

$U(2, 2) / (U(1, 1) \times U(1, 1))$ 上の不変固有超関数について

Invariant Eigendistributions on $U(2,2) / (U(1,1) \times U(1,1))$

青木 茂 (Shigeru AOKI) (拓殖大学工学部)

加藤末広 (Suchiro KATO) (北里大学一般教育)

§ 0. 序文

G を (簡約型) リー群、 σ を G の包含的自己同型、 H を $G^\sigma = \{g \in G \mid \sigma(g) = g\}$ の開部分群とする。さらに、 $X = G/H$ とおき、 $D(X)$ を (半単純) 対称空間 X 上の G -不変微分作用素全体のなす代数とする。 X の H -不変な開集合 O 上のシュワルツ超関数 Θ が次の 2 条件:

(i) Θ は H -不変

(ii) 任意の $D \in D(X)$ に対し、 $D\Theta = \chi(D)\Theta$ となるような $D(X)$ の指標 $\chi : D(X) \rightarrow \mathbb{C}$ が存在する。

を満たすとき、 Θ は O 上の、無限小指標 (infinitesimal character) χ をもつ、不変固有超関数 (IED) であるという。

X' を X の正則半単純元全体がなす H -不変な開稠密部分集合としよう。任意の X 上の IED Θ の X' への制限は明らかに X' 上の IED だが、 X' 上の IED は必然的に X' 上実解析的な $D(X)$ の同時固有関数になる。そして、 X' 上の IED の具体的な形を求める事は比較的容易である。そこで、我々は次の問題を考える。

問題、 X' 上の 任意の IED Π に対し、それが X 上の IED に拡張できるための条件を求めよ。

我々はこの問題を次のように二つに分けて考察する。

(1) X の各半正則半単純元のまわりでの X 上の IED の満たすべき条件を求める (局所的接続公式)。

(2) (1) で求めた条件をすべて集め、 X 上の IED の具体的な形を決定する (大域的接続公式)。

上の問題は、 X がリー群の場合には平井等、 X の階数が 1 の場合には Faraut 等により詳しく研究されてきた。また、リー群の c -双対、即ち G_c/G_R 型の対称空間の場合には [Sano-Sekiguchi, 6] に始まる佐野の一連の仕事がある。以上の系列に属さない対称空間の場合として、我々は次の 2 つの系列の対称空間に対し、上記問題を考察してきた ([1] 等) :

$$\textcircled{1} \quad X = U(n, n)/GL(n, C)$$

$$\textcircled{2} \quad X = U(p, q)/(U(r) \times U(p-r, q))$$

我々はこの報告では、階数 2 の対称空間 $X = U(2, 2) / (U(1, 1) \times U(1, 1))$ に対し上の問題を考察する。これは、 $\textcircled{2}$ の系列には属さないが、 $\textcircled{2}$ の系列を含むより大きな系列

$$\textcircled{3} \quad X = U(p, q) / (U(r, s) \times U(p-r, q-s))$$

には属する、という対称空間のうちで次元が最小なものである。

対称空間 $X = U(2, 2) / (U(1, 1) \times U(1, 1))$ の特徴を述べよう。この対称空間では、半正則半単純元に付随する部分対称空間として、リー群 $U(1, 1)$ やその c -双対 $GL(2, C) / U(1, 1)$ が現れる。これは $\textcircled{1}$ や $\textcircled{2}$ の対称空間では見られない顕著な特徴である。カルタン部分空間 (の H -共役類) の位置関係 (cf. 本稿末の Fig.1) については、(接空間について) ケーリー変換による順序が線形に成る点こそ $\textcircled{1}$ や $\textcircled{2}$ の対称空間と同一だが、内実は相当に異なる点に注意を要する。

本編を通し、 $i = \sqrt{-1}$ とする。

§ 1. 記号と準備

$I_{2,2} = \text{diag}(1, 1, -1, -1)$, $I_{1,2,1} = \text{diag}(1, -1, -1, 1)$ とおき、簡約型リー群 G を $G = U(2, 2) = \{g \in GL(4, \mathbb{C}) \mid g I_{2,2} g^* = I_{2,2}\}$ により定義する。また、 $G = U(2, 2)$ の包摂的自己同型 σ を $\sigma(g) = I_{1,2,1} g I_{1,2,1}$ により定め、 $H = G^\sigma = \{g \in G \mid \sigma(g) = g\}$ とおく。このとき、 $H \simeq U(1, 1) \times U(1, 1)$ である。以下、 $X = G/H = U(2, 2)/(U(1, 1) \times U(1, 1))$ とおき、この半単純対称空間 X を考察することにする。対称空間 $X = G/H$ は、 $\tilde{\sigma}(gH) = g \sigma(g)^{-1} (g \in G)$ により定義される $\tilde{\sigma}$ により、 G の中に埋め込まれることに注意する。以下、原則として $\tilde{\sigma}$ によって対称空間 $X = G/H$ を G へ埋め込んで考える。即ち、 $X = G/H$ と $\tilde{\sigma}(X)$ を同一視する。

$X = G/H$ のカルタン部分空間 J_0, J_1, J_2 を Table 1 のように与える。 X' を X の正則半単純元全体のなす開集合とし、 X の各カルタン部分空間 J_i に対し、 $J_i' = J_i \cap X'$ とおこう。そのとき、 X' は、 $X' = \bigsqcup_{l=0}^2 H J_l'$ と分解される。 J_0 をスプリット、 J_2 をコンパクト、 J_1 を “middle” と呼ぼう。カルタン部分空間の次元は X の階数と呼ばれるが、今の場合その値は 2 である。

