

EXPLICIT NEWTON'S FORMULAS FOR $\mathfrak{gl}_n$

伊藤 稔 (京大理)

本講演では Lie 環 $\mathfrak{gl}_n$ の普遍包絡環 $U(\mathfrak{gl}_n)$ の中心の二つの基本的な生成系 — それぞれ Capelli [Ca1] と Gelfand [Ge] によって与えられた — の具体的な関係を述べる. 前者の生成系は行列式を用いて表示されるが, Lie 環 $\mathfrak{gl}_n$ に特有のものであり Capelli 恒等式を通じて古典的な不変式論で重要な役割を果たしてきた. 後者はトレースを用いて表され, その構成法はより一般に他の Lie 環にも適用できる. これら異なる性格の生成系の間の二つの具体的な関係式が主な結果である. 対称式のレベルではその関係式は基本対称式と巾和対称式の関係を表した Newton の公式に相当する.

まず上記の生成系の定義を与えよう. $\{E_{ij}\}$ を $\mathfrak{gl}_n$ の標準的な基底として, これらを要素とする行列 $E = (E_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ を考える. 行列式

$$(1) \quad C(\lambda) = \det(E + \text{diag}(n-1, n-2, \dots, 0) - \lambda I)$$

は任意の λ に対し普遍包絡環の中心 $ZU(\mathfrak{gl}_n)$ に属することが知られている. ここで非可換な要素を持つ行列式は次の交代和で定義している:

$$\det(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}.$$

r 次の Capelli element C_r をこの $C(\lambda)$ の展開

$$(2) \quad C(\lambda) = \sum_{r=0}^n (-)^r \lambda^{(r)} C_{n-r}$$

で定義する. ただし $\lambda^{(r)} = \lambda(\lambda-1) \cdots (\lambda-r+1)$ は階乗関数を表す. この $C_1, \dots, C_n$ は $ZU(\mathfrak{gl}_n)$ を生成することが知られている.

一方 Gelfand によって与えられた生成系は

$$(3) \quad P_r = \text{tr}(E^r) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_r} E_{i_1 i_2} E_{i_2 i_3} \cdots E_{i_r i_1}$$

と表される. この $P_1, \dots, P_n$ が中心 $ZU(\mathfrak{gl}_n)$ に属することは容易に分かるが, さらに $ZU(\mathfrak{gl}_n)$ を生成していることが知られている.

本講演の主結果はこれら二つの生成系の間の関係を表す次の二つの等式である.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}\text{-}\mathcal{T}\mathcal{E}\mathcal{X}$

Theorem 1. (Newton's formulas for g_n) C_r と P_r の間に次の関係が成り立つ:

$$\begin{aligned}
 (i) \quad & \sum_{r=0}^k (-)^r \tilde{C}_{k-r} P_r = -(\tilde{C}_{k+1} - \tilde{C}_{k+1}(-1)) \\
 & = \sum_{t=0}^k \binom{n-k+t}{n-k-1} \tilde{C}_{k-t}. \\
 (ii) \quad & \sum_{r=0}^k (-)^r C_{k-r}(k-n) \tilde{P}_r = -(C_{k+1}(k-n) - C_{k+1}(k-n-1)) \\
 & = (n-k)C_k(k-n-1).
 \end{aligned}$$

ここで $\tilde{C}_r, \tilde{C}_r(\lambda), C_r(\lambda), \tilde{P}_r$ は次で定義される:

$$\begin{aligned}
 C(\lambda) &= \sum_{r=0}^n (-)^r \lambda^r \tilde{C}_{n-r}, \\
 C(\lambda + \mu) &= \sum_{r=0}^n (-)^r \lambda^r \tilde{C}_{n-r}(\mu) = \sum_{r=0}^n (-)^r \lambda^{(r)} C_{n-r}(\mu), \\
 \tilde{P}_r &= \text{tr}(E^{(r)}) = \text{tr}(E(E-I) \cdots (E-(r-1)I)).
 \end{aligned}$$

Remark: Theorem 1 に現れる $\tilde{C}_r, \tilde{C}_r(\lambda), C_r(\lambda), \tilde{P}_r$ は $C_0, \dots, C_r$ または $P_0, \dots, P_r$ の第 1 種 Stirling 数および二項係数を係数とする線型和で書くことができる. しかし Theorem 1 の (ii) は単にこれらの線型変換のみによっては (i) から導かれないことに注意する.

