quad (12)$$

$$(\phi \in \mathcal{F}_\xi, n(x_0, u_0) \in N(Q), t_0 \in H).$$

この表現は既約であり, 中心元 $n(x, 0)$ ($x \in V$) の作用は $e^{-i\langle x, \xi \rangle}$ というスカラー倍の作用なので, $\xi \neq \xi'$ のとき $N(Q)$ の表現 $(\tau_\xi, \mathcal{F}_\xi)$ と $(\tau_{\xi'}, \mathcal{F}_{\xi'})$ は同値でない. しかし次の補題が成立する.

補題 7. 函数空間 $\mathcal{F}_\xi$ 上の作用素の関係式として, 次が成り立つ:

$$\tau_\xi(n(x, u)) = S_{t^{-1}} \circ \tau_{t \cdot \xi}(n(t \cdot x, t \cdot u)) \circ S_t \quad (t \in H, n(x, u) \in N(Q)).$$

群 $N(Q)$ の表現 τ_ξ は $\tau_\xi(n(x, u)t) := \tau_\xi(n(x, u))$ ($n(x, u) \in N(Q), t \in H_\xi$) とすることにより群 $N(Q) \rtimes H_\xi$ の表現に拡張できることが補題 6 と補題 7 からわかる.

パラメーター $s \in \mathbb{C}^r$ が $\mathfrak{R}s^* := (\mathfrak{R}s_r, \dots, \mathfrak{R}s_1) \in \mathfrak{X}(\varepsilon)$ をみたすとき, 定理 4 により $\mathcal{R}_{\mathfrak{R}s^*}^*$ は $\mathcal{O}_\varepsilon^*$ 上の測度で (9) より

$$d\mathcal{R}_{\mathfrak{R}s^*}^*(t \cdot \xi) = \chi_{-\mathfrak{R}s}(t) d\mathcal{R}_{\mathfrak{R}s^*}^*(\xi) \quad (t \in H, \xi \in \mathcal{O}_\varepsilon^*) \quad (13)$$

が成り立つ. この s に対し次の (i), (ii) をみたす $\mathcal{O}_\varepsilon^* \times W$ 上の可測函数 φ からなる空間を $\mathcal{L}_s(\mathcal{O}_\varepsilon^* \times W)$ とする:

- (i) $f(\xi, \cdot) \in \mathcal{F}_\xi$ (a.a. $\xi \in \mathcal{O}_\varepsilon^*$),
- (ii) $\|f\|_{\mathcal{L}_s}^2 := \int_{\mathcal{O}_\varepsilon^*} \|f(\xi, \cdot)\|_\xi^2 d\mathcal{R}_{\mathfrak{R}s^*}^*(\xi) < \infty$.

この $\mathcal{L}_s(\mathcal{O}_\varepsilon^* \times W)$ は $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_s}$ に関して Hilbert 空間であり, $\mathcal{F}_\xi$ ($\xi \in \mathcal{O}_\varepsilon^*$) の直積分 $\int_{\mathcal{O}_\varepsilon^*}^\oplus \mathcal{F}_\xi d\mathcal{R}_{\mathfrak{R}_s^*}(\xi)$ とみなせる. 空間 $\mathcal{L}_s(\mathcal{O}_\varepsilon^* \times W)$ 上に G の表現 $\tilde{\pi}_s$ を

$$\tilde{\pi}_s(t_0)f(\xi, u) := \chi_{\bar{s}/2}(t_0)f(t_0^{-1} \cdot \xi, t_0^{-1} \cdot u) \quad (t_0 \in H), \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}_s(n(x_0, u_0))f(\xi, u) &:= e^{-i\langle x_0, \xi \rangle + Q_\xi(u, u_0) - Q_\xi(u_0, u_0)/2} f(\xi, u - u_0) \\ &\quad (n(x_0, u_0) \in N(Q)), \end{aligned} \quad (15)$$

