

パフィアンの和公式から導かれる SCHUR 関数の関係式

石川 雅雄

ここに、書くことの多くは、九州大学数理学研究科の若山正人氏との共同研究によって得られたものです。まず基本的な notation を定義する。 $\mathbb{N}$ を非負整数の集合とする。正整数 m に対して $[m]$ で集合 $\{1, 2, \dots, m\}$ を表す。正整数 n, N が $n \leq N$ を満たすとき任意の n 行 N 列行列 T と任意の $[N]$ の n -elements subset J に対して、 T から J の元を添字とする列を選び出して得られる n 次の正方行列を T_J と書く。すなわち、 $T = (T_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq N}$ のとき、 $T_J = (T_{ij})_{1 \leq i \leq n, j \in J}$ である。 n 次の正方行列 $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ が skew-symmetric であるとは $a_{ij} = -a_{ji}$ ($1 \leq i, j \leq n$) を満たすことである。

$n = 2m$ を偶数とし、 $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ が n 次の skew-symmetric 行列のとき、 A の Pfaffian $\text{pf}(A)$ は、

$$(1) \quad \text{pf}(A) = \sum_{\sigma \in S'_n} \text{sgn } \sigma \prod_{k=1}^m a_{\sigma(2k-1)\sigma(2k)}$$

によって定義される。ここで

$$S'_n = \{\sigma \in S_n : \sigma(2k-1) < \sigma(j) \text{ for } 1 \leq k \leq m, 2k \leq j \leq n\}.$$

である。 S'_n の元は、matching と呼ばれる図形で表わした方がわかりやすい。 x 軸上に点 $(k, 0)$ ($k = 1, \dots, n$) を取り、 $\sigma \in S'_n$ のとき、 $k = 1, \dots, m$ に対して、 $(\sigma(2k-1), 0)$ と $(\sigma(2k), 0)$ を上半平面の線で結ぶ。このとき、1つの交点を同時に3本の線が通らないようにする。このとき、交点数が偶数ならば、 $\text{sgn } \sigma = 1$ 、交点数が奇数ならば、 $\text{sgn } \sigma = -1$ となる。この図形を matching という。

partition $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ ($\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$) に対して $x_1, x_2, \dots, x_n$ を変数とする Schur 関数 (多項式) とは、

$$(2) \quad s_\lambda = s_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = \det(x_i^{\lambda_j + n - j}) / \det(x_i^{n - j}).$$

によって定義される。定義より、これは、変数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ についての対称関数である。

定理 1. [IW1] $n \leq N$ とし、 n は偶数とする。 $T = (t_{ik})$ を n 行 N 列の行列 $A = (a_{kl})$ を N 次の skew symmetric 行列とするとき、

$$(3) \quad \sum_{I \subset [N], \#I=n} \text{Pf}(A_I^I) \det(T_I) = \text{Pf}(TA^tT)$$

Typeset by $\mathcal{A}_M\mathcal{S}$ -TEX

ここで A_I^I は、 A から I の元を添字とする行と列を選び出して得られる A の n 次正方形部分行列である。さらに *skew-symmetric* 行列 TA^tT の (i, j) -成分は、具体的に

$$(TA^tT)_{ij} = \sum_{1 \leq k < l \leq N} a_{kl} \begin{vmatrix} T_{ik} & T_{il} \\ T_{jk} & T_{jl} \end{vmatrix}, \quad (1 \leq i, j \leq n).$$

によって与えられる。□

Remark. これが、我々がパフィアンの和公式と呼ぶものである。この定理の証明は、Lattice path method によって出来る。Lattice path method とは、上式の左辺を lattice path の母関数に、置き換え、その母関数を持つ組合せ論的对象（この場合は lattice path）の操作によって母関数の等式を証明する。具体的には、左辺の和の大部分が消し合うことを lattice path の間 involution を作ることによって、右辺になることを証明する。ここでは、この証明は、省略する。

これを Schur 関数の等式を導くために適用するには、行列 T として $T_{ij} = x_i^j$ ($i = 1, 2, \dots, n, j = 0, 1, 2, \dots$) を取る。すると、上のパフィアンの和公式は、

$$(4) \quad \sum_{\lambda} \text{pf}(A_{I(\lambda)}^{I(\lambda)}) s_{\lambda}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\prod_{i < j} (x_i - x_j)} \text{Pf} \left(\sum_{k, l} a_{kl} x_i^k x_j^l \right)_{i, j}$$

