

$U_q(B_n^{(1)}), U_q(C_n^{(1)}), U_q(D_n^{(1)})$ のレベル1の 完全結晶

古閑義之 (大阪大学大学院理学研究科数学専攻D3)

0 Introduction

量子展開環 $U_q(\mathfrak{g})$ の $q = 0$ における表現論として結晶基底(crystal base)の理論がある。完全結晶(perfect crystal)とは、 $\mathfrak{g}$ がアファインリー代数の場合の量子展開環の有限次元表現の結晶基底であり、2次元頂点模型の研究の過程で、[1]において導入された。有限次元表現の結晶基底で、セクション1で述べるいくつかの条件を満足するものを完全結晶と呼ぶのであるが、どの有限次元表現の結晶基底が完全結晶となるのかについては、今のところ簡単な判定条件は知られていない。完全結晶の例は、 $A_n^{(1)}, B_n^{(1)}, C_n^{(1)}, D_n^{(1)}, A_{2n}^{(2)}, A_{2n-1}^{(2)}, D_{n+1}^{(2)}$ の場合に、[2]において与えられた。また他の例が、[3]と[4]において見られる。

完全結晶の持つ特徴的な性質をひとつあげておく。 $B(\lambda)$ を支配的な整ウェイト λ を持つ、アファイン量子展開環の既約最高ウェイト表現の結晶基底とし、 B を λ と同じレベルをもつ完全結晶基底とする。このとき次の同型 [1]

$$B(\lambda) \simeq B(\sigma(\lambda)) \otimes B$$

が存在する。ここで、 σ は、 B と λ により決まるウェイト格子の自己同型である。上の同型を繰り返し用いることで、 $B(\lambda)$ は、半無限テンソル積 $\cdots \otimes B \otimes B$ の元で左端に境界条件を持つもの(パス)として実現される。すなわち、このパスという概念を通して、完全結晶は既約最高ウェイト表現の結晶基底と結び付けられる。さらに最近、[5]等により、デマズール(Demazure)指標や対称関数との関連も明らかにされている。

ここでの目的は、アファインリー環が $B_n^{(1)}, C_n^{(1)}, D_n^{(1)}$ の場合に、新しい完全結晶の例を与えることである。

1 Perfect Crystal

このセクションで、perfect crystal の定義と、[2]において知られている結果について復習しておく。

最初に、量子展開環と crystal base の一般的な定義を思い出す。 $\mathfrak{g}$ を Kac Moody algebra、 $\mathfrak{t}$ をその Cartan subalgebra とし、 $\{\alpha_i\}_{i=0,1,\dots,n}$ を simple root、 $\{h_i\}_{i=0,1,\dots,n}$ を simple coroot、 $\{\Lambda_i\}_{i=0,1,\dots,n}$ を fundamental weight とする。また、 $(,)$ を invariant bilinear form、 P を weight lattice、 P^* を dual lattice、 $\langle, \rangle$ を P と P^* の間の pairing とする。

定義 1.1 (Quantum enveloping algebra) $U_q(\mathfrak{g})$ は、生成元 e_i, f_i 、($i = 0, 1, \dots, n$)、 q^h ($h \in P^*$)、と以下の関係式で定義される $\mathbf{Q}(q)$ 上の結合代数である。

$$\begin{aligned} q^0 &= 1 & q^h q^{h'} &= q^{h+h'}, \\ q^h e_i q^{-h} &= q^{\langle h, \alpha_i \rangle} e_i & q^h f_i q^{-h} &= q^{-\langle h, \alpha_i \rangle} f_i, \\ [e_i, f_i] &= \delta_{i,j} \frac{t_i - t_i^{-1}}{q_i - q_i^{-1}}, \\ \sum_{m=0}^{1-\langle h_i, \alpha_j \rangle} (-1)^m e_i^{(m)} e_j e_i^{(1-\langle h_i, \alpha_j \rangle - m)} &= 0 \\ \sum_{m=0}^{1-\langle h_i, \alpha_j \rangle} (-1)^m f_i^{(m)} f_j f_i^{(1-\langle h_i, \alpha_j \rangle - m)} &= 0, \end{aligned} \quad (i \neq j)$$