我々の対称空間 $X = G/H = U(2, 2)/(U(1, 1) \times U(1, 1))$ のカルタン部分空間に対し、いくつか注意をしておく。 J_1 と J_2 は連結だが J_0 は 2 個の連結成分をもつ。また、 $J_0 \cap J_1 = \{\varepsilon a s_1 \mid s_1 \in \mathbb{R}, \varepsilon = \pm 1\}$, $J_1 \cap J_2 = \{\tilde{k} s_2 \mid s_2 \in \mathbb{R}\}$ となっている。各 $l = 0, 1, 2$ に対し、カルタン部分空間 J_l のワイル群 $W(J_l) = N_H(J_l)/Z_H(J_l)$ は、 J_l の Table 1 の変数 $t_1, t_2; \theta, t; \theta_1, \theta_2$ を用いた表示に対し変数の何れかを -1 倍する操作により生成されるので、 $(\mathbb{Z}_2)^2$ と同型になる。

ここで Table 1 の変数 $t_1, t_2; s_1, s_2; \theta_1, \theta_2$ に対し、各 J_l 上で変数 τ_1, τ_2 (τ -変数) を次のように定める： J_0 上では $\tau_1 = \text{ch}^2(t_1/2)$, $\tau_2 = \text{ch}^2(t_2/2)$ 、 J_1 上では $\tau_1 = \text{ch}^2\{(-s_1 + i s_2)/2\}$, $\tau_2 = \text{ch}^2\{(s_1 + i s_2)/2\}$ 、 J_2 上では $\tau_1 = \text{ch}^2\{(i \theta_1)/2\} = \cos^2(\theta_1/2)$, $\tau_2 = \text{ch}^2\{(i \theta_2)/2\} = \cos^2(\theta_2/2)$ 。このとき、 $j_2(\theta_1, \theta_2)$, $\varepsilon j_0(t_1, t_2)$ に (τ_1, τ_2) を対応させる写像により、 $J_2/(\mathbb{Z}_2)^2$ は $\{(\tau_1, \tau_2) \mid 0 \leq \tau_k \leq 1 (1 \leq k \leq 2)\}$ と、

$$j_0(t_1, t_2) = \begin{pmatrix} \text{ch } t_1 & & \text{sh } t_1 \\ & \text{ch } t_2 & \text{sh } t_2 \\ \text{sh } t_1 & & \text{ch } t_1 \\ & \text{sh } t_2 & \text{ch } t_2 \end{pmatrix}$$

$$j_2(\theta_1, \theta_2) = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & & \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & & \\ & & \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \\ & & \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{pmatrix}$$

$$j_1(\theta, t) = j_0(t, t) j_2(\theta, \theta)$$

$$(t_1, t_2, \theta, t, \theta_1, \theta_2 \in \mathbf{R})$$

$$a_s = j_0(s, s) = j_1(0, s), \quad \tilde{a}_s = j_0(-s, s),$$

$$k_s = j_2(-s, s), \quad \tilde{k}_s = j_2(s, s) = j_1(s, 0).$$

$$J_0 = J_{+0} \cup J_{-0}$$

$$J_{+0} = \{j_0(t_1, t_2) \mid t_1, t_2 \in \mathbf{R}\} = \{a_{s_1} \tilde{a}_{s_2} \mid s_1, s_2 \in \mathbf{R}\},$$

$$J_{-0} = \{-j_0(t_1, t_2) \mid t_1, t_2 \in \mathbf{R}\} = \{-a_{s_1} \tilde{a}_{s_2} \mid s_1, s_2 \in \mathbf{R}\},$$

$$J_1 = \{j_1(\theta, t) \mid \theta, t \in \mathbf{R}\} = \{a_{s_1} \tilde{k}_{s_2} \mid s_1, s_2 \in \mathbf{R}\} \quad (s_1 = t, s_2 = \theta),$$

$$J_2 = \{j_2(\theta_1, \theta_2) \mid \theta_1, \theta_2 \in \mathbf{R}\} = \{k_{s_1} \tilde{k}_{s_2} \mid s_1, s_2 \in \mathbf{R}\}.$$

Table 1

$J_0 / (Z_2)^2$ の各連結成分は $\{(\tau_1, \tau_2) \mid 1 \leq \tau_k (1 \leq k \leq 2)\}$ と同一視できる。 $J_1 / (Z_2)^2$ にはもはや (H の作用である) ワイル群 $W(J_1)$ は作用しないが、 $\ell = 0, 2$ の時は、G の作用として変数の置換が引き起こされることに注意する。

§ 2. 局所的接続公式 (定理 1)

x を任意の半正則半単純元とする。 x の τ -変数 (τ_1, τ_2) に対し、

$$A = \left\{ x \in J_0 \cup J_2 \left| \begin{array}{l} \tau_k = 1, \tau_k = 0 (k=1, 2); \tau_1 = \tau_2 \\ \text{の 5 個の等式中 1 つだけが成立する} \end{array} \right. \right\}$$

とおく。 A は $J_0 \cup J_1 \cup J_2$ 内の半正則半単純元の全体である。我々は A の各元を次の二つのケースに分けて考える：

[ケース I] x が J_0, J_1, J_2 のうち、唯一つだけに属す。

[ケース II] x が J_0, J_1, J_2 の中の丁度二つに属す。

今、 A の各元 x のまわりでの（局所的な）接続公式に関する結果を述べる。 X' 上の Π に対して、 $u_i = \omega \mid J_i$ とおく。ここで ω は、各 J_i 上、 $\omega = \tau_2 - \tau_1$ により定義された関数である。

定理 1. Θ を X 上の IED、 $\Pi = \Theta \mid X'$ とする。このとき、

- (1) x が [ケース I] に属するとき、 Π は x の近傍で実解析的に延長される。
- (2) x が [ケース II] に属するとき、 u_0, u_2 は x の近傍で実解析的に延長される。

更に、

- (i) $x \in J_0 \cap J_1$ ならば $\frac{1}{i} \frac{d}{ds} u_1(\tilde{k}_s x) \Big|_{s=+0} = \frac{d}{ds} u_0(\tilde{a}_s x) \Big|_{s=0}$
- (ii) $x \in J_2 \cap J_1$ ならば $\frac{1}{i} \frac{d}{ds} u_2(k_s x) \Big|_{s=0} = \frac{d}{ds} u_1(a_s x) \Big|_{s=+0}$