のようになる。ここで $A = (a_{kl})_{(k, l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ は、任意の skew symmetric 行列である。したがって、この skew symmetric 行列の取り方によって、理論的には、いろいろな Schur 関数の等式が出てくるはずであるが、実際に過去によく知られているのは、Littlewood の公式のタイプのもので、右辺が積の形になるものである。実際に、今回、扱うのも下のような Cauchy determinant によく似た形をした Pfaffian の公式の場合のみにする。

この公式を証明するのに、使われるのが、次の形の等式である。 n を偶数とするとき

$$(5) \quad \text{pf} \left(\frac{x_i - x_j}{1 - x_i x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n} = \frac{\Delta_n(x)}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (1 - x_i x_j)},$$

(see [IW1], [Ste]). ここで $\Delta_n(x) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)$ は、差積である。我々は、これを Cauchy Pfaffian と呼ぶ。それは、これが、行列式について、Cauchy determinant として、よく知られた公式

$$(6) \quad \det \left(\frac{1}{1 - x_i y_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n} = \frac{\Delta_n(x) \Delta_n(y)}{\prod_{1 \leq i, j \leq n} (1 - x_i y_j)}$$

のパフィアンバージョンであると考えられるからである。

(5) 式は、次の等式と同値である。

$$(7) \quad \text{pf} \left(\frac{x_i - x_j}{x_i + x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n} = \frac{\Delta_n(x)}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i + x_j)},$$

実際 (7) 式の x_i に、 $\frac{x_i+1}{x_i-1}$ を代入すると (5) 式が得られる。この等式を Hilbert Pfaffian と呼ぶ。それは、Hilbert 行列と呼ばれる次の等式と非常に形が似ているからである。(伊理正夫「線形代数 I」岩波講座応用数学)

$$(8) \quad \det \left(\frac{1}{x_i + y_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n} = \frac{\Delta_n(x) \Delta_n(y)}{\prod_{1 \leq i, j \leq n} (x_i + y_j)}$$

この等式は、上の Cauchy determinant と同値である。実際 (8) 式の y_j に $-1/y_j$ を代入すると (6) 式が得られる。

ここでは、(7) 式の組合わせ論的な証明を与える。その前にパフィアンの議論に馴れていない読者に分かり易くするために、(8) 式の組合わせ論的な証明を与えるが、議論は、ほとんど並行的に進められることを読者は発見するであろう。なお、この証明は、和歌山大学教育学部の田川裕之氏の協力の下に考えられた。(ただし、(5) 式の組合せ論的証明は、T.Sundquist 氏の Ph.D Thesis で、すでにやられているのかもしれない。)

(8) 式の証明. (8) 式の分母を払うと証明するべき式は

$$\prod_{1 \leq i, j \leq n} (x_i + y_j) \det \left(\frac{1}{x_i + y_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n} = \Delta_n(x) \Delta_n(y)$$

となる。 $D = [n] \times [n]$ とし、 $\sigma \in S_n$ に対して、 $\bar{\sigma} = \{(i, \sigma(i)); i = 1, \dots, n\}$ とする。すると、上の式は、

$$\sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn } \sigma \prod_{(i, j) \in D \setminus \bar{\sigma}} (x_i + y_j) = \Delta_n(x) \Delta_n(y)$$

となる。ここでは、左辺をさらに単項式にまで展開するため、次のように定義する。行列 $\pi = (\pi_{ij})_{(i, j) \in D}$ で

(1) π_{ij} は 1, X , Y のいずれか。

(2) 1 は、 π の各行各列に、ちょうど 1 個ずつある。

を満たすものの全体の集合を、 Π とする。 $\pi = (\pi_{ij})_{(i, j) \in D} \in \Pi$ に対して、 π_{ij} のうち、 X か Y に等しい成分をすべて 0 に置き換えて得られる行列を $\hat{\pi}$ と書き、 $\text{sgn } \pi = \det \hat{\pi}$ と定める。また、 π の第 i 行目の X の個数を $\alpha_i(\pi)$ 、第 j 列目の Y の個数を $\beta_j(\pi)$ とするとき π の weight を、 $w(\pi) = x^{\alpha(\pi)} y^{\beta(\pi)}$ によって定義する。ここで、 $x^{\alpha(\pi)} = \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i(\pi)}$ とする。すると、

$$\sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn } \sigma \prod_{(i, j) \in D \setminus \bar{\sigma}} (x_i + y_j) = \sum_{\pi \in \Pi} \text{sgn } \pi w(\pi)$$