ただし、

$$\begin{aligned} q_i &= q^{(\alpha_i, \alpha_i)}, & t_i &= q^{(\alpha_i, \alpha_i) h_i}, \\ [n]_i &= \frac{q_i^n - q_i^{-n}}{q_i - q_i^{-1}}, & [n]_i! &= \prod_{k=1}^n [k]_i, \\ e_i^{(n)} &= e_i^n / [n]_i!, & f_i^{(n)} &= f_i^n / [n]_i!. \end{aligned}$$

crystal base の定義に必要ないくつかの記号を準備する。まず、 M を integrable $U_q(\mathfrak{g})$ -module、 $M = \bigoplus_{\lambda} M_{\lambda}$ をその weight decomposition とする。任意の $u \in M_{\lambda}$ は、

$$u = \sum_k f_i^{(k)} u_k \quad (u_k \in M_{\lambda + k\alpha_i})$$

と一意的に表示されるので、これを用いて M 上の新しい作用素 $\tilde{e}_i, \tilde{f}_i$ を

$$\tilde{e}_i u = \sum f_i^{(k-1)} u_k, \quad \tilde{f}_i u = \sum f_i^{(k+1)} u_k.$$

で定義する。 $\mathbf{Q}(q)$ の subring $\mathbf{A}$ を $\mathbf{A} = \{f \in \mathbf{Q}(q) \mid f : \text{regular at } q = 0\}$ と定義しておく。

定義 1.2 (crystal base) (L, B) が M の crystal base であるとは、(1) L は M の free $\mathbf{A}$ -submodule で、 $\mathbf{Q}(q) \otimes_{\mathbf{A}} L \simeq M$ 、(2) $L = \bigoplus_{\lambda \in P} L_{\lambda}$ ($L_{\lambda} = L \cap M_{\lambda}$)、

(3) $\tilde{e}_i L \subset L$, $\tilde{f}_i L \subset L$, (4) B は $\mathbf{Q}$ -vector space L/qL の基底、(5) $B = \sqcup_{\lambda \in P} B_\lambda$ ($B_\lambda = B \cap (L_\lambda/qL_\lambda)$), (6) $\tilde{e}_i B \subset B \sqcup \{0\}$, $\tilde{f}_i B \subset B \sqcup \{0\}$, (7) 任意の $b, b' \in B$ と $i \in I$ について $b' = \tilde{f}_i b \Leftrightarrow b = \tilde{e}_i b'$.

L : crystal lattice, B : crystal base と呼ばれる。また、(4)を、 $B = B' \sqcup (-B')$ かつ B' は $\mathbf{Q}$ -vector space L/qL の基底という条件に置き換えた時、 (L, B) を crystal psudo-base であるという。

B から $\mathbf{Z}$ への写像 ε_i と φ_i を

$$\begin{aligned}\varepsilon_i(b) &= \max\{n \geq 0 \mid \tilde{e}_i^n b \in B\}, \\ \varphi_i(b) &= \max\{n \geq 0 \mid \tilde{f}_i^n b \in B\}.\end{aligned}$$

で定義し、さらにこれらを用いて、 B から P への写像 ε と φ を $\varepsilon(b) = \sum_i \varepsilon_i(b) \Lambda_i$, $\varphi(b) = \sum_i \varphi_i(b) \Lambda_i$ と定義する。

つぎに、perfect crystal を定義を紹介する。以下、 $\mathfrak{g}$ は、affine Lie algebra、 δ をその imaginary root とする。 $\mathfrak{t}_d^* = \mathfrak{t}^*/\mathbf{Q}\delta$ を Cartan subalgebra の classical part、 $cl: \mathfrak{t}^* \rightarrow \mathfrak{t}_d^*$ を projection とする。また、 $P_d = cl(P)$ とおき、 α_i 、 Λ_i 等は、 cl により P_d の元とみなすこととする。

