

Homogeneous cone 上の Riesz distribution について

伊師 英之

京都大学大学院理学研究科

1 導入

$V := \text{Herm}(r, \mathbb{C})$, $\Omega := \{x \in V | x \gg 0\}$ とし, $x \in \Omega$, $0 \leq k \leq r$ について

$$\Delta_{(k)}(x) := \det \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{k1} & x_{k2} & \dots & x_{kk} \end{pmatrix},$$

$s = (s_1, s_2, \dots, s_r) \in \mathbb{C}^r$ について

$$\Delta_s(x) := \Delta_{(1)}(x)^{s_1-s_2} \dots \Delta_{(r-1)}(x)^{s_{r-1}-s_r} \Delta_{(r)}(x)^{s_r}$$

と定義する. $T := \{t = (t_{ij}) \in GL(r, \mathbb{C}) | t_{ii} > 0, i < j \Rightarrow t_{ij} = 0\}$ とし (T の元は下三角行列である), $t \in T$, $s \in \mathbb{C}^r$ について

$$\chi_s(t) := \prod_{i=1}^r t_{ii}^{2s_i}$$

とする. これは T の一次元表現である. T の V への作用 ρ を

$$\rho(t)x := txt^* \quad (t \in T, x \in V)$$

で定義する. この ρ によって T は Ω に単純推移的に作用する.

$$\Delta_s(\rho(t)x) = \chi_s(t)\Delta_s(x) \quad (t \in T, x \in \Omega) \quad (1)$$

が成り立つ.

Ω 上の測度 μ を $d\mu(x) := \det(x)^{-r} dm(x)$ (dm は V 上の Lebesgue 測度) で定義する. 測度 μ は T の作用 ρ に関して不変である.

$\operatorname{Re} s_i \geq i-1$ ($1 \leq i \leq r$) となる $s \in \mathbb{C}^r$ について

$$\Gamma_\Omega(s) := \int_\Omega e^{ix} \Delta_s(x) d\mu(x)$$

とすると, この積分は絶対収束し,

$$\Gamma_\Omega(s) = \pi^{r(r-1)/2} \prod_{k=1}^r \Gamma(s_k - i + 1) \quad (2)$$

となる. この $s \in \mathbb{C}^r$ と V 上の急減少関数 φ について

$$\langle R_s, \varphi \rangle := \frac{1}{\Gamma_\Omega(s)} \int_\Omega \varphi(x) \Delta_s(x) d\mu(x)$$

とすると, この右辺も絶対収束する. $\langle R_s, \varphi \rangle$ は s の整函数として $\mathbb{C}^r$ 全体に解析接続できるが, これによって一般の $s \in \mathbb{C}^r$ についても $\langle R_s, \varphi \rangle$ が定義できる. R_s は $\overline{\Omega}$ 上に台をもつ distribution で, これを Riesz distribution と呼ぶ.

Riesz distribution と作用 ρ との間には次の関係がある:

$$\langle R_s, \varphi(\rho(t)^{-1} \cdot) \rangle = \chi_s(t) \langle R_s, \varphi \rangle. \quad (3)$$

ここで, R_0 は $x=0$ における Dirac distribution であることに注意しておく:

$$\langle R_0, \varphi \rangle = \varphi(0). \quad (4)$$

どんな $s \in \mathbb{C}^r$ について R_s が正の測度になるかは既に知られているが ([1], [3]), ここではそれらの distribution の台を記述することを問題にする.

2 $\overline{\Omega}$ の軌道分解と Riesz distribution

$I \subset \{1, 2, \dots, r\}$ について

$$\begin{aligned} E_I &:= \sum_{i \in I} E_{ii} \quad (E_{ii} \text{ は行列単位}) \\ \mathcal{O}_I &:= \rho(T) E_I \end{aligned}$$

とする.

命題 1. $\overline{\Omega}$ の ρ による軌道分解は次のように与えられる:

$$\overline{\Omega} = \coprod_{I \subset \{1, \dots, r\}} \mathcal{O}_I.$$

さて, $p(I) = (p(I)_1, p(I)_2, \dots, p(I)_r) \in \mathbb{Z}^r$ を

$$p(I)_k := \#\{i \in I \mid i < k\} \quad (1 \leq k \leq r)$$

と定義し,

$$\begin{aligned} \Xi_I &:= \{s \in \mathbb{R}^r \mid i \in I \Rightarrow s_i > p(I)_i, i \notin I \Rightarrow s_i = p(I)_i\}, \\ \Xi &:= \coprod_{I \subset \{1, \dots, r\}} \Xi_I, \end{aligned}$$

とする.