となる。ここで、 $\pi \in \Pi$ の中で、weight $\alpha_i(\pi)$ ($i = 1, \dots, n$) がすべて異なり、かつ $\beta_j(\pi)$ ($j = 1, \dots, n$) もすべて異なるような元全体の集合を、 Π_0 とする。involution $\omega : \Pi \setminus \Pi_0 \rightarrow \Pi \setminus \Pi_0$ を次のように定義する。

$\pi \in \Pi \setminus \Pi_0$ に $\alpha_i(\pi)$ が等しい 2 つの行 i_1, i_2 が存在するならば、辞書式順序で最小になるそのような組 (i_1, i_2) を取って、 π の第 i_1 行と第 i_2 行を入れ替えたものを $\omega(\pi)$ とする。もし、存在しなければ、列について、辞書式順序で最小になるそのような列番号の組 (j_1, j_2) を取って、 π の第 j_1 列と第 j_2 列を入れ替えたものを $\omega(\pi)$ とする。

MINOR SUMMATION FORMULA

明らかに、 ω は involution であり、さらに、 $w(\omega(\pi)) = -w(\pi)$ が成り立つ。したがって、上の和は

$$\sum_{\pi \in \Pi_0} \text{sgn } \pi \, w(\pi)$$

となる。 $\pi \in \Pi_0$ に対しては、 $\{\alpha_1(\pi), \dots, \alpha_n(\pi)\} = \{\beta_1(\pi), \dots, \beta_n(\pi)\} = \{0, 1, \dots, n-1\}$ である。ここで、大事なことは、 $\{0, 1, \dots, n-1\}$ からなる数列 $(\alpha_1(\pi), \dots, \alpha_n(\pi))$ と $(\beta_1(\pi), \dots, \beta_n(\pi))$ を定めれば、 π は、一意的に定まることである。何故ならば、まず、 $\alpha_i(\pi) = n-1$ となる行 i と $\beta_j(\pi) = n-1$ となる列 j に対しては π の (i, j) -成分は必ず 1 でなければならず、第 i 行の他の成分はすべて X 、第 j 列の他の成分はすべて Y になる。何故なら、もし、第 i 行目の (i, j) -成分以外のところに 1 があるとすると、 (i, j) -成分は、 X でなければならず、第 j 列には、第 i 行以外に 1 があり、 Y の入る場所は、 $n-2$ 箇所しかないことになり、矛盾する。このことを、帰納的に $n-2, \dots, 0$ に対して繰り返していくことによって、 π は、一意的であることがわかる。よって、 $\pi_0 \in \Pi_0$ を (i, i) -成分がすべて 1 で、 $i < j$ のとき (i, j) -成分が X 、 $i > j$ のとき (i, j) -成分が Y であるような元とすると、すべての $\pi \in \Pi_0$ は、 π_0 から、行と列の置換によって得られる。 $\sigma, \tau \in S_n$ に対して、 π_0 の行に σ を、列に τ を作用させたものを $\pi_0^\sigma_\tau$ と書くことにすると、上の和は、

$$\sum_{\sigma, \tau \in S_n} \text{sgn } \sigma \text{sgn } \tau \, \pi_0^\sigma_\tau = \sum_{\sigma, \tau \in S_n} \text{sgn } \sigma \text{sgn } \tau \, x^{\sigma(\delta_n)} y^{\tau(\delta_n)}$$

となる。ここで、 $\delta_n = (n-1, \dots, 0)$ とし、 $l = (l_1, \dots, l_n)$ に対して $x^l = x_1^{l_1} \cdots x_n^{l_n}$ などと書く。Vandermonde の行列式より

$$\sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn } \sigma \, x^{\sigma(\delta_n)} = \Delta_n(x)$$