と定義する. ただし $f \in \mathcal{L}_s(\mathcal{O}_\varepsilon^* \times W)$ で $\bar{s} := (\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_r)$ とする. この (14) と (15) はそれぞれ次のように書き直せる:

$$\tilde{\pi}_s(t_0)f(\xi, \cdot) := \chi_{\bar{s}/2}(t_0)S_{t_0}f(t_0^{-1} \cdot \xi, \cdot), \quad (16)$$

$$\tilde{\pi}_s(n(x_0, u_0))f(\xi, \cdot) := \tau_\xi(n(x_0, u_0))f(\xi, \cdot). \quad (17)$$

この表示と補題 7 から, 実際に $\tilde{\pi}_s$ は G の表現になっていることがわかる. しかも補題 6 と (13) から $(\tilde{\pi}_s, \mathcal{L}_s(\mathcal{O}_\varepsilon^* \times W))$ は unitary 表現であるが, さらに次の命題が成り立つ.

命題 8. もし $\mathfrak{R}_s^* \in \mathfrak{X}(\varepsilon)$ ならば, G の unitary 表現 $(\tilde{\pi}_s, \mathcal{L}_s(\mathcal{O}_\varepsilon^* \times W))$ は誘導表現 $\text{Ind}_{N(Q) \rtimes H_{E_\varepsilon}^*}^G \tau_{E_\varepsilon^*} \otimes \chi_{-i\mathfrak{S}_s/2}$ と同値である.

§5. D 上の正則函数からなる空間に実現される G の表現.

領域 $D = D(\Omega, Q)$ 上の全ての正則函数からなる空間を $\mathcal{H}(D)$ とし, $s \in \mathbb{C}$ について G の表現 π_s を

$$\pi_s(g)F(z, u) := \chi_{-s/2}(g)F(g^{-1} \cdot (z, u)) \quad (g \in G, F \in \mathcal{H}(D), (z, u) \in D)$$

と定義する. 函数空間 $\mathcal{H}(D)$ の trivial でない 部分空間で次の (i), (ii) をみたすものを $\mathcal{H}_s(D)$ とする:

(i) $\mathcal{H}_s(D)$ は Hilbert 空間の構造をもち再生核 K^s が存在する,

(ii) $(\pi_s, \mathcal{H}_s(D))$ は G の unitary 表現である.

§1 でも述べたように, このような $\mathcal{H}_s(D)$ は必ずしも全ての $s \in \mathbb{C}$ について存在するとは限らない. もし $\mathcal{H}_s(D)$ が存在すれば Kunze [7] から表現 $(\pi_s, \mathcal{H}_s(D))$ は既約である. 以後 $K^s(\cdot, p) \in \mathcal{H}_s(D)$ ($p \in D$) を K_p^s とかく. 再生核の定義から $p, p' \in D$ に対し $K^s(p, p') = K_{p'}^s(p) = (K_{p'}^s | K_p^s)_{\mathcal{H}_s}$ である.

命題 9. もし $\mathcal{H}_s(D)$ が存在し, その norm が $\|K_{(iE,0)}^s\|^2 = 2^{-|\Re s|}$ となるように normalize されているならば, 再生核 K^s は次のように与えられる:

$$K^s((z, u), (z', u')) = \Delta_{-\Re s}((z - \bar{z}')/i - 2Q(u, u')) \quad ((z, u), (z', u') \in D). \quad (18)$$

ただし $\Delta_{-\Re s}$ は命題 3 (ii) によって $\Omega + iV$ 上に解析接続したものである.