が成立する。

定理 1 の証明は、各 $x \in A$ に対し、

(i) x のまわりでの X' 上の IED の挙動

(ii) x のまわりでの不変積分の挙動

という 2 つの性質を調べ、そこで求めた結果を（ワイルの積分公式を通し）組み合わせることにより得られる。

まず、(i) の性質に関しては、Hoogenboom [5] の不変微分作用素の動径部分

についての研究 (cf. § 3, (3.2), (3.9) 式など) から導かれる。

また、(ii) については、 X 上の不変積分に於ける性質を、 x の中心化群から作られる X の部分対称空間 $X_{(x)} = Z_G(\tilde{\sigma}(x)) / Z_H(\tilde{\sigma}(x))$ 上の不変積分に於ける同種の性質に帰着させることにより、結果が引き出される。例えば、 x が [ケース II] に属する場合として、 $x \in J_0 \cap J_1$ のときは $X_{(x)} \simeq \{SL(2, \mathbb{C}) / SU(1, 1)\} \times \mathbb{R}$ 、 $x \in J_1 \cap J_2$ のときは $X_{(x)} \simeq \{(SU(1, 1) \times SU(1, 1)) / SU(1, 1)\} \times \mathbb{T}$ となるが、何れの場合もその上の不変積分の性質は既によく知られている (cf. Sugiura [8], Sano-Sekiguchi [6]) ので、(ii) の性質が求められる。

§ 3. 大域的接続公式 (定理 2)

τ -変数のもとで

$$\begin{aligned} (3.1) \quad & a(\tau) = 4\tau(\tau-1) \\ & b(\tau) = 4(2\tau-1) \\ & L = a(\tau) \frac{d^2}{d\tau^2} + b(\tau) \frac{d}{d\tau} \\ (3.2) \quad & L_k = a(\tau_k) \frac{\partial^2}{\partial \tau_k^2} + b(\tau_k) \frac{\partial}{\partial \tau_k} \quad (k=1, 2) \end{aligned}$$

とおく。常微分方程式 $LF = \lambda F$ ($\lambda \in \mathbb{C}$) は、

$$\begin{aligned} (3.3) \quad & \alpha = (1 + \sqrt{1 + \lambda}) / 2, \\ & \beta = (1 - \sqrt{1 + \lambda}) / 2, \\ & \gamma = 1 \end{aligned}$$

とおいたときの超幾何微分方程式

$$(3.4) \quad z(z-1)F''(z) + [(\alpha + \beta + 1)z - \gamma]F'(z) + \alpha\beta F(z) = 0$$

に他ならない。

超幾何関数 $F(\alpha, \beta, 1; z)$ の定義域を、単連結領域 $\mathbb{C} - [1, \infty)$ に解析接続により拡張する。また、 $\log z$ は $(0, \infty)$ で実数値を取る枝を取ることにし、超幾何微分方程式 (3.4) のもうひとつの解

$F(\alpha, \beta, 1; z) \log z + F^*(z)$ [但し $F^*(z)$ は $|z| < 1$ で正則で $F^*(0) = 0$]
 を、単連結領域 $C - ((-\infty, 0] \cup [1, \infty))$ に解析接続により拡張する。簡単のため、拡張された関数も同じ記号で表すことにする。

$$(3.5) \quad F_1(\lambda; z) = F(\alpha, \beta, 1; z)$$

$$F_2(\lambda; z) = F(\alpha, \beta, 1; z) \log z + F^*(z)$$

とおく。

2 次正方行列

$$(3.6) \quad A(\lambda) = \begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) \end{pmatrix}$$

を

$$(3.7) \quad (F_1(\lambda; z), F_2(\lambda; z)) = (F_1(\lambda; 1-z), F_2(\lambda; 1-z)) A(\lambda)$$

により定義する。(3.3), (3.5), (3.7) より、 $A(\lambda)^2 = E_2$ 。 $A(\lambda)$ の具体的表示に関しては、[4] を参照のこと (特に p.169)。

次に不変微分作用素とその動径部分について必要事項をまとめておく。

X の不変微分作用素環 $\mathcal{D}(X)$ から、各カルタン部分空間 J_i 上の微分作用素環の中への同型写像 $\mathcal{P} = \mathcal{P}_i$ で、

$$(\mathcal{D}f)|_{J_i} = \mathcal{P}_i(D)(f|_{J_i})$$

が任意の $D \in \mathcal{D}(X)$ と X 上の任意の H 不変な C^∞ 関数 f に対して成立するものが一意に存在する。この $\mathcal{P}_i(D)$ を 不変微分作用素 D の動径部分 (radial component) と言う。

τ -変数のもとで、 L_k ($k = 1, 2$) を (3.2) のようにおく。そのとき、 J_0, J_1, J_2 の各々の場合に、 $\mathcal{P}_i$ は、

$$(3.8) \quad \{ \omega^{-1} S(L_1, L_2) \omega \mid S \text{ は 2 変数対称多項式} \}$$

の上への同型となっていて、しかも、 $D \in \mathcal{D}(X)$ に対して

$$(3.9) \quad \mathcal{P}_1(D) = \omega^{-1} S(L_1, L_2) \omega$$

となる2変数対称多項式 S は J_0, J_1, J_2 で同一である (Hoogenboom [5])。この同型を使って、 $\Omega_k \in D(X)$ ($k=1, 2$) を

$$(3.10) \quad \mathcal{Q}(\Omega_1) = \omega^{-1}(L_1 + L_2)\omega$$

$$\mathcal{Q}(\Omega_2) = \omega^{-1}L_1L_2\omega$$

により定義する。 $D(X)$ は Ω_1, Ω_2 を自由生成元とする C 上の可換代数である。 Ω_1 は (定数倍と定数項を除き) X 上のラプラシアンとなっている。

