

$D_{\ell+1}^{(2)}$ 型 affine Lie 環と Schur の Q -函数

中島達洋 (Nakajima Tatsuhiko)
明海大学経済学部

1. Affine Lie 環 $D_{\ell+1}^{(2)}$ ($\ell \geq 2$) の基本表現 $L(\Lambda_0)$ は無限変数の多項式環 $V = \mathbb{C}[t_1, t_3, t_5, \dots]$ に実現されます. すなわち,

$$L(\Lambda_0) \cong \mathbb{C}[t_1, t_3, t_5, \dots].$$

このことは, いわゆる頂点作用素

$$\frac{1+\omega}{2(1-\omega)} \left[\exp \left(\sum_{\substack{n \geq 1 \\ \text{odd}}} (1-\omega^n) p^n t_n \right) \exp \left(-2 \sum_{\substack{n \geq 1 \\ \text{odd}}} (1-\omega^{-n}) p^{-n} \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial t_n} \right) - 1 \right]$$

(ω は 1 の原始 $2\ell+2$ 乗根) による構成として Kac-Kazhdan-Lepowsky-Wilson により見出されました [3].

ここでは, この表現のウェイト基底が Schur の Q -函数によって具体的に与えられ, ウェイトの特徴付けが strict partition の組合わせ論を用いて記述できるということについて述べたいと思います. なお, これは北大の山田裕史氏との共同研究に基づくものです.

2. Schur の Q -函数は以下のようにして定義される対称函数です.

m 次の巾和対称函数を p_m と書きます. まず, 次の母函数

$$Q(t) = \exp \sum_{\substack{n \geq 1 \\ \text{odd}}} \frac{2t^n}{n} p_n = \sum_{m \geq 0} Q_m t^m$$

から定まる対称函数 Q_m ($m \in \mathbb{N}$) を導入します. このとき 2 つの非負整数 $\lambda_1 > \lambda_2$ に対して

$$Q_{(\lambda_1, \lambda_2)} = Q_{\lambda_1} Q_{\lambda_2} + 2 \sum_{1 \leq i \leq \lambda_2} (-1)^i Q_{\lambda_1+i} Q_{\lambda_2-i}$$

と定めます. この $Q_{(\lambda_1, \lambda_2)}$ が index に対して反対称, つまり $Q_{(\lambda_1, \lambda_2)} = -Q_{(\lambda_2, \lambda_1)}$ となっていることは, 上記の母函数が $Q(t)Q(-t) = 1$ をみたすことからすぐにわかります.

ここで, Schur の Q -函数を定義します: strict partition $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ に対して

$$Q_\lambda = \begin{cases} \text{Pf}(Q_{(\lambda_r, \lambda_s)})_{1 \leq r, s \leq n} & n \text{ が偶数の場合} \\ \text{Pf}(Q_{(\lambda_r, \lambda_s)})_{1 \leq r, s \leq n+1} & n \text{ が奇数の場合 } (\lambda_{n+1} = 0). \end{cases}$$

ただし Pf は交代行列 $(Q_{(\lambda_r, \lambda_s)})$ の Pfaffian をとることを意味しています。
 こうして得られた Q -関数は

Q_λ (λ は strict な Young 図形) は $\mathbb{C}[p_1, p_3, p_5, \dots]$ の基底をなす。

ことが知られています。

また Schur 関数が対称群の通常表現の指標と関係していたのと同様な意味で、この Schur の Q -関数は対称群のスピン表現の指標と関係があります。 $\zeta^\lambda(\rho)$ (λ は strict) を対称群の既約スピン表現 λ の共役類 $\rho = (1^{m_1} 3^{m_3} 5^{m_5} \dots)$ 上での指標値とすると、

$$Q_\lambda = \sum_{\rho} 2^{[(\ell(\lambda) + \ell(\rho) + 1)/2]} z_{\rho}^{-1} \zeta^\lambda(\rho) p_{\rho}$$

と書けます。ここで $\ell(\lambda)$ は partition λ の長さであり、 $z_{\rho} = \prod_{r \geq 1} r^{m_r} m_r!$ です。

3. Neutral free fermion ϕ_n ($n \in \mathbb{Z}$) で生成される superalgebra $\mathbb{B} = \mathbb{B}_0 \oplus \mathbb{B}_1$, および $\mathbb{B}$ 上の supermodule $\mathcal{F} = \mathbb{B}|0\rangle = \mathcal{F}_0 \oplus \mathcal{F}_1$ を考えます。ただし、Neutral free fermion は関係式

$$\{\phi_m, \phi_n\} := \phi_m \phi_n + \phi_n \phi_m = (-1)^m \delta_{m+n, 0}, \quad \phi_0^2 = \frac{1}{2}$$