であるから、主張が証明された。□

(7) 式の証明. (7) 式の分母を払うと証明すべき式は

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i + x_j) \text{pf} \left(\frac{x_i - x_j}{x_i + x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n} = \Delta_n(x)$$

となる。 $D' = \{(i, j) \in D; i < j\}$ とし、 $\sigma \in S'_n$ に対して $\bar{\sigma} = \{(\sigma(2k-1), \sigma(2k)); k = 1, \dots, n/2\}$ とおく。すると、上の式は、

$$\sum_{\sigma \in S'_n} \text{sgn } \sigma \prod_{(i, j) \in \bar{\sigma}} (x_i - x_j) \prod_{(i, j) \in D \setminus \bar{\sigma}} (x_i + x_j) = \Delta_n(x)$$

となる。ここでは、左辺をさらに単項式にまで展開するために、 Π' を、次の条件をみたす行列 $\pi = (\pi_{ij})_{(i, j) \in D}$ の集合として定義する。

- (1) π の各成分は $\pm X'$, 0 , X のいずれかであり、 $\pm X'$ の部分だけを見れば skew-symmetric で、 $\pm X'$ のいずれかが、各行各列にちょうど 1 個ずつある。
- (2) それ以外の成分については、 (i, j) と (j, i) のどちらか一方のみが X で、他方は、 0 である。

MINOR SUMMATION FORMULA

このとき、 $\pi' \in \Pi'$ の元に対して、 π' の第 i 行にある X' または、 X の個数を $\alpha_i(\pi')$ で表し、 π' の weight を $w(\pi') = x^{\alpha(\pi')}$ とする。また、 π' の成分の X に 0 を、 X' に 1 を代入して得られる行列を $\hat{\pi}'$ と書き、 $\text{sgn } \pi' = \text{pf } \hat{\pi}'$ とする。このとき、上の和は、

$$\sum_{\pi' \in \Pi'} \text{sgn } \pi' w(\pi')$$

となる。ここで、weight $\alpha_i(\pi')$ ($i = 1, \dots, n$) がすべて異なるような元全体の集合を、 Π'_0 と置く。すると、involution $\omega: \Pi \setminus \Pi_0 \rightarrow \Pi \setminus \Pi_0$ が、前と同様に、次のように定義される。

$\pi \in \Pi \setminus \Pi_0$ に $\alpha_i(\pi)$ が等しい 2 つの行 i_1, i_2 が存在するならば、辞書式順序で最小になるそのような組 (i_1, i_2) を取って、 π の第 i_1 行と第 i_2 行を入れ替え、かつ同時に、第 i_1 列と第 i_2 列を入れ替えたものを $\omega(\pi)$ とする。

この involution によって $\Pi \setminus \Pi_0$ の元は、符号が反対になり、weight が変わらないことを見るのは、易しい。したがって $\Pi \setminus \Pi_0$ の元は、消し合い、上の和は

$$\sum_{\pi' \in \Pi'_0} \text{sgn } \pi' w(\pi')$$

となる。最後に、この和が差積になることを示す。まず、 $\pi' \in \Pi'_0$ のとき、 $\alpha_i(\pi')$ ($i = 1, \dots, n$) は、すべて異なるから、 $\sigma \in S_n$ が、ただ 1 つ存在して $\alpha(\pi') = \sigma(\delta_n)$ となる。ここで、 $\alpha(\pi') = \delta_n$ となるような $\pi' \in \Pi_0$ は S'_n の元と 1 対 1 に対応しており、全部で $(n-1)!!$ 個ある。よって $\tau \in S'_n$ に対して $\pi'_\tau = (\pi'_\tau(i, j))$ を

$$\pi'_\tau(i, j) = \begin{cases} X' & \text{if } (i, j) \in \bar{\tau}, \\ -X' & \text{if } (j, i) \in \bar{\tau}, \\ X & \text{if } (i, j) \in D' \setminus \bar{\tau}, \\ 0 & \text{if } (j, i) \in D' \setminus \bar{\tau} \text{ or } i = j \end{cases}$$