$\lambda_1, \lambda_2 \in C$ に対し、 $\chi = \chi_{\lambda_1, \lambda_2}$ を

$$(3.11) \quad \chi(\Omega_1) = \lambda_1 + \lambda_2, \quad \chi(\Omega_2) = \lambda_1 \lambda_2$$

を満足する $D(X)$ のただ一つの指標と定義する。 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ が成立するとき、

$\chi_{\lambda_1, \lambda_2}$ は 正則 (regular) であるという。以下、簡単のため、無限小指標 χ が

正則な場合のみを扱う。

$j, k = 1, 2$ に対し、

$$(3.12) \quad \psi_{jk}^{\pm}(\lambda_1, \lambda_2; \tau_1, \tau_2) = F_j(\lambda_1; 1 - \tau_1) F_k(\lambda_2; 1 - \tau_2) \\ \pm F_k(\lambda_2; 1 - \tau_1) F_j(\lambda_1; 1 - \tau_2)$$

とおく。ただし、ここで、 $\tau \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ に対して、

$$F_k(\lambda; \tau) = F_k(\lambda; \tau + i0) \quad (k=1, 2)$$

とおき、 $F_k(\lambda; \tau)$ は $\tau \in C - \{0, 1\}$ に対し定義されているものとする。

補題 1. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ とする。このとき、

$$B_0 = \{ \psi_{jk}^{-}(\lambda_1, \lambda_2; \tau_1, \tau_2) \mid j, k = 1, 2 \}$$

$$B_E = \{ \psi_{jk}^{+}(\lambda_1, \lambda_2; \tau_1, \tau_2) \mid j, k = 1, 2 \}$$

$$(3.13) \quad B = B_0 \cup B_E$$

$$B'_0 = \{ \psi_{jk}^{-}(\lambda_1, \lambda_2; 1 - \tau_1, 1 - \tau_2) \mid j, k = 1, 2 \}$$

$$B'_E = \{ \psi_{jk}^{+}(\lambda_1, \lambda_2; 1 - \tau_1, 1 - \tau_2) \mid j, k = 1, 2 \}$$

$$B' = B'_0 \cup B'_E$$

とおく。すると、 J_{ℓ}' ($\ell = 0, 1, 2$) の各連結成分 Δ に於いて、 B 、 B' はそれぞれ線形空間

$$\{\omega \Pi \mid \Delta \mid \Pi \text{ は無限小指標 } \chi = \chi_{\lambda_1, \lambda_2} \text{ をもつ } H \Delta \text{ 上の IED}\}$$

の基底である。

$$\Lambda_d = \{4j(j+1) \mid j = 0, 1, 2, \dots\}$$

により $\Lambda_d \subset \mathbb{C}$ を定義する。

以上の記号のもとで、カルタン部分空間の上での、 X 上の IED の具体形につき次の定理が成り立つ。

定理 2. Θ を X 上の不変固有超関数 (IED)、その無限小指標 $\chi_{\lambda_1, \lambda_2}$ は正則とする。 $\ell = +0, -0, 1, 2$ に対し、 $u_{\ell} = \omega \Theta \mid J_{\ell}'$ とおく。また、 $0 < |s_2| < \pi$ とし、 $i = \sqrt{-1}$ とおく。

(i) 次の諸式を同時に成立させる定数 $C, C_{+0}, C_{-0}, C_2, C_{jk}$ ($j, k = 1, 2; j+k \leq 3$) が存在する：

$$(*): C_{11} a_{21}(\lambda_1) a_{21}(\lambda_2) + C_{12} a_{21}(\lambda_1) a_{22}(\lambda_2) + C_{21} a_{22}(\lambda_1) a_{21}(\lambda_2) = 0$$

$$u_2(j_2(\theta_1, \theta_2)) = C \psi_{11}^{-}(\lambda_1, \lambda_2; \tau_1, \tau_2) + C_2 \psi_{11}^{+}(\lambda_1, \lambda_2; \tau_1, \tau_2)$$

ここに、 $\tau_j = \cos^2(\theta_j/2)$ ($j = 1, 2$)

$$(3.14) \quad u_1(a_{s_1} \tilde{k}_{s_2})$$

$$= C \psi_{11}^{-}(\lambda_1, \lambda_2; \tau_1, \tau_2) + \text{sgn}(s_1 s_2) \sum_{j+k \leq 3} C_{jk} \psi_{jk}^{+}(\lambda_1, \lambda_2; \tau_1, \tau_2)$$

ここに、 $\tau_1 = \text{ch}^2((-s_1 + i s_2)/2)$, $\tau_2 = \text{ch}^2((s_1 + i s_2)/2)$

$$u_{+0}(j_0(t_1, t_2)) = C' \psi_{11}^{-}(\lambda_1, \lambda_2; \tau_1, \tau_2) + C_{+0} \psi_{11}^{+}(\lambda_1, \lambda_2; \tau_1, \tau_2)$$

$$u_{-0}(-j_0(t_1, t_2)) = C'' \psi_{11}^{-}(\lambda_1, \lambda_2; \tau_1, \tau_2) + C_{-0} \psi_{11}^{+}(\lambda_1, \lambda_2; \tau_1, \tau_2)$$

ここに、 $\tau_j = \text{ch}^2(t_j/2)$ ($j = 1, 2$),

$$(3.15) \quad C' = C - \pi i (C_{12} - C_{21}),$$

$$(3.16) \quad C'' = C a_{11}(\lambda_1) a_{11}(\lambda_2) \\ + \pi i \{ C_{11} \{ a_{11}(\lambda_1) a_{21}(\lambda_2) - a_{21}(\lambda_1) a_{11}(\lambda_2) \} \\ + C_{12} \{ a_{11}(\lambda_1) a_{22}(\lambda_2) - a_{21}(\lambda_1) a_{12}(\lambda_2) \} \\ + C_{21} \{ a_{12}(\lambda_1) a_{21}(\lambda_2) - a_{22}(\lambda_1) a_{11}(\lambda_2) \} \}$$