を満たし、真空 $|0\rangle$ は $\phi_n|0\rangle = 0$ ($n < 0$) で定義されるものとします。

いわゆる boson-fermion 対応により、 $\mathcal{F}_0$ が $V = \mathbb{C}[t_1, t_3, t_5, \dots]$ と同型となることがわかります。

$\mathbb{B}_0$ の部分空間 $B_{\infty} := \{\sum_{m, n \in \mathbb{Z}} c_{mn} \phi_m \phi_n; c_{mn} = 0 \text{ for } |m - n| \gg 0\}$ は無限次元 Lie 環 b_{∞} の構造を持ち、これによって V は b_{∞} -module となります。 $\phi(p) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi_n p^n$ としたとき、 $[\phi(p), \phi(q)]$ の V における作用は頂点作用素に翻訳されます。ここでパラメータ p, q の間に $p^r = q^r$ ($r = 2\ell + 2$) という reduction を行くと、この reduction は Lie 環の作用を b_{∞} から $D_{\ell+1}^{(2)}$ へ制限することに対応しています。その結果の頂点作用素が冒頭に記した Kac-Kazhdan-Lepowsky-Wilson のものになっているわけです。この制限のもとで V は既約にとどまり、最高ウェイトベクトル $1 \in V$ をもつ基本表現になります。

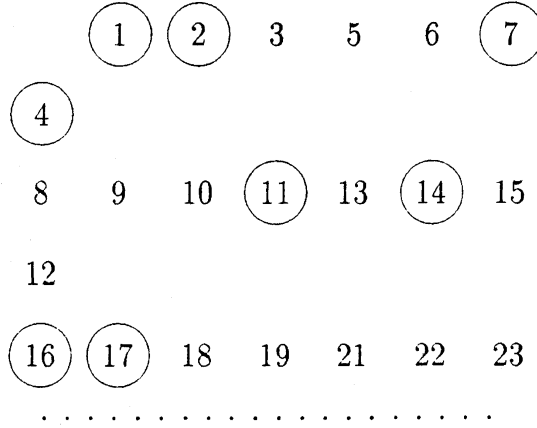
さて strict partition $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{2d})$ ($\lambda_1 > \dots > \lambda_{2d} \geq 0$) に対して

$$v_{\lambda} := \phi_{\lambda_1} \cdots \phi_{\lambda_{2d}} |0\rangle \in \mathcal{F}_0$$

とおくと、これは $D_{\ell+1}^{(2)}$ のウェイトベクトルであることがわかります。boson-fermion 対応により v_{λ} は Q -関数 $(1/2^d) Q_{\lambda}(t) \in V$ に移ります。ここで変数 $t = (t_1, t_3, t_5, \dots)$ は $t_j = 2p_j/j$ と読みかえられています。したがって次の命題が成り立ちます。

$\{Q_{\lambda}(t); \lambda \text{ は strict}\}$ は $D_{\ell+1}^{(2)}$ の基本表現のウェイト基底をなす。

次に、与えられた $Q_\lambda(t)$ のウエイトの特定を行います。そのためにまず下図のような $2\ell+2$ -abacus を考えます。例にあがっているのは $\ell=3$ の場合で、8-abacus となっています。そして、 λ の正の成分になっている数に $\bigcirc$ をつけて、それを石と呼ぶことにします。例では $\lambda = (17, 16, 14, 11, 7, 4, 2, 1)$ です。



与えられた Q -函数 $Q_\lambda(t)$ のウエイトを $\text{wt}(\lambda)$ とし、 $D_{\ell+1}^{(2)}$ の基本虚ルートを δ とします。このとき、 $\text{wt}(\lambda) + \delta$ に対応する strict partition は次のようにして得られます：

- (1) 最も左の列 ($\ell+1$ の列) の石を 1 段上にあげる。
- (2) $\ell+1$ の上にある石を取り去る。

また、 $\text{wt}(\lambda) + 2\delta$ に対応する strict partition は次のようにして得られます：

- (3) $\text{wt}(\lambda) + \delta$ を得る上述の操作を 2 度繰り返す。
- (4) $\ell+1$ 以外の列にある石 ($1, \dots, \ell, \ell+2, \dots, 2\ell+1$ の列のどれか) を 1 段上にあげる。
- (5) $1 \leq k \leq \ell$ に対して、 k と $2\ell+2-k$ の上に共に石がある場合、それらを同時に取り去る。

これ以上これらの操作をほどこせない状態は、すなわち $\text{wt}(\lambda) + \delta$ がもはやウエイトではないということなので、極大ウエイトベクトルに相当する partition を与えます。この partition は λ の bar-core と呼ばれます。上記例の λ から得られる極大ウエイトベクトルは $(3, 1)$ に対応する Q -函数となります。