によって定義すると、すべての $\pi' \in \Pi_0$ は、ある $\tau \in S'_n$ と $\sigma \in S_n$ が存在して、 $\pi' = \pi'_\tau{}^\sigma$ と書ける。ここで $\pi'_\tau{}^\sigma$ は、 π'_τ に σ を行と列の両方に施して得られる行列である。したがって、上の和は、

$$\sum_{\sigma \in S_n} \sum_{\tau \in S'_n} \text{sgn } \sigma \text{sgn } \tau x^{\sigma(\delta_n)}$$

となる。ここで、 n 次正方 skew symmetric 行列 $S = S(i, j)$ を

$$S(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{if } 1 \leq i < j \leq n, \\ -1 & \text{if } 1 \leq j < i \leq n, \\ 0 & \text{if } i = j \end{cases}$$

と置くと

$$\sum_{\tau \in S'_n} \text{sgn } \tau = \text{pf}(S_n) = 1$$

であるから Vandermonde の行列式より、主張が成り立つ。□

ここでは、上の Cauchy Pfaffian から導かれる Schur 関数の関係式について考える。
 $k, \ell \in \mathbb{N}$ に対して係数 $\beta_{k\ell}^{r,s} = \beta_{k\ell}^{r,s}(a, b) = \beta_{k\ell}^{r,s}(a_1, \dots, a_r; b_1, \dots, b_s)$ を

$$\sum_{k, \ell=0}^{\infty} \beta_{k\ell}^{r,s} x^k y^\ell = \frac{\prod_{k=1}^s (1 + b_k x)(1 + b_k y)}{\prod_{k=1}^r (1 - a_k x)(1 - a_k y)} \frac{y - x}{1 - xy}$$

によって定義する。明らかに、 $\beta_{k\ell}^{r,s}(a, b)$ は、 $a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s$ について、それぞれ対称であり、 $\beta_{\ell k}^{r,s}(a, b) = -\beta_{k\ell}^{r,s}(a, b)$ を満たす。また、この $\beta_{k\ell}^{r,s}(a, b)$ を使って skew symmetric 行列 $B^{r,s}(a, b)$ を

$$B^{r,s} = B^{r,s}(a, b) = (\beta_{k\ell}^{r,s}(a; b))_{0 \leq k, 0 \leq \ell}$$

と定義する。このとき、

定義 1.

$$(10) \quad \varphi_{\lambda}^{r,s}(a; b) = \varphi_{\lambda}^{r,s}(a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s) = \text{pf}(B^{r,s}(a; b)_{J(\lambda)})$$

とおくと定理 1 と Cauchy Pfaffian から次の定理を得る。

定理 2.

$$(11) \quad \sum_{\lambda} \varphi_{\lambda}^{r,s}(a; b) s_{\lambda}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \frac{\prod_{k=1}^s (1 + b_k x_i)}{\prod_{l=1}^r (1 - a_l x_i)} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{1 - x_i x_j}$$

この定理は、定理 1 から一般的に出てくる定理であるが、ここで問題とされるのは、定義 1 では、Pfaffian によって定義された係数

$$\varphi_{\lambda}^{r,s}(a; b) = \varphi_{\lambda}^{r,s}(a_1, \dots, a_r; b_1, \dots, b_s)$$

のもっと具体的な組合せ論的記述である。九大の若山氏との共同研究により次のような結果が得られている。

定理 2.

$$\begin{aligned} \varphi_{\lambda}^{2,0}(a, b) &= a^{c(\lambda)} \prod_{k=1}^{\infty} [\lambda_k - \lambda_{k+1} + 1; a^{\varepsilon(k)} b], \\ \varphi_{\lambda}^{1,1}(a, b) &= a^{c(\lambda)} \prod_{k=1}^{\infty} \left\{ \lambda'_k - \lambda'_{k+1} + 1; a^{\varepsilon(\lambda'_k)}, b \right\}. \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} [n; q] &= \frac{1 - q^n}{1 - q}, \\ \{n; a, b\} &= \begin{cases} \frac{1 - b^{n+1}}{1 - b^2} + ab \frac{1 - b^{n-1}}{1 - b^2} & \text{if } n \text{ is odd,} \\ (1 + ab) \frac{1 - b^n}{1 - b^2} & \text{if } n \text{ is even,} \end{cases} \\ \varepsilon(k) &= \begin{cases} -1 & \text{if } n \text{ is odd,} \\ 1 & \text{if } n \text{ is even.} \end{cases} \end{aligned}$$