(ii) $\{\lambda_1, \lambda_2\} \subset \Lambda_d$ のときは、更に、

(i) の諸式において $C = C_2 = 0$ が成立する。

注意 1. $\{\lambda_1, \lambda_2\} \subset \Lambda_d$ のときは、 $a_{21}(\lambda_1) = a_{21}(\lambda_2) = 0$ 、 $a_{11}(\lambda_k) = \pm 1$ 、
 $a_{11}(\lambda_k) a_{22}(\lambda_k) = -1$ ($k = 1, 2$) 等となるので、定理 2 の (i) より、

$$C'' = C' a_{11}(\lambda_1) a_{11}(\lambda_2)$$

が成り立つ。

定理 2 から、直ちに、同一の無限小指標をもつ IED の空間の次元に関する次の評価が成り立つ。

定理 2 の系 1. 無限小指標 $\chi = \chi_{\lambda_1, \lambda_2}$ は正則であるとする。空間

$\{\Theta \mid X'; \Theta \text{ は無限小指標 } \chi \text{ をもつ } X \text{ 上の不変固有超関数(IED)}\}$

の次元は、

(i) $\{\lambda_1, \lambda_2\} \subset \Lambda_d$ のときは、7 次元以下であり、

(ii) $\{\lambda_1, \lambda_2\} \not\subset \Lambda_d$ のときは、4 次元以下である。

この IED の空間の次元の問題に関して、更に我々は次の予想をもっている。

予想. χ が generic のとき、無限小指標 χ をもつ X 上の不変固有超関数(IED)の空

間は、4次元である。

この予想の根拠については § 4.2 で説明する。

§ 4. 定理 2 に関する補足的注意

この節では、generic な無限小指標をもつ X 上の IED について、2つの補足的注意を述べる。

§ 4.1. generic な無限小指標 $\chi = \chi_{\lambda_1, \lambda_2}$ をもつ X 上の IED Θ に対しては、

$\Theta|X$ が $\Theta|J_0$ 、従って u_+, u_- により完全に定まる。

これを示すため、今簡単のため、 χ が正則 ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) でかつ $\lambda_1 \notin \Lambda_d$, $\lambda_2 \notin \Lambda_d$ が成り立つと仮定する。このとき、定理 2(i) の(*)式と $C = 0$ (定理 2(ii)) に注意し、 C', C'' を C_{12}, C_{21} を用い表すと、

$$C' = -\pi i (C_{12} - C_{21})$$

$$C'' = \pi i \left(-C_{12} \frac{a_{21}(\lambda_1)}{a_{21}(\lambda_2)} + C_{21} \frac{a_{21}(\lambda_2)}{a_{21}(\lambda_1)} \right).$$

更に、 $a_{21}(\lambda_1) \neq \pm a_{21}(\lambda_2)$ が成り立つときは、この 2 式から、逆に C_{12}, C_{21} を C', C'' で一意に表すことができ、

$$(4.1) \quad C_{12} = \frac{a_{21}(\lambda_2)}{\pi i \{(a_{21}(\lambda_1))^2 - (a_{21}(\lambda_2))^2\}} \left(C' a_{21}(\lambda_2) - C'' a_{21}(\lambda_1) \right)$$

$$(4.2) \quad C_{21} = \frac{a_{21}(\lambda_1)}{\pi i \{(a_{21}(\lambda_1))^2 - (a_{21}(\lambda_2))^2\}} \left(C' a_{21}(\lambda_1) - C'' a_{21}(\lambda_2) \right).$$

また、この 2 つの式と定理 2(i) の(*)式から、

$$(4.3) \quad C_{11} = \frac{1}{\pi i \{(a_{21}(\lambda_1))^2 - (a_{21}(\lambda_2))^2\}} \times [-C' \{a_{21}(\lambda_1) a_{22}(\lambda_1) + a_{21}(\lambda_2) a_{22}(\lambda_2)\} \\ + C'' \{a_{21}(\lambda_1) a_{22}(\lambda_2) + a_{21}(\lambda_2) a_{22}(\lambda_1)\}].$$

λ_1, λ_2 の一方のみが Λ_d に属するときも、 $A(\lambda)^2 = E_2$ 、及び $[\lambda \in \Lambda_d \Leftrightarrow a_{21}(\lambda)$

= 0] 等に注意して同様に計算することにより、(4. 1)～(4. 3)が示せる。以上をまとめ次の系が得られる。

定理 2 の系 2. X 上の不変固有超関数(IED) Θ の無限小指標 $\chi_{\lambda_1, \lambda_2}$ が $\{\lambda_1, \lambda_2\} \in \Lambda_d$ 、かつ条件 $a_{21}(\lambda_1) \neq \pm a_{21}(\lambda_2)$ を満たすものとする。そのとき、 $u_i = \omega \Theta|J_i$ ($i = +0, -0, 1, 2$) に対し、次の諸式を同時に満たす定数 C', C'', C_{+0}, C_{-0} が存在する。

$$u_{+0}(j_0(t_1, t_2)) = C' \psi_{11}^-(\lambda_1, \lambda_2; \tau_1, \tau_2) + C_{+0} \psi_{11}^+(\lambda_1, \lambda_2; \tau_1, \tau_2)$$

$$u_{-0}(j_0(t_1, t_2)) = C'' \psi_{11}^-(\lambda_1, \lambda_2; \tau_1, \tau_2) + C_{-0} \psi_{11}^+(\lambda_1, \lambda_2; \tau_1, \tau_2)$$

$$[\tau_j = \text{ch}^2(t_j/2) \quad (j = 1, 2)] ,$$

$$u_1(a_{s1} \tilde{k}_{s2}) = \text{sgn}(s_1 s_2) \{ C_{11} \psi_{11}^+(\lambda_1, \lambda_2; \tau_1, \tau_2) \\ + C_{12} \psi_{12}^+(\lambda_1, \lambda_2; \tau_1, \tau_2) + C_{21} \psi_{21}^+(\lambda_1, \lambda_2; \tau_1, \tau_2) \}$$