さらに abacus を各列毎に読みかえることで各 $i = 0, 1, \dots, \ell, \ell+2, \dots, 2\ell+1$ に対して

$$\begin{aligned}\xi_\lambda^0 &= \{x \in \mathbb{N}; \lambda_k = (\ell+1)x + i \text{ for some } k\} \\ \xi_\lambda^i &= \{x \in \mathbb{N}; \lambda_k = 2(\ell+1)x + i \text{ for some } k\} \quad (i \neq 0)\end{aligned}$$

という数列を定義します。これらから partition の $(\ell+1)$ -組 $(\lambda^0, \dots, \lambda^\ell)$ が

$$\lambda^0 = \xi_\lambda^0, \quad \lambda^i = (\xi_\lambda^i | \xi_\lambda^{2\ell+2-i}) \quad (1 \leq i \leq \ell)$$

によって定まります. ここで $(\xi_\lambda^i | \xi_\lambda^{2\ell+2-i})$ は, $\xi_\lambda^i = \{x_1, \dots, x_{s+t}\}$, $\xi_\lambda^{2\ell+2-i} = \{y_1, \dots, y_t\}$ のとき

$$(\xi_\lambda^i | \xi_\lambda^{2\ell+2-i}) = (x_1 - (s-1), \dots, x_{s-1} - 1, x_s, (x_{s+1}, \dots, x_{s+t} : y_1, \dots, y_t))$$

で定義されます. ちなみに $(x_{s+1}, \dots, x_{s+t} : y_1, \dots, y_t)$ は partition の Frobenius による記法です. 仮に $|\xi_\lambda^i| < |\xi_\lambda^{2\ell+2-i}|$ のときは $(\xi_\lambda^{2\ell+2-i} | \xi_\lambda^i)$ の conjugate として定義します. この partition の $(\ell+1)$ -組を bar-quotient といいます.

こうした bar-core や bar-quotient といった道具は, もともと対称群のスピン・モジュラー表現論の中で登場したものです [1]. そして次の事実が知られています:

与えられた strict な Young 図形 に対し, bar-core および bar-quotient がただ一通りに決まる.

そしてこれらを使うことで, $Q_\lambda(t)$ のウエイトを次のように特定できます:

strict な Young 図形 λ の bar-core を λ^c , bar-quotient を $(\lambda^0, \dots, \lambda^\ell)$ とする. このときウエイトベクトル $Q_\lambda(t)$ のウエイトは $\text{wt}(\lambda^c) - n\delta$ と表される. ここに, $n = |\lambda^0| + 2 \sum_{1 \leq i \leq \ell} |\lambda^i|$ である.

Note. ここで出て来る bar というのは, strict partition の組合わせ論で現れるもので, 通常の partition を扱う際の hook の対応物です. そして abacus 上の石の移動はこの bar を抜いていくことに相当しています.

4. 先に述べた結果を $A_1^{(1)}$ の基本表現へ応用してみましょう. そのためにまず, 九大の脇本先生による次の定理を思い出しておきます.

e_i および f_i ($i = 0, 1, 2, 3$) を $D_4^{(2)}$ の Chevalley 生成元, h_i ($i = 0, 1, 2, 3$) をその simple coroots とする. また $\{\alpha_i$ ($i = 0, 1, 2, 3$), $\Lambda_0\}$ を $D_4^{(2)}$ の単純ルートとする. 今

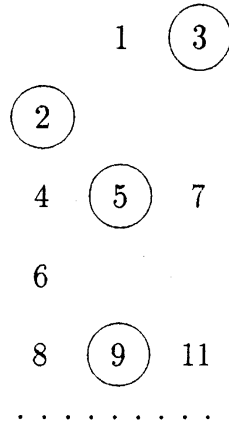
$$\begin{aligned} \tilde{e}_0 &= e_0 + e_3, & \tilde{e}_1 &= \sqrt{2}(e_1 + e_2), \\ \tilde{f}_0 &= f_0 + f_3, & \tilde{f}_1 &= \sqrt{2}(f_1 + f_2), \\ \tilde{h}_0 &= h_0 + h_3, & \tilde{h}_1 &= 2(h_1 + h_2). \end{aligned}$$

とおくと, $\tilde{e}_i$ および $\tilde{f}_i$ ($i = 0, 1$) は $A_1^{(1)}$ に同型な Lie subalgebra を生成する. さらに, $D_4^{(2)}$ の基本表現を subalgebra としての $A_1^{(1)}$ に制限したものは既約に留まり, $A_1^{(1)}$ の基本表現になる.