証明. 表現 π_s の定義から $f \in \mathcal{H}_s(D)$, $p \in D$ と $g \in G$ について

$$\pi_s(g)f(g \cdot p) = \chi_{-s/2}(g)f(p) = (f|\overline{\chi_{-s/2}(g)}K_p^s).$$

一方 π_s は unitary 表現だから

$$\pi_s(g)f(g \cdot p) = (\pi_s(g)f|K_{g \cdot p}^s) = (f|\pi_s(g^{-1})K_{g \cdot p}^s).$$

これらから $\overline{\chi_{-s/2}(g)}K_p^s(p) = \pi_s(g^{-1})K_{g \cdot p}^s(p)$, すなわち

$$\begin{aligned} \overline{\chi_{-s/2}(g)}K^s(p, p) &= \chi_{-s/2}(g^{-1})K^s(g \cdot p, g \cdot p), \\ \therefore K^s(g \cdot p, g \cdot p) &= \chi_{-\Re s}(g)K^s(p, p). \end{aligned} \quad (19)$$

さて $(z, u) \in D$ について $\Im z - Q(u, u) = t \cdot E$ となる $t \in H$ をとり $g := n(\Re z, u)t$ とおくと (3) から $g \cdot (iE, 0) = (z, u)$. よって (19) 及び (4), (5) から

$$\begin{aligned} K^s((z, u), (z, u)) &= \chi_{-\Re s}(g)K^s((iE, 0), (iE, 0)) = \chi_{-\Re s}(t)\|K_{(iE,0)}^s\|^2 \\ &= \Delta_{-\Re s}(\Im z - Q(u, u))2^{-|\Re s|} \\ &= \Delta_{-\Re s}((z - \bar{z})/i - 2Q(u, u)). \end{aligned} \quad (20)$$

ここで K^s は正則関数からなる空間の再生核なので, 第一変数に関しては正則, 第二変数に関しては反正則である. ゆえに (18) は (20) の解析接続として得られる. $\square$

一般に再生核をもつ Hilbert 空間は, その再生核から再構成できる. したがってもし $\mathcal{H}_s(D)$ が存在すれば, それは一意的に定まることが命題 9 からわかる.

錐 Ω 上の函数 ψ が正型函数であるとは, 任意の $N \in \mathbb{N}$ と $y_1, \dots, y_N \in \Omega$, $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{C}$ について $\sum_{k,l=1}^N a_k \bar{a}_l \psi(y_k + y_l) \geq 0$ が成り立つことをいう. 正型函数については次の補題が成り立つ.

補題 10. 錐 Ω 上の連続函数 ψ が正型函数である必要十分条件は

$$\psi(y) = \int_{V^*} e^{-\langle y, \xi \rangle} d\nu(\xi) \quad (y \in \Omega)$$

となるような V^* 上の測度 ν が存在することである.

定理 11. (i) Hilbert 空間 $\mathcal{H}_s(D) \neq 0$ が存在する必要十分条件は $\Re s^*$ が $\bigsqcup_{\varepsilon \in \{0,1\}^r} \mathfrak{X}(\varepsilon)$ に属することである.

(ii) $\Re s^* \in \mathfrak{X}(\varepsilon)$ のとき積分変換 $\Phi_s : \mathcal{L}_s(\mathcal{O}_\varepsilon^* \times W) \rightarrow \mathcal{H}(D)$ を

$$\Phi_s f(z, u) := \int_{\mathcal{O}_\varepsilon^*} e^{i\langle z, \xi \rangle} f(\xi, u) d\mathcal{R}_{\Re s^*}^*(\xi) \quad (f \in \mathcal{L}_s(\mathcal{O}_\varepsilon^* \times W)) \quad (21)$$

と定義すると, $\mathcal{H}_s(D)$ は $\mathcal{L}_s(\mathcal{O}_\varepsilon^* \times W)$ の Φ_s による像 $\Phi_s(\mathcal{L}_s(\mathcal{O}_\varepsilon^* \times W)) \subset \mathcal{H}(D)$ に、内積を

$$(\Phi_s f | \Phi_s h)_\mathcal{H} := (f | h)_{\mathcal{L}_s} \quad (f, h \in \mathcal{L}_s(\mathcal{O}_\varepsilon^* \times W)) \quad (22)$$

と定義して得られる Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ に一致する.