$$[\tau_1 = \text{ch}^2((-s_1 + i s_2)/2), \quad \tau_2 = \text{ch}^2((s_1 + i s_2)/2)] ,$$

$$u_2(j_2(\theta_1, \theta_2)) = 0$$

$$[\tau_j = \cos^2(\theta_j/2) \quad (j = 1, 2)] ,$$

但し、 C_{11}, C_{12}, C_{21} は (4. 1)～(4. 3) により C' と C'' から定まる定数である。

§ 4. 2. generic な無限小指標をもつ IED の空間の次元を考えよう。

一般論より、 $G = U(2,2)$ のリー環を $\mathfrak{g}$ とおき、 θ を σ と可換な $\mathfrak{g}$ のカルタン包含的自己同型、 θ に関する $\mathfrak{g}$ のカルタン分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ とする。さらに、 K を G の極大コンパクト群 G^θ 、 $\mathfrak{a}$ をスプリット・カルタン J_0 のリー環とする。 $X = U(2,2) / (U(1,1) \times U(1,1))$ の場合には、 $\mathfrak{a}$ は X の接空間 $\mathfrak{q}$ の極大可換部分空間であると同時に、 $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$ の極大可換部分空間でもあるが、更にまた $\mathfrak{p}$ の極大可換部分空間でもあることに注意する。 $\mathfrak{a}$ を含む $\mathfrak{g}$ のカルタン部分リー環に対応する G のカルタン部分群を $\tilde{J}$ とし、 $W = N_K(\mathfrak{a}) / Z_K(\mathfrak{a})$, $W_H = \{w \in W; w \text{ は } H \text{ の元で実現できる}\}$ とおく。 W / W_H の元の個数を m 、 $\tilde{J} / (\tilde{J} \cap H)$ の連結成分の個数を c_0 とかくことにする。

一般論より、同一の無限小指標をもつ IED は、少なくとも、 $m^2 c_0$ 次元はあることが知られているので、 $m = 2, c_0 = 1$ である我々の $X = U(2,2) / (U(1,1) \times U(1,1))$ の場合には同一の無限小指標をもつ IED は、少なくとも 4 次元あることが分かる。

(以上のことを教えて下さった大島利雄先生に感謝します。)

一般に、無限小指標 χ をもつ IED の空間の次元は、空間

$\{\Theta \mid X'; \Theta \text{ は無限小指標 } \chi \text{ をもつ } X \text{ 上の不変固有超関数(IED)}\}$

の次元と、特異な台をもつ IED の空間

$\{\Theta; \Theta \text{ は無限小指標 } \chi \text{ をもつ } X \text{ 上の IED で } \text{supp } \Theta \subset X - X'\}$

の次元の和で抑えられる。ところが、前節の定理 2 の系 1 より、前者は、 χ が generic の場合は、4 である。

以上をまとめると、

定理 2 の系 3. 無限小指標 $\chi = \chi_{\lambda_1, \lambda_2}$ が正則 ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) で、かつ

$\{\lambda_1, \lambda_2\} \subset \Lambda_d$ を満たすとする。このとき、

$D'_\chi(X) = \{\Theta; \Theta \text{ は無限小指標 } \chi \text{ をもつ } X \text{ 上の IED}\},$

$S_\chi(X) = \{\Theta \in D'_\chi(X); \text{supp } \Theta \subset X - X'\}$

と置くと、次の不等式が成り立つ：

$$4 \leq \dim D'_\chi(X) \leq 4 + \dim S_\chi(X).$$

$X = U(2,2) / (U(1,1) \times U(1,1))$ の接空間の場合には特異な台を持つ IED は 0 しかないことが証明されている (Sekiguchi [7])。X 自身の場合にも $\dim S_\chi(X) = 0$ が示されると、 $\dim D'_\chi(X) = 4$ となる。その結果、定理 2 とその系 1 から、無限小指標 χ をもつ X 上の IED はすべて、その具体的表示とともに求まることになる。

我々は、現在、[7] の議論を、対称空間の場合を扱った Kengmama の thesis (Harvard Univ.'84) の一部 (例えば THEOREM 3.8) を参考に焼き直すことにより、比較的容易に $\dim S_\chi(X) = 0$ を示すことが出来ると確信し確認作業を進めている。

§ 5. 定理 2 の証明

この節では定理 1 から定理 2 がどのように導かれるかにつき粗筋を述べる。

定理 1 (1)より u_2, u_{+0}, u_{-0} は $\tau_1=1$ 或いは $\tau_2=1$ で実解析的に延長される。従って、 u_2, u_{+0}, u_{-0} は、 B の一次結合で表す際、 F_2 を用いず F_1 のみで表すことができ、 ψ_{11}^+, ψ_{11}^- の一次結合となる。即ち、適当な定数 $C, C', C'', C_{+0}, C_{-0}, C_2$ に対して定理 2 (i) の u_2, u_{+0}, u_{-0} を含む等式が成り立つ。 u_2 は定理 1 (1)より $\tau_1=0$ 或いは $\tau_2=0$ でも実解析的に延長されるので、 B' の一次結合で表す際にも、 F_2 を用いず F_1 のみで表すことができ、 ψ_{11}^+, ψ_{11}^- の一次結合となる。よって、超幾何関数の接続公式より、定理 2 の (ii) が成り立つ (定理 1 (2)前半より、 u_2, u_{+0}, u_{-0} が $\tau_1=\tau_2$ で実解析的に延長されていることに注意)。

以上を前提に、定理 2(i)の残りの部分、即ち(*),(3.14),(3.15),(3.16)は定理 1(2)(i),(ii)から導かれる。以下、このことをやや詳しくみることにする。