$A_1^{(1)}$ の基本表現になることは指標を計算することによってわかります. 同様のアイデアで, 一般に $D_{2^n}^{(2)} \hookrightarrow D_{2^{n+1}}^{(2)}$ という埋め込みを考えることができます. その意味でいうと, (象徴的に) $D_2^{(2)} \cong A_1^{(1)}$ と言えるわけです.

前に見たように, $D_4^{(2)}$ の基本表現は $V = \mathbb{C}[t_1, t_3, t_5, \dots]$ 上に実現されるので, V 上には $D_2^{(2)} \cong A_1^{(1)}$ の基本表現も実現されるわけです. そして, $D_2^{(2)}$ -ウェイト基底はやはり Schur の Q -函数によって与えられ, ウェイトの決定には “4-abacus” を使えば良いわけです.

例として, strict partition $\lambda = (9, 5, 3, 2)$ の 4-abacus を見てみます.



全節の内容の繰り返しになりますが, このとき $\text{wt}(\lambda) + \delta$ に対応する strict partition は次のようにして得られます:

- (1) 2 の列の石を 1 つ上にあげる.
- (2) 2 の上にある石を取り去る.

また, $\text{wt}(\lambda) + 2\delta$ に対応する strict partition は次のようにして得られます:

- (3) $\text{wt}(\lambda) + \delta$ を得る操作を繰り返す.
- (4) 1 および 3 の列にある石を 1 つ上にあげる.
- (5) 1 と 3 に石があればそれらを同時に取り去る.

以上の操作が手づまりとなったもの, つまり

$$\text{HC}^{(4)} = \{\emptyset, (4n+1, 4n-3, \dots, 5, 1), (4n+3, 4n-1, \dots, 7, 3) \quad (n \geq 0)\}$$

が極大ウェイトベクトルを与えるわけです.

最後に 4-reduced BKP hierarchy と KdV hierarchy の関係についてコメントしておきましょう. 4-reduced BKP hierarchy の頂点作用素において変数変換

$$\begin{cases} x_{8j+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} t_{8j+1}, & x_{8j+3} = -\frac{1}{\sqrt{2}} t_{8j+3}, \\ x_{8j+5} = -\frac{1}{\sqrt{2}} t_{8j+5}, & x_{8j+7} = \frac{1}{\sqrt{2}} t_{8j+7} \end{cases} \quad (j \geq 0)$$

および $k = (1-i)p/\sqrt{2}$ を行くと KdV hierarchy の頂点作用素が得られます [2].

さらに, これらの hierarchy の斉重多項式解全体は極大ウェイトベクトルに対応しています. 4-reduced BKP hierarchy では strict partition $\lambda \in \text{HC}^{(4)}$ で特徴付けられるわけですが, この $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ に対して

$$d(\lambda) = \left(\left\lfloor \frac{\lambda_1 + 1}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{\lambda_1}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{\lambda_2 + 1}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{\lambda_2}{2} \right\rfloor, \dots \right).$$

という操作 (“doubling” [1]) を施すと,

$$\{d(\lambda); \lambda \in \text{HC}^{(4)}\} = \{\Delta_r = (r, r-1, \dots, 2, 1, 0); r \geq 0\}$$

という階段型の partition を得ます. この partition に対応する Schur 函数 $S_{\Delta_r}(x)$ はまさに KdV hierarchy の斉重多項式解になっています [2]. 先の変数変換 と合わせて考えると, Q -函数と Schur 函数の間に

$$Q_\lambda(t)|_{t \rightarrow x} = \text{const.} \cdot S_{d(\lambda)}(x) \quad (\lambda \in \text{HC}^{(4)})$$

という関係があることがわかります. 我々はこの式中の constant は $2^{\ell(\lambda)/2}$ であると予想しています. しかし, 変数変換の持つ意味なども含めてまだよくわかっていません.

参考文献

- [1] C. Bessenrodt and J. B. Olsson, “The 2-blocks of the covering groups of the symmetric groups”, (1993) preprint.
- [2] E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara and T. Miwa, “Transformation groups for soliton equations”, in Nonlinear Integrable Systems—Classical Theory and Quantum Theory, ed. M. Jimbo and T. Miwa (World Scientific, 1983).
- [3] V. Kac, D. Kazhdan, J. Lepowsky and R. L. Wilson, “Realization of the basic representation of the Euclidean Lie algebras”, Adv. Math. **42** (1981) 83–112.
- [4] T. Nakajima and H.-F. Yamada, “Basic representations of $A_{2l}^{(2)}$ and $D_{l+1}^{(2)}$ and the polynomial solutions to the reduced BKP hierarchies”, J. Phys. A: Math. Gen. **27** (1994) L171–L176.
- [5] T. Nakajima and H.-F. Yamada “On reduced Q -functions” Hiroshima Mathematical Journal **27** (1997) 407–414