(iii) $\Re s^* \in \mathfrak{X}(\varepsilon)$ のとき Φ_s は $(\pi_s, \mathcal{L}_s(\mathcal{O}_\varepsilon^* \times W))$ と $(\pi_s, \mathcal{H}_s(D))$ の間の intertwining 作用素である.

証明. 命題 9 から

$$\Delta_{-\Re s}(y + y') = K^*((iy, 0), (iy', 0)) = (K_{(iy', 0)}^* | K_{(iy, 0)}^*)_{\mathcal{H}_s} \quad (y, y' \in \Omega).$$

これから, 任意の $N \in \mathbb{N}$ と $y_k \in \Omega$, $a_k \in \mathbb{C}$ ($k = 1, \dots, N$) に対し

$$\begin{aligned} \sum_{k, l=1}^N a_k \bar{a}_l \Delta_{-\Re s}(y_k + y_l) &= \sum_{k, l=1}^N a_k \bar{a}_l (K_{(iy_k, 0)}^* | K_{(iy_l, 0)}^*)_{\mathcal{H}_s} \\ &= \left\| \sum_{k=1}^N a_k K_{(iy_k, 0)}^* \right\|_{\mathcal{H}_s}^2 \geq 0. \end{aligned}$$

すなわち $\Delta_{-\Re s}$ は正型関数である. 一方, 命題 3 (i) から

$$\Delta_{-\Re s}(y) = \langle \mathcal{R}_{\Re s^*}^*, e^{-\langle y, \xi \rangle} \rangle_\xi.$$

よって補題 10 から $\mathcal{R}_{\Re s^*}^*$ は正の測度で, したがって定理 4 から $\Re s^* \in \bigsqcup_{\varepsilon \in \{0,1\}^r} \mathfrak{X}(\varepsilon)$. 逆に $\Re s^* \in \mathfrak{X}(\varepsilon)$ とする. このとき (ii) の主張の中で定義された $\mathcal{H}$ が $\mathcal{H}_s(D)$ の定義の諸条件をみたすことを証明すれば, 先に述べた $\mathcal{H}_s(D)$ の一意性から (i) 及び (ii) が示されたことになる. ここで Fourier-Laplace 変換の一意性より Φ_s は単射であるから, (22) での $(\cdot | \cdot)_\mathcal{H}$ の定義は正当なものであることに注意する. なお $\mathcal{H}$ が $\mathcal{H}(D)$ の部分空間であることの証明は省略する. 領域 D の点 (z_0, u_0) について

$$k_{(z_0, u_0)}(\xi, u) := e^{-i\langle z_0, \xi \rangle + Q_\xi(u, u_0)} \quad (\xi \in \mathcal{O}_\varepsilon^*, u \in W)$$

とすると $k_{(z_0, u_0)}(\xi, \cdot) \in \mathcal{F}_\xi$ ($\xi \in \mathcal{O}_\varepsilon^*$) であり, (11) と 命題 3 (i) から

$$\begin{aligned} \|k_{(z_0, u_0)}\|_{\mathcal{L}_s}^2 &= \int_{\mathcal{O}_\varepsilon^*} \|k_{(z_0, u_0)}(\xi, \cdot)\|_\xi^2 d\mathcal{R}_{\mathfrak{R}_s}^*(\xi) \\ &= \int_{\mathcal{O}_\varepsilon^*} e^{i\langle z_0 - \bar{z}_0, \xi \rangle} e^{Q_\xi(u_0, u_0)} d\mathcal{R}_{\mathfrak{R}_s}^*(\xi) \\ &= \int_{\mathcal{O}_\varepsilon^*} e^{-2\langle \Im z_0 - Q(u_0, u_0), \xi \rangle} d\mathcal{R}_{\mathfrak{R}_s}^*(\xi) \\ &= \Delta_{-\mathfrak{R}_s}((z_0 - \bar{z}_0)/i - 2Q(u_0, u_0)) < \infty. \end{aligned}$$