定理 1(2)後半の言い替え

定理 1 (2)(ii)即ち J_1 と J_2 との局所接続公式から、

(☆2): 「 X 上の任意の IED を J_1 と J_2 それぞれの上で関数系 B (または B') の一次結合で表すとき、 B_0 (または B'_0) の各関数の係数は J_1 と J_2 で等しい。」

ことが導かれる ([3] 5.4)。同様に、定理 1 (2)(i)の $x \in J_1 \cap J_{+0}$ の場合即ち J_1 と J_{+0} との局所接続公式から、

(☆+0): 「(3.5)の $F_2(\lambda; z)$ の定義において、 $\log z$ の代わりに、 $C - [0, \infty)$ で正則、 $(-\infty, 0)$ で $\log |z| + i\pi$ となる z の関数を採用し、(3.5),(3.12),(3.13)により B, B_0 を定義する。このとき、 X 上の任意の IED を J_1 と J_{+0} それぞれの上で関数系 B の一次結合で表すとき、 B_0 の各関数の係数は J_1 と J_{+0} で等しい。」

ことが導かれ、また、定理 1 (2)(i)の $x \in J_1 \cap J_{-0}$ の場合即ち J_1 と J_{-0} との局所接続公式から、

(☆-0) : 「X上の任意の IED を、 J_1 の上で関数系 B' の一次結合で表し、 J_{-0} の上で関数系 B の一次結合で表すとき、 B'_0 の各関数の係数は B_0 の対応する関数の係数と等しい。」

ことが導かれる。

u_1 を B 或いは B' を用いて次のように表しておく (以下簡単のため、 $s_1 > 0$, $\pi > s_2 > 0$ の場合のみを述べる)。

$$\begin{aligned}
 (5.1) \quad u_1(a_{s_1} \tilde{k}_{s_2}) &= \sum_{\substack{j,k=1,2 \\ \varepsilon=+, -}} {}_1 C_{jk}^{\varepsilon} \psi_{jk}^{\varepsilon}(\lambda_1, \lambda_2; \tau_1, \tau_2) \\
 &= \sum_{\substack{j,k=1,2 \\ \varepsilon=+, -}} {}_0 C_{jk}^{\varepsilon} \psi_{jk}^{\varepsilon}(\lambda_1, \lambda_2; 1-\tau_1, 1-\tau_2)
 \end{aligned}$$

ここに、 $\tau_1 = \text{ch}^2((-s_1 + i s_2)/2)$, $\tau_2 = \text{ch}^2((s_1 + i s_2)/2)$ であり、 ${}_1 C_{jk}^{\varepsilon}, {}_0 C_{jk}^{\varepsilon}$ ($j, k = 1, 2; \varepsilon = +, -$) は定数である。

すると、(☆2) から、

$$(5.2) \quad {}_1 C_{11}^{-} = C, \quad {}_1 C_{jk}^{-} = {}_0 C_{jk}^{-} = 0 \quad ((j, k) \neq (1, 1)).$$

さらに、(☆+0) を用いると、簡単な議論 ([3] 5.5) により、

$$(5.3) \quad C' = {}_1 C_{11}^{-} - \pi i({}_1 C_{12}^{+} - {}_1 C_{21}^{+}), \quad {}_1 C_{22}^{+} = 0$$

同様に、(☆-0) を用いると、

$$(5.4) \quad C'' = {}_0 C_{11}^{-} + \pi i({}_0 C_{12}^{+} - {}_0 C_{21}^{+}), \quad {}_0 C_{22}^{+} = 0.$$

$$(5.5) \quad C_{jk} = {}_1 C_{jk}^{+} \quad (j, k = 1, 2)$$

と置くと、(5.2),(5.3)より、(3.14),(3.15)が得られる。

超幾何微分方程式(3.4)の $z=0$ のまわりの解の基本系から作った基底と、 $z=1$ のまわりの解の基本系から作った基底との関係を与える次の補題は、(3.7),(3.12),(3.13)から簡単な計算により示されるが、 J_1 と J_{+0} との局所接続公式と、 J_1 と J_{-0} との局所

接続公式の関連を調べる際重要である。

補題 2. 2 次正方行列 $({}_1C_{jk}^\varepsilon)$, $({}_0C_{jk}^\varepsilon)$ の間には、

$$({}_0C_{jk}^\varepsilon) = A(\lambda_1) ({}_1C_{jk}^\varepsilon) {}^tA(\lambda_2) \quad (\varepsilon = +, -)$$

が成り立つ。特に、 $({}_0C_{jk}^+) = A(\lambda_1) ({}_1C_{jk}) {}^tA(\lambda_2)$ である。

上の補題 2 を用いて、(3.16), (*) を示す。

(5.2) より、

$${}_0C_{11}^- = \text{「} A(\lambda_1) ({}_1C_{jk}^-) {}^tA(\lambda_2) \text{の (1,1) 成分」}$$

$$= C_{11} a_{11}(\lambda_1) a_{11}(\lambda_2),$$

さらに、(5.3)後半、(5.5)より、

$${}_0C_{12}^+ = \text{「} A(\lambda_1) ({}_1C_{jk}) {}^tA(\lambda_2) \text{の (1,2) 成分」}$$

$$= C_{11} a_{11}(\lambda_1) a_{21}(\lambda_2) + C_{12} a_{11}(\lambda_1) a_{22}(\lambda_2) + C_{21} a_{12}(\lambda_1) a_{21}(\lambda_2),$$

$${}_0C_{21}^+ = \text{「} A(\lambda_1) ({}_1C_{jk}) {}^tA(\lambda_2) \text{の (2,1) 成分」}$$

$$= C_{11} a_{21}(\lambda_1) a_{11}(\lambda_2) + C_{12} a_{21}(\lambda_1) a_{12}(\lambda_2) + C_{21} a_{22}(\lambda_1) a_{11}(\lambda_2)$$