この関係式は対称式に関する Newton の公式に相当するものである. 実際 E の代わりに可換な要素を持つ行列を考えると, C_r と P_r はそれぞれ行列の固有値の r 次基本対称式と r 乗和に相当する. 次のように古典的な Newton の公式はそれらの関係を表している.

Theorem 2. (Classical Newton's formula) n 変数の対称式環において r 次基本対称式 s_r と r 次巾和対称式 q_r の間に次の関係が成立する:

$$\sum_{r=0}^k (-)^r s_{k-r} q_r = (n-k)s_k.$$

この古典的公式との比較に関し少し注意をしておく. Theorem 1 の右辺に現れる後退差分は Newton の公式では微分に相当する (Note の (5) を参照). この意味で Theorem 1 の (i) は Newton の公式に対応する. 実際 Theorem 2 の右辺は微分を用いて

$$(n-k)s_k(x_1, \dots, x_n) = - \frac{d}{d\lambda} s_{k+1}(x_1 - \lambda, \dots, x_n - \lambda) \Big|_{\lambda=0}$$

と書くことができる. Theorem 1 の (ii) に相当する古典的公式は次の (4) になるが, それが既に Capelli によって得られていたことは興味深い ([Ca2]):

$$(4) \quad \sum_{r=0}^k (-)^r \tilde{s}_{k-r}(k-n) \tilde{q}_r = - \frac{d}{d\lambda} \tilde{s}_{k+1}(k-n+\lambda) \Big|_{\lambda=0}.$$

ここで $\tilde{q}_r, \tilde{s}_r, \tilde{s}_r(\lambda)$ は $\tilde{q}_r = \sum_{i=1}^n x_i^{(r)}$ と

$$(x_1 - \lambda) \cdots (x_n - \lambda) = \sum_{r=0}^n (-)^r \lambda^{(r)} \tilde{s}_{n-r},$$

$$(x_1 - \lambda - \mu) \cdots (x_n - \lambda - \mu) = \sum_{r=0}^n (-)^r \lambda^{(r)} \tilde{s}_{n-r}(\mu)$$

によって定められる.

Note: Theorem 1 の (i) は $U(\mathfrak{gl}_n)$ -係数の形式的巾級数の等式

$$(5) \quad \frac{C(\lambda) - C(\lambda - 1)}{C(\lambda)} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-1-k} P_k$$

に書き直される ([U]). この等式は Lie superalgebra の Yangian におけるさらに一般的な結果からも導かれる ([Na1], [MNO]) が, 我々の扱いはより直接的である. また先程述べたように (ii) は (i) の単純な帰結ではない.

Sketch of proof. 以下 Theorem 1 の (i) の証明の概略を述べよう. [PP1] における P_r の固有値の記述を利用して, 既約表現における固有値の関係に帰着させる. なお (ii) もやや複雑だが同様の方法で証明される.

普遍包絡環 $U(\mathfrak{gl}_n)$ の各元は既約表現全体で決定されるから, Theorem 1 の (i) を証明するには深さ n 以下の Young 図形 D に対し次の関係式を示せばよい:

$$(6) \quad \sum_{r=0}^k (-)^r \tilde{C}_{k-r}^D P_r^D = -(\tilde{C}_{k+1}^D - \tilde{C}_{k+1}^D(-1)).$$

ここで D でパラメトライズされる $U(\mathfrak{gl}_n)$ の既約表現 ρ_D における $Z \in ZU(\mathfrak{gl}_n)$ の固有値を Z^D で表している. 固有値 $\tilde{C}_r^D$ と P_r^D の具体的な記述は次の Lemma 3, 4 で与えられる.