よって $k_{(z_0, u_0)} \in \mathcal{L}_s(\mathcal{O}_\varepsilon^* \times W)$. 空間 $\mathcal{H}$ の元 $F = \Phi_s f$ ($f \in \mathcal{L}_s(\mathcal{O}_\varepsilon^* \times W)$) をとる. 函数空間 $\mathcal{L}_s(\mathcal{O}_\varepsilon^* \times W)$ の定義により, 殆んど全ての $\xi \in \mathcal{O}_\varepsilon^*$ について $f(\xi, \cdot) \in \mathcal{F}_\xi$ である. よって (21) と補題 5 及び Fubini の定理から

$$\begin{aligned} F(z_0, u_0) &= \int_{\mathcal{O}_\varepsilon^*} e^{i\langle z_0, \xi \rangle} \left\{ \int_{M_\xi} f(\xi, u) \overline{e^{Q_\xi(u, u_0)}} e^{-Q_\xi(u, u)} dm_\xi([u]_\xi) \right\} d\mathcal{R}_{\mathfrak{R}_s}^*(\xi) \\ &= \int_{\mathcal{O}_\varepsilon^*} \int_{M_\xi} f(\xi, u) \overline{e^{i\langle \bar{z}_0, \xi \rangle} e^{Q_\xi(u, u_0)}} e^{-Q_\xi(u, u)} dm_\xi([u]_\xi) d\mathcal{R}_{\mathfrak{R}_s}^*(\xi) \\ &= (f|k_{(z_0, u_0)})_{\mathcal{L}_s} \end{aligned} \quad (23)$$

ここで最後の式は $(\cdot|\cdot)_\mathcal{H}$ の定義から $(F|\Phi_s k_{(z_0, u_0)})_\mathcal{H}$ と等しく, このことは $\mathcal{H}$ が再生核をもつことを意味する. 次に $\pi_s(g_0)$ ($g_0 \in G$) が $\mathcal{H}$ を保存し $(\pi_s, \mathcal{H})$ が G の unitary 表現であることを示すが, $(\tilde{\pi}_s, \mathcal{L}_s(\mathcal{O}_\varepsilon^* \times W))$ が unitary 表現であるから, 結局 $\pi_s(g_0) \circ \Phi_s = \Phi_s \circ \tilde{\pi}_s(g_0)$ を証明すればよい (同時に (iii) も示される). はじめに $g_0 = t_0 \in H$ の場合を考えると (3) と (21) より

$$\begin{aligned} \pi_s(t_0)F(z, u) &= \chi_{-s/2}(t_0) \int_{\mathcal{O}_\varepsilon^*} e^{i\langle t_0^{-1} \cdot z, \xi \rangle} f(\xi, t_0^{-1} \cdot u) d\mathcal{R}_{\mathfrak{R}_s}^*(\xi) \\ &= \chi_{-s/2}(t_0) \int_{\mathcal{O}_\varepsilon^*} e^{i\langle z, \xi' \rangle} f(t_0^{-1} \cdot \xi', t_0^{-1} \cdot u) d\mathcal{R}_{\mathfrak{R}_s}^*(t_0^{-1} \cdot \xi'). \end{aligned}$$

この式と (13) 及び (14) から $\pi_s(t_0)F = \Phi_s \tilde{\pi}_s(t_0)f$ を得る. 次に $g_0 = n(x_0, u_0) \in N(Q)$ の場合, (3) と (21) から

$$\begin{aligned} \pi_s(n(x_0, u_0))F(z, u) &= \int_{\mathcal{O}_\varepsilon^*} e^{i\langle z - x_0 - 2iQ(u, u_0) + iQ(u_0, u_0), \xi \rangle} f(\xi, u - u_0) d\mathcal{R}_{\mathfrak{R}_s}^*(\xi) \\ &= \int_{\mathcal{O}_\varepsilon^*} e^{i\langle z, \xi \rangle} e^{-i\langle x_0, \xi \rangle + Q_\xi(u, u_0) - Q_\xi(u_0, u_0)/2} f(\xi, u - u_0) d\mathcal{R}_{\mathfrak{R}_s}^*(\xi). \end{aligned}$$