定理 2. (i) $s \in \mathbb{C}^r$ について

$$R_s \text{ が } \overline{\mathcal{O}}_I \text{ を台とする正の測度} \Leftrightarrow s \in \Xi_I. \quad (5)$$

$$R_s \text{ が正の測度} \Leftrightarrow s \in \Xi. \quad (6)$$

(ii) $s, s' \in \Xi$ について

$$R_s, R_{s'} \text{ が互いに絶対連続} \Leftrightarrow s, s' \in \Xi_I \text{ となる } I \subset \{1, \dots, r\} \text{ がある.}$$

(6) は Gindikin の結果である ([3], ただし Ξ の特徴付けは異なる).

$I = \{1, 2, \dots, r\}$ のとき $p(I)_k = k - 1$, $\Xi_I = \{s \in \mathbb{R}^r \mid s_k > k - 1\}$. このときの R_s は (1) で定義される. $I = \emptyset$ (空集合) のとき $p(I) = (0, \dots, 0)$, $\Xi_I = \{(0, \dots, 0)\}$ で, 対応する distribution は (4) での R_0 に他ならない. その他の I についても R_s は具体的に記述できる. さらに, 与えられた $s \in \mathbb{C}^r$ について $s \in \Xi$ かを判定すると同時に, $s \in \Xi$ ならば $s \in \Xi_I$ となる I を求める効率よいアルゴリズムが存在する.

3 応用

$T_\Omega := V + \sqrt{-1}\Omega \subset M(r, \mathbb{C})$, $G = V \rtimes_\rho T$ とし, G の T_Ω への作用を

$$g \cdot z := \rho(t)z + x \quad (g = (x, t) \in G, z \in T_\Omega),$$

G の一次元表現 $\tilde{\chi}_s : G \longrightarrow \mathbb{C}$ を

$$\tilde{\chi}_s(t, x) := \chi_s(t) \quad (t \in T, x \in V),$$

と定義する.

T_Ω 上の正則関数の集合を $\mathcal{H}(T_\Omega)$ とし, compact 一様収束位相により位相ベクトル空間とみる. $f \in \mathcal{H}(T_\Omega)$, $g \in G$ について

$$\pi_s(g)f(z) := \tilde{\chi}_{-s/2}(t)f(g^{-1}z)$$

とすると $(\pi_s, \mathcal{H}(T_\Omega))$ は G の連続な表現である.

$s \in \mathbb{C}^r$ について $s^* = (s_r, s_{r-1}, \dots, s_1)$ とする.

定理 3. $s \in \mathbb{C}^r$ について, 次の条件を満たす $\mathcal{H}(T_\Omega)$ の部分空間 $\mathcal{H}_s(T_\Omega)$ が存在する必要十分条件は $\text{Re } s^* \in \Xi$ である.

- $\mathcal{H}_s(T_\Omega)$ は Hilbert 空間の構造をもち, $\mathcal{H}_s(T_\Omega) \hookrightarrow \mathcal{H}(T_\Omega)$ は連続な埋め込み.
- π_s は $\mathcal{H}_s(T_\Omega)$ を不変にし, $(\pi_s, \mathcal{H}_s(T_\Omega))$ は G の unitary 表現.

$z, w \in T_\Omega$ について

$$K_s(z, w) := \Delta_s \left(\frac{1}{\sqrt{-1}}(z - w^*) \right)$$

とする. ただし Δ_s は $\Omega + \sqrt{-1}V$ 上の正則関数として解析接続したものとする. K_s は第一変数については正則で, 第二変数については反正則である.

定理 4. $\mathcal{H}_s(T_\Omega)$ は $K_{-\text{Re } s}$ を再生核とする空間として構成される.

特に, $\text{Re } s$ を固定したとき $\mathcal{H}_s(T_\Omega)$ はすべて等しい. ただし, その場合も π_s は形式上異なり, それらが同値であることは自明ではない.

定理 5. (i) 定理 3 の仮定をみたす s について, $(\pi_s, \mathcal{H}_s(T_\Omega))$ は既約表現である.

(ii) 定理 3 の仮定をみたす s, s' について, $(\pi_s, \mathcal{H}_s(T_\Omega))$ と $(\pi_{s'}, \mathcal{H}_{s'}(T_\Omega))$ が同値になる必要十分条件は, ある $I \subset \{1, \dots, r\}$ があつて $\text{Re } s^*, \text{Re } s'^* \in \Xi_I$ となることである.

参考文献

- [1] Faraut J. and A. Korányi, “Analysis on Symmetric Cones”, Oxford Mathematical Monographs, Clarendon Press, Oxford 1994.
- [2] Gindikin S.G., *Analysis in homogeneous domains*, Russian Math. Surveys, **19** (1964), 1–89.
- [3] —, *Invariant generalized functions in homogeneous domains*, Funct. Anal. Appl., **5** (1975), 50–52.
- [4] Clerc J.-L., *Laplace transform and unitary highest weight modules*, J. Lie Theory, **5** (1995), no.2 225–240.
- [5] Rossi H. and M. Vergne, *Analytic continuation of the holomorphic discrete series of a semi-simple Lie group*, Acta Math., **136** (1976), 1–59.