である。よって、(5.4) 前半より (3.16) がいえる。また、

$${}_0C_{22}^+ = \text{「} A(\lambda_1) ({}_1C_{jk}) {}^tA(\lambda_2) \text{の (2,2) 成分」}$$

$$= C_{11} a_{21}(\lambda_1) a_{21}(\lambda_2) + C_{12} a_{21}(\lambda_1) a_{22}(\lambda_2) + C_{21} a_{22}(\lambda_1) a_{21}(\lambda_2)$$

であるから、(5.4)後半より(*)が成り立つ。

References

- [1] S. Aoki and S. Kato: On invariant eigendistributions on $U(p, q) / (U(r) \times U(p-r, q))$, Proc. of the Japan Academy, 67.A.6, 203-207 (1991).
- [2] 青木 茂、加藤末広, $U(2, 2) / (U(1, 1) \times U(1, 1))$ 上の不変固有超関数の接続公式について, 拓殖大学理工学研究報告 Vol.6, No.1, 57-62 (1997).
- [3] 青木 茂、加藤末広, $U(2, 2) / (U(1, 1) \times U(1, 1))$ 上の不変固有超関数の具体的表示について, 拓殖大学理工学研究報告 Vol.6, No.2, 73-82 (1997).

[4] C. Carathéodory, Theory of functions of a complex variable Vol.2 (translated by F. Steinhardt), Chelsea, New York (1960).

[5] B. Hoogenboom, Spherical functions and differential operators on complex Grassmann manifolds. Ark. Mat. 20, 69-85 (1982).

[6] S.Sano and J.Sekiguchi, The Plancherel formula for $SL(2, \mathbf{C}) / SL(2, \mathbf{R})$, Sci.Papers College Gen. Ed. Univ. Tokyo, 30, 93-105 (1980).

[7] J.Sekiguchi, Invariant spherical hyperfunctions on the tangent space of a symmetric space, Advanced Studies in Pure Math. 6, Algebraic Groups and Related Topics, 83-126 (1985).

[8] M.Sugiura, Unitary representations and harmonic analysis, Kodansha, Tokyo (1975).

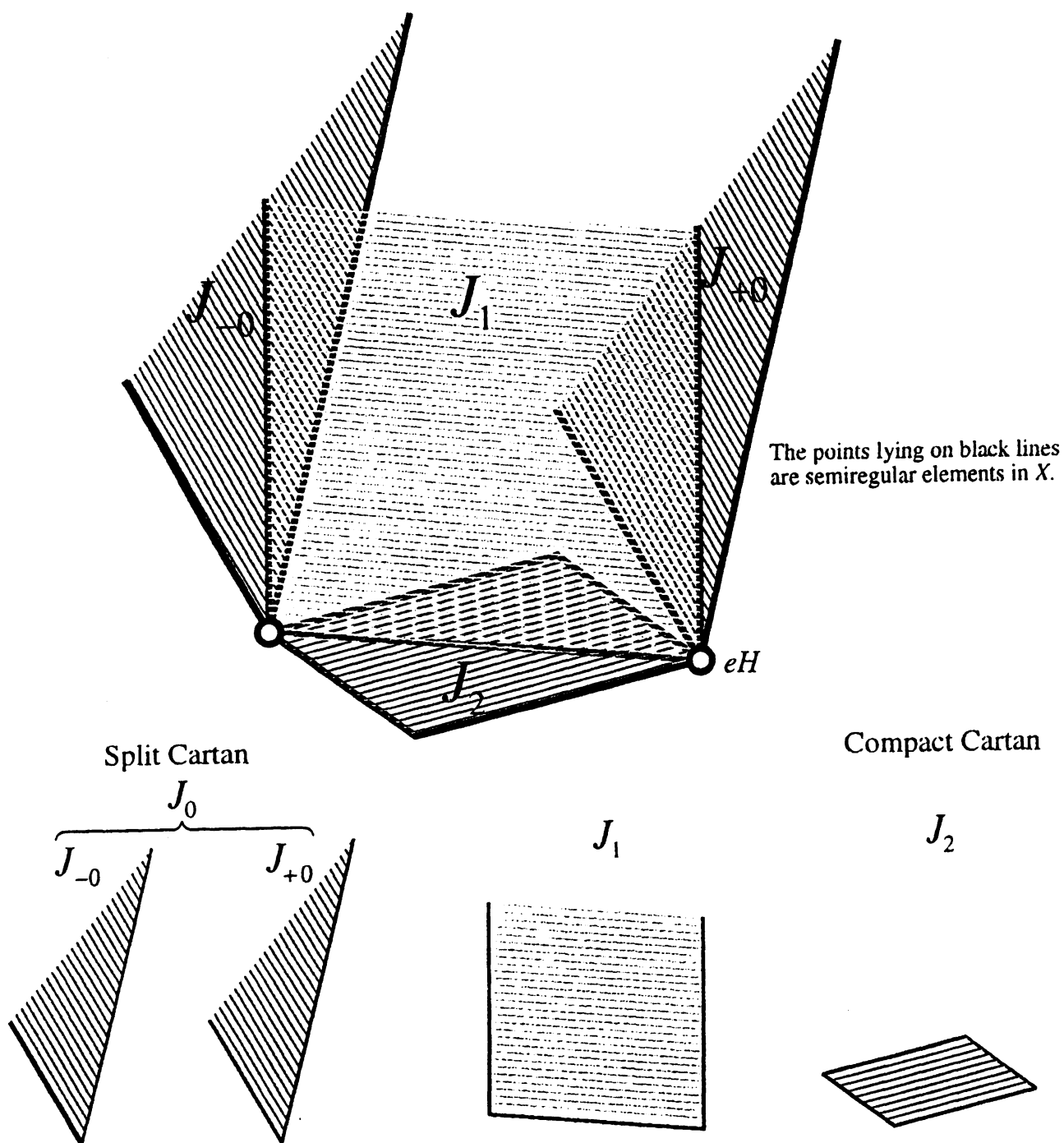


Fig. 1 The relation among the Cartan subspaces