最後の式と (15) を比べると $\pi_s(n(x_0, u_0))F = \Phi_s \tilde{\pi}_s(n(x_0, u_0))f$ がわかり, 証明は完了する. $\square$

§6. Orbit method と π_g の表現の分類.

我々が考察している群 G は分裂型可解 Lie 群なので, その既約 unitary 表現の同値類の分類は orbit method とよばれる一般論により為される. はじめにこの理論の概要を説明する. Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の双対ベクトル空間 $\mathfrak{g}^*$ の元 η に対し $\mathfrak{g}$ 上の交代形式 Λ_η を $\Lambda_\eta(Y, Y') := \langle [Y, Y'], \eta \rangle$ ($Y, Y' \in \mathfrak{g}$) によって定義する. 部分代数 $\mathfrak{r} \subset \mathfrak{g}$ が η における real polarization であるとは次の (i), (ii) をみたすことをいう:

$$(i) \dim \mathfrak{r} = (\dim \mathfrak{g} + \dim \text{Ker } \Lambda_\eta)/2,$$

$$(ii) \Lambda_\eta(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}) = 0.$$

条件 (ii) から $\nu_\eta(\exp Y) := e^{i\langle Y, \eta \rangle}$ ($Y \in \mathfrak{r}$) で定まる函数は $\exp \mathfrak{r}$ の 1 次元表現である. 誘導表現 $\text{Ind}_{\exp \mathfrak{r}}^G \nu_\eta$ を $\rho_{\eta, \mathfrak{r}}$ とする. この $\rho_{\eta, \mathfrak{r}}$ が既約である必要十分条件は Pukanszky 条件 $\eta + \mathfrak{r}^\perp \subset \text{Ad}^*(G)\eta$ が満されることである. 任意の $\eta \in \mathfrak{g}^*$ に対して η における real polarization $\mathfrak{r}$ で Pukanszky 条件を満すようなものが必ず存在し, しかも $\rho_{\eta, \mathfrak{r}}$ の同値類はそのような $\mathfrak{r}$ の選び方に依らない. そこで η について定まるこの既約 unitary 表現 (の同値類) を ρ_η とかく. すると任意の G の既約 unitary 表現 π について π と ρ_η が同値になるような η が必ず存在する. 一方, 2 つの $\eta, \eta' \in \mathfrak{g}^*$ について ρ_η と $\rho_{\eta'}$ が同値となる必要十分条件は η と η' が同一の coadjoint orbit に含まれることである. 以上の議論により軌道空間 $\text{Ad}^*(G) \backslash \mathfrak{g}^*$ と G の unitary dual $\hat{G}$ との間に一対一の対応が得られるが, この対応は Kirillov-Bernat 対応とよばれている. さて $\mathfrak{a} = \sum_{k=1}^r \mathbb{R} A_k$ が $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ の補空間であることに注意し, $\mathbb{R}^r$ の元 $(\zeta_1, \dots, \zeta_r)$ と

$$\left\langle \sum_{k=1}^r c_k A_k + Y, \zeta \right\rangle := \sum_{k=1}^r \zeta_k c_k \quad (c_1, \dots, c_r \in \mathbb{R}, Y \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}])$$

で定まる $\mathfrak{g}^*$ の元 ζ を同一視する. このとき $\Lambda_\zeta(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = \langle [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \zeta \rangle = 0$ だから $\mathfrak{g}$ そのものが $\zeta \in \mathfrak{g}^*$ における real polarization であり, 対応する表現は 1 次元表現 $\chi_{i\zeta}$ に他ならない.