$D = (m_1, m_2, \dots, m_n)$ に対し $l_i = m_i + (n - i)$ とおく.

Lemma 3. $C(\lambda)$ の固有値は次で与えられる:

$$C^D(\lambda) = (l_1 - \lambda)(l_2 - \lambda) \cdots (l_n - \lambda).$$

特に $\tilde{C}_r^D$ は $l_1, \dots, l_n$ の r 次基本対称式となる.

Lemma 4. P_r の固有値は次で与えられる:

$$P_r^D = S(A_D^r) = \sum_{i,j=1}^n (A_D^r)_{ij}.$$

ここで S は行列のすべての要素の和を表す. また A_D は

$$A_D = \begin{pmatrix} l_1 & -1 & \cdots & -1 \\ & l_2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & -1 \\ 0 & & & l_n \end{pmatrix}$$

という上三角行列である.

Lemma 3 は $C(\lambda)$ の highest weight vector への作用により簡単に確かめることができるが, Lemma 4 は自明ではない ([PP1] または [Z] の Ch.XI を参照).

Lemma 3, 4 より等式 (6) の両辺は $l_1, \dots, l_n$ の多項式である. よって (6) は $l_1, \dots, l_n$ を不定元と見なして証明すればよい. 以下 $l_1, \dots, l_n$ を不定元として議論を進める. Lemma 3 により行列 A_D の固有多項式は

$$\det(\lambda I - A_D) = (\lambda - l_1) \cdots (\lambda - l_n) = \sum_{r=0}^n (-)^{n-r} \tilde{C}_{n-r}^D \lambda^r$$

と展開される. Cayley-Hamilton の定理より,

$$(7) \quad A_D^n - \tilde{C}_1^D A_D^{n-1} + \tilde{C}_2^D A_D^{n-2} - \cdots + (-)^n \tilde{C}_n^D I = 0$$

を得る. Lemma 4 から $k = n$ のとき目標の等式 (6) は単に (7) の行列要素の和を取ることにより得られる. 一般の k に対しては (7) に A_D^{k-n} を掛けて行列要素の和を取る:

$$(8) \quad S(A_D^k) - \tilde{C}_1^D S(A_D^{k-1}) + \tilde{C}_2^D S(A_D^{k-2}) - \cdots + (-)^k \tilde{C}_k^D S(I) \\ = -\{(-)^{k+1} \tilde{C}_{k+1}^D S(A_D^{-1}) + \cdots + (-)^n \tilde{C}_n^D S(A_D^{k-n})\}.$$

Lemma 4 から (8) の左辺は (6) の左辺に等しい. また (8) の右辺も次の二つの補題を用いて計算することによりやはり (6) の右辺に等しいことが分かる.

Lemma 5. A_D の逆行列は次で与えられる:

$$(A_D^{-1})_{ij} = \begin{cases} 0 & (i > j) \\ l_i^{-1} & (i = j) \\ \sum_{t=0}^{j-i-1} \sum_{i < \alpha_1 < \cdots < \alpha_t < j} l_i^{-1} l_{\alpha_1}^{-1} l_{\alpha_2}^{-1} \cdots l_{\alpha_t}^{-1} l_j^{-1} & (i < j). \end{cases}$$

Lemma 6. A_D^{-r} の各要素は $C[l_1^{-1}, \dots, l_n^{-1}]$ の元である. さらに $r \geq 2$ に対しては, イデアル $(l_1^{-2}, \dots, l_n^{-2})$ に属する. 従って各 l_i の次数が高々 1 であるような多項式と $S(A_D^{-r})$ との積の多項式部分は 0 である.