$U'_q(\mathfrak{g})$ を、 e_i, f_i, t_i , ($i = 0, 1, \dots, n$) で生成される $U_q(\mathfrak{g})$ の subalgebra とする。ここでは考える表現を、 $P_d = \sum_{i=0}^n \mathbf{Z} \Lambda_i$ による weight decomposition をもつ integrable $U'_q(\mathfrak{g})$ -module に限ることとする。また、 P_d の部分集合、 P_d^+ と $(P_d^+)_\ell$ を $P_d^+ = \sum_{i=0}^n \mathbf{Z}_{\geq 0} \Lambda_i$, $(P_d^+)_\ell = \{\lambda \in P_d^+ \mid \langle c, \lambda \rangle = \ell\}$ により定める。

定義 1.3 (perfect crystal [1]) ℓ を自然数とする。crystal B について、以下の条件が満足されるとき、 B は level ℓ の perfect crystal であるという。

1. $B \otimes B$ は連結。
2. ある $\lambda_0 \in P_{cl}$ が存在して、 $wt(B) \subset \lambda_0 + \sum_{i \neq 0} \mathbf{Z}_{\leq 0} \alpha_i$ かつ $\sharp(B_{\lambda_0}) = 1$ 。
3. 有限次元 $U'_q(\mathfrak{g})$ -module で、 (L, B') (ただし $B' \simeq B/\{\pm\}$) と同型な crystal psudo-base を持つものが存在する。
4. 任意の $b \in B$ について $\langle c, \varepsilon(b) \rangle \geq \ell$ 。
5. ε と φ は、 $B_\ell = \{b \mid \langle c, \varepsilon(b) \rangle = \ell\}$ から $(P_d^+)_\ell$ への全単射をあたえる。

[2], [3] により知られている perfect crystal の例を、 $\mathfrak{g} = A_n^{(1)}, B_n^{(1)}, C_n^{(1)}, D_n^{(1)}$ の場合に述べておく。以下、 $\bar{\mathfrak{g}}$ は、affine Lie algebra $\mathfrak{g}$ の underlying simple Lie algebra とする。 $I = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ を $\mathfrak{g}$ の simple root の index set、

$J = \{1, 2, \dots, n\}$ を $\bar{\mathfrak{g}}$ の simple root の index set とし、 $\iota: J \rightarrow I (j \mapsto j)$ する。 $U'_q(\mathfrak{g})$ -crystal B に対し、 $\iota^*(B)$ は、 B の $U_q(\bar{\mathfrak{g}})$ -crystal への restriction である。

定理 1.1 ([2]) 任意の自然数 ℓ について、 $U'_q(\mathfrak{g})$ の level ℓ の perfect crystal $B^{k,\ell}$ で、 $U_q(\bar{\mathfrak{g}})$ -crystal としては、次の同型を持つものが存在する。

1. $\mathfrak{g} = A_n^{(1)}$, $\iota^*(B^{k,\ell}) \simeq B(\ell\Lambda_k)$, $(1 \leq k \leq n)$
2. $\mathfrak{g} = B_n^{(1)}$, $\iota^*(B^{1,\ell}) \simeq B(\ell\Lambda_1)$
3. $\mathfrak{g} = C_n^{(1)}$, $\iota^*(B^{n,\ell}) \simeq B(\ell\Lambda_n)$
4. $\mathfrak{g} = D_n^{(1)}$, $\iota^*(B^{k,\ell}) \simeq B(\ell\Lambda_1)$, $(k = 1, n-1, n)$

定理 1.2 ([3])

1. $\mathfrak{g} = C_n^{(1)}$, $\iota^*(B^{1,\ell}) \simeq B(2\ell\Lambda_1) \oplus B(2(\ell-1)\Lambda_1) \oplus \dots \oplus B(2\Lambda_1) \oplus B(0)$

ここで $B(\Lambda)$ は、highest weight Λ を持つ $U_q(\bar{\mathfrak{g}})$ の有限次元既約表現の crystal base である。