次に $-E_\varepsilon^* + \zeta \in \mathfrak{g}^*$ ($\varepsilon \in \{0, 1\}^r$) という形の元における real polarization について考察する. 商空間 $M_{E_\varepsilon} = W/N_{E_\varepsilon}$ の Hermite 形式 Q_{E_ε} に関する正規直交基底 $\{[U_1^\varepsilon]_{E_\varepsilon}, \dots, [U_d^\varepsilon]_{E_\varepsilon}\}$ ($d := \dim_{\mathbb{C}} M_{E_\varepsilon}$) を一つ固定し,

$$\mathfrak{r}_\varepsilon := V \oplus \sum_{i=1}^d {}^\oplus \mathbb{R} U_i^\varepsilon \oplus N_{E_\varepsilon} \oplus \mathfrak{h}_{E_\varepsilon}$$

とする.

命題 12. (i) $\mathfrak{r}_\varepsilon$ は $-E_\varepsilon^* + \zeta$ における real polarization である.

(ii) $-E_\varepsilon^* + \zeta$ を通る $\mathfrak{g}^*$ の中の coadjoint orbit は次のように記述される：

$$\mathrm{Ad}^*(G)(-E_\varepsilon^* + \zeta) = \bigsqcup_{\xi \in \mathcal{O}_\varepsilon^*} (-\xi + \zeta + (V \oplus N_\xi \oplus \mathfrak{h}_\xi)^\perp). \quad (24)$$

特に $\mathfrak{r}_\varepsilon$ は Pukanszky 条件をみたす。

命題 12 (ii) において $\varepsilon = (1, \dots, 1)$ の場合を考える。軌道 $\mathcal{O}_{(1, \dots, 1)}^* = \Omega^*$ の元 ξ については $N_\xi = \{0\}$, $\mathfrak{h}_\xi = \{0\}$ より $(V \oplus N_\xi \oplus \mathfrak{h}_\xi)^\perp = \{\eta \in \mathfrak{g}^* \mid \eta|_V = 0\}$ 。よって (24) から

$$\mathrm{Ad}^*(G)(-E^* + \zeta) = \bigsqcup_{\xi \in \Omega^*} \{\eta \in \mathfrak{g}^* \mid \eta|_V = -\xi\} = \{\eta \in \mathfrak{g}^* \mid \eta|_V \in -\Omega^*\}.$$

この coadjoint orbit は $\mathfrak{g}^*$ の中で open である (ζ に依らないことにも注意)。一方 $\varepsilon = (0, \dots, 0)$ の場合, $-E_{(0, \dots, 0)}^* + \zeta = \zeta$ を通る coadjoint orbit は 1 点集合 $\{\zeta\}$ である。

それぞれの $\varepsilon \in \{0, 1\}^r$ について $Z(\varepsilon) := \{\zeta \mid \zeta_i = 0 \text{ for all } i \text{ such that } \varepsilon_i = 1\}$ とし, $\varepsilon \in \{0, 1\}^r$ と $\zeta \in Z(\varepsilon)$ に対してパラメーター $s \in \mathbb{C}^r$ の集合 $\Theta(\varepsilon, \zeta)$ を

$$\Theta(\varepsilon, \zeta) := \left\{ s \in \mathbb{C}^r \mid \begin{cases} \Re s_k > q_k(\varepsilon)/2 & (\text{if } \varepsilon_k = 1) \\ s_k = q_k(\varepsilon)/2 - 2i\zeta_k & (\text{if } \varepsilon_k = 0) \end{cases} \right\} \quad (25)$$

と定める。この $\Theta(\varepsilon, \zeta)$ の定義式と定理 11 (i) 及び (10) より, $s \in \Theta(\varepsilon, \zeta)$ ならば $\mathcal{H}_s(D)$ が存在することがわかる。また $\varepsilon = (1, \dots, 1)$ ならば $Z(\varepsilon) = \{0\}$ であることも注意しておく。

定理 13. (i) もし $s \in \Theta(\varepsilon, \zeta)$ ならば, G の既約 unitary 表現 $(\pi_s, \mathcal{H}_s(D))$ は Kirillov-Bernat 対応により $-E_\varepsilon^* + \zeta$ を通る coadjoint orbit に対応する。

(ii) 2つの G の表現 $(\pi_s, \mathcal{H}_s(D))$ と $(\pi_{s'}, \mathcal{H}_{s'}(D))$ が同値である必要十分条件は s と s' が同一の $\Theta(\varepsilon, \zeta)$ に属することである。

定義式 (25) と (10) 及び 定理 2 (i) を比べることにより, s が $\Theta(\varepsilon, \zeta)$ に属することは $\Re s^* \in \mathfrak{X}(\varepsilon)$ かつ $\chi_{i\zeta}|_{H_{E_\varepsilon^*}} = \chi_{-i\Im s/2}|_{H_{E_\varepsilon^*}}$ であることと同値であることがわかる。したがって命題 8 と定理 11 (iii) から, 定理 13 (i) の証明は

$$\mathrm{Ind}_{N(Q) \rtimes H_{E_\varepsilon^*}}^G \tau_{E_\varepsilon^*} \otimes \chi_{i\zeta} \simeq \mathrm{Ind}_{\exp \mathfrak{r}_\varepsilon}^G \nu_{-E_\varepsilon^* + \zeta}$$

を示すことに帰着する。一方, 命題 12 (ii) から coadjoint orbit $\mathrm{Ad}^*(G)(-E_\varepsilon^* + \zeta)$ (ただし $\zeta \in Z(\varepsilon)$) は異なる ε, ζ に対しては互いに disjoint であることがわかり, よって定理 13 (ii) は同定理 (i) と orbit method の一般論から従う。

参考文献

- [1] B. Bargmann, On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform I, *Comm. Pure Appl. Math.*, **14** (1961), 187–214.
- [2] J. -L. Clerc, Laplace transform and unitary highest weight modules, *J. Lie Theory*, **5** (1995), no.2 225–240.
- [3] J. Faraut and A. Korányi, *Analysis on symmetric cones*, Oxford Mathematical Monographs, Clarendon Press, Oxford, 1994.
- [4] S. G. Gindikin, Analysis in homogeneous domains, *Russian Math. Surveys*, **19** (1964), 1–89.
- [5] —, Invariant generalized functions in homogeneous domains, *Funct. Anal. Appl.*, **9** (1975), 50–52.
- [6] H. Ishi, Positive Riesz distributions on homogeneous cones, preprint, 1998.
- [7] R. A. Kunze, On the irreducibility of certain multiplier representations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **68** (1962), 93–94.
- [8] T. Nomura, Harmonic analysis on a nilpotent Lie group and representations of a solvable Lie group on $\bar{\partial}_b$ cohomology spaces, *Japan. J. Math.* **13** (1987), no.2 277–332.
- [9] I. I. Pyatetskii-Shapiro, *Automorphic functions and the geometry of classical domains*, Gordon and Breach, New York, 1969.
- [10] H. Rossi, Lectures on representations of groups of holomorphic transformations of Siegel domains, *Lecture Notes, Brandeis Univ.*, 1972.
- [11] H. Rossi and M. Vergne, Representations of certain solvable Lie groups on Hilbert spaces of holomorphic functions and the application to the holomorphic discrete series of a semisimple Lie group, *J. Funct. Anal.*, **13** (1973), 324–389.
- [12] M. Vergne and H. Rossi, Analytic continuation of the holomorphic discrete series of a semi-simple Lie group, *Acta Math.*, **136** (1976), 1–59.
- [13] N. Wallach, The analytic continuation of the discrete series, I, II, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **251** (1979), 1–17; *ibid.*, 19–37.