とする。

ここで十分大きい k に対しては、 $\lambda_k - \lambda_{k+1} = 0$ なので上の積は、well-defined である。若山氏との共同研究により、さらに $\varphi_{\lambda}^{3,0}(a, b, c)$ の場合が次の conjecture として得られている。

conjecture を述べるために、いくつか準備すると対称関数 $P_r(a, b, c)$, $Q_r(a, b, c)$ を

$$P_r(a, b, c) = \sum_{k=0}^r \frac{a^{k+1} - b^{k+1}}{a - b} \frac{1 - a^{r-k+1}b^{r-k+1}}{1 - ab} c^k,$$

$$Q_r(a, b, c) = \sum_{k=0}^r h_{r-k}(a, b, c) a^k b^k c^k$$

によって定義する。ここで h_r は r th complete symmetric polynomial である。また $r < 0$ のとき $P_r = Q_r = 0$ と定義する。小さい r に対しては、 $P_1 = 1 + ab + ac + bc$, $P_2 = 1 + ab + ac + bc + a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + a^2bc + ab^2c + abc^2$ となる。partition $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ に対して composition $\gamma = \Gamma(\lambda)$ を

$$\gamma_i = \lambda_i - \lambda_{i+1}$$

によって定義する。任意の整数 i に対して $D_i: \mathbb{Z}^\infty \rightarrow \mathbb{Z}^\infty$ を

$$D_i(\gamma_1, \dots, \gamma_i, \dots, \gamma_n, \dots) = (\gamma_1, \dots, \gamma_i - 1, \dots, \gamma_n, \dots)$$

によって定める。また composition $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n, \dots)$ に対して対称関数 $F_\gamma(a, b, c)$ を

$$F_\gamma(a, b, c) = h_{\gamma_1}(a, b, c) \prod_{k=1}^{\infty} P_{\gamma_{2k}}(a, b, c) \prod_{k=1}^{\infty} Q_{\gamma_{2k+1}}(a, b, c)$$

と定義する。また D_i の F_γ への作用を

$$D_i F_\gamma = F_{D_i \gamma}$$

によって、定義する。我々の得た予想は、次のものである。

予想.

$$(12) \quad \varphi_{\lambda}^{3,0}(a, b, c) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - abc D_k D_{k+1}) F_{\Gamma(\lambda)}(a, b, c).$$

REFERENCES

- [IOW] M. Ishikawa, S. Okada and M. Wakayama, *Minor summation of Pfaffians and generalized Littlewood type formulas*, J. Alg. **183** (1996), 193–216.
- [IW1] M. Ishikawa and M. Wakayama, *Minor summation of Pfaffians*, Linear and Multilinear Alg. **39** (1995), 258–305.
- [IW2] ———, *Minor summation of Pfaffians and Schur functions identities*, Proc. Japan Acad. Ser. A **71** (1995), 54–57.
- [IW3] ———, *New Schur function series*, preprint.
- [Ku] D. Knuth, *Overlapping pfaffians*, Electric J. of Combin. **3** (1995), 151–163.
- [LP] A. Lascoux and P. Pragacz, *S-function series*, J. Phys. A: Math. Gen. **21** (1988), 4105–4114.

MINOR SUMMATION FORMULA

- [Ma] I.G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials, Second Edition*, Oxford University Press, 1995.
- [Ok] S. Okada, *Applications of minor-summation formulas to rectangular-shaped representations of classical groups*, preprint.
- [Ste] J. Stembridge, *Nonintersecting paths, pfaffians and plane partitions*, Adv. Math. **83** (1990), 96–131.
- [Su] T. Sundquist, *Pfaffians, involutions, and Schur functions*, University of Minnesota, PhD thesis.
- [Wy] H. Weyl, *The Classical Groups, their Invariants and Representations*, 2nd. ed., Princeton University Press, 1946.
- [YW] M. Yang and B .G. Wybourne, *New S function series and non-compact Lie groups*, J. Phys. A: Math. Gen. **19** (1986), 3513–3525.

MASAO ISHIKAWA, DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF EDUCATION, TOTTORI UNIVERSITY, KOYAMA, TOTTORI 680, JAPAN
E-mail address: mi@fed.tottori-u.ac.jp