2 Main Theorem

新しく得られた perfect crystal について述べる。

定理 2.1 $\mathfrak{g} = B_n^{(1)}$, $C_n^{(1)}$, $D_n^{(1)}$ とする。自然数 k ($1 \leq k \leq n$) に対して、 $U'_q(\mathfrak{g})$ の level 1 の perfect crystal $B^{k,1}$ で、 $U_q(\bar{\mathfrak{g}})$ -crystal としては、次の同型を持つものが存在する。

$$\iota_0^*(B^{k,1}) \simeq B(a_k\Lambda_k) \oplus \left(\bigoplus_{\Lambda < a_k\Lambda_k} B(\Lambda) \right)$$

ただし、 a_k は、

$$a_k = \begin{cases} 1 & \alpha_k : \text{long root} \\ 2 & \alpha_k : \text{short root} \end{cases}$$

で与えられる整数、 $<$ は $\sum_{i=1}^n \mathbf{Z}_{\geq 0} \alpha_i$ に関する dominance order である。

最後に、 $\iota_0^*(B^{k,1})$ の具体的な形について述べる。

1. $\mathfrak{g} = B_n^{(1)}$ の時、 $1 \leq k \leq n-1$ について、

$$\iota_0^*(B^{k,1}) \simeq B(\Lambda_k) \oplus B(\Lambda_{k-2}) \oplus \cdots \oplus (B(\Lambda_1) \text{ or } B(0)).$$

$k = n$ について、

$$\iota_0^*(B^{k,1}) \simeq B(2\Lambda_n) \oplus B(\Lambda_{n-2}) \oplus B(\Lambda_{n-4}) \oplus \cdots \oplus (B(\Lambda_1) \text{ or } B(0)).$$

2. $\mathfrak{g} = C_n^{(1)}$ の時、 $1 \leq k \leq n-1$ について、

$$\iota_0^*(B^{k,1}) \simeq (2\Lambda_k) \oplus B(2\Lambda_{k-1}) \oplus \cdots \oplus B(2\Lambda_1) \oplus B(0).$$

$k = n$ について、

$$\iota_0^*(B^{k,1}) \simeq B(\Lambda_n).$$

3. $\mathfrak{g} = D_n^{(1)}$ の時、 $1 \leq k \leq n-2$ について、

$$\iota_0^*(B^{k,1}) \simeq B(\Lambda_k) \oplus B(\Lambda_{k-2}) \oplus \cdots \oplus (B(\Lambda_1) \text{ or } B(0)).$$

$k = n-1, n$ について、

$$\iota_0^*(B^{k,1}) \simeq B(\Lambda_k).$$

なお、 $\mathfrak{g} = B_n^{(1)}$, $k = 1$ または、 $\mathfrak{g} = C_n^{(1)}$, $k = 1, n$ または、 $\mathfrak{g} = D_n^{(1)}$, $k = 1, n-1, n$ の場合は [2]、[3] で与えられた完全結晶の level 1 の場合の例と一致する。

References

- [1] S-J. Kang, M. Kashiwara, K. C. Misra, T. Miwa, T. Nakashima and A. Nakayashiki: Affine crystals and vertex models, Int. J. Mod. Phys. A, **7**, Suppl. 1A (1992) 449–484.
- [2] S-J. Kang, M. Kashiwara, K. C. Misra, T. Miwa, T. Nakashima and A. Nakayashiki: Perfect crystals of quantum affine Lie algebras, Duke Math. J. **68** (1992) 499–607
- [3] S-J. Kang, M. Kashiwara and K. C. Misra: Crystal bases of Verma modules for quantum affine Lie algebras Compositio Math. **92** (1994) 299–325
- [4] S. Yamane: Perfect crystals of $U_q(G_2^{(1)})$, q-alg/9712012
- [5] O. Foda, K. C. Misra, M. Okado: Demazure modules and vertex models: the $\hat{sl}_2$ case, q-alg/9602018