ここで Laurent 多項式に対しその多項式部分と分数式部分を直和分解

$$C[l_1, \dots, l_n, l_1^{-1}, \dots, l_n^{-1}] = C[l_1, \dots, l_n] \oplus R(l_1, \dots, l_n)$$

に従って定義している. ただし $R(l_1, \dots, l_n)$ はある i について $\alpha_i < 0$ であるような単項式 $l_1^{\alpha_1} l_2^{\alpha_2} \dots l_n^{\alpha_n}$ で張られる部分空間を表す. Lemma 5 により (8) の右辺は $l_1, \dots, l_n$ の Laurent 多項式であるが, 実際は左辺が多項式であるからその多項式部分に一致する. さらに Lemma 6 より (8) の右辺の第 r 項 $\tilde{C}_{k+r}^D S(A_D^{-r})$ は $r \geq 2$ のとき多項式部分を含まないことが分かる. ゆえに (8) の右辺はその第 1 項の多項式部分に帰着されるが, それは Lemma 5 を用いて容易に計算できる. 以上の手順により (6) が得られ, Theorem 1 の (i) が証明される.

Theorem 1 の (ii) は A_D の固有多項式を階乗関数で展開することで, (i) と同様の方法で証明される. また古典的な Newton の公式も A_D の代わりに不定元 x_i を対角に並べた行列 $\text{diag}(x_1, \dots, x_n)$ を考えることで同じように示すことができる.

REFERENCES

- [Ca1] A. Capelli, *Sur les opérations dans la théorie des formes algébriques*, Math. Ann. **37** (1890), 1–37.
- [Ca2] ———, *L'Analisi Algebrica e l'interpretazione fattoriale delle potenze*, Giornale di Matematiche di Battaglini **31** (1893), 291–313, 340–353; **33** (1895), 361–370.
- [Ge] I.M. Gelfand, *Center of the infinitesimal groups*, Mat. Sb. Nov. Ser. **26** (68) (1950), 103–112; English transl. in “Collected Papers” Vol. II, pp. 22–30.
- [H-C] Harish-Chandra, *On some applications of the universal enveloping algebra of a semi-simple Lie algebra*, Trans. Amer. Math. Soc. **70** (1951), 28–96.
- [H] R. Howe, *Remarks on classical invariant theory*, Trans. Amer. Math. Soc. **313** (1989), 539–570; Erratum, Trans. Amer. Math. Soc. **318** (1990), 823.
- [HU] R. Howe and T. Umeda, *The Capelli identity, the double commutant theorem, and multiplicity-free actions*, Math. Ann. **290** (1991), 565–619.
- [I] M. Itoh, *Explicit Newton's formulas for $\mathfrak{gl}_n$* , preprint (1997).
- [KS1] B. Kostant and S. Sahi, *The Capelli identity, tube domains and the generalized Laplace transform*, Adv. Math. **87** (1991), 71–92.

- [KS2] ———, *Jordan algebras and Capelli identities*, Invent. Math. **112** (1993), 657–664.
- [MNO] A. Molev, M. Nazarov and G. Olshanskii, *Yangians and classical Lie algebras*, Russian Math. Surveys **51** (1996), 205–282.
- [Na1] M. Nazarov, *Quantum Berezinian and the classical Capelli identity*, Lett. Math. Phys. **21** (1991), 123–131.
- [Na2] ———, *Yangians and Capelli identities*, in “A. A. Kirillov Seminar on Representation Theory”, AMS, Providence, 1997; q-alg/9601027.
- [NaTa] M. Nazarov and V. Tarasov, *Yangians and Gelfand-Zetlin bases*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **30** (1994), 459–478.
- [N] I. Newton, *Arithmetica universalis*, 1707.
- [NUW] M. Noumi, T. Umeda and M. Wakayama, *A quantum analogue of the Capelli identity and an elementary differential calculus on $GL_q(n)$* , Duke Math. J. **76** (1994), 567–594.
- [O] H. Ochiai, *Harish-Chandra isomorphism for $\mathfrak{gl}_n$* , private notes (1996).
- [Ok] A. Okounkov, *Quantum immanants and higher Capelli identities*, Transformation Groups **1** (1996), 99–126.
- [PP1] A.M. Perelomov and V.S. Popov, *Casimir operators for $U(n)$ and $SU(n)$* , Soviet J. Nuclear Phys. **3** (1966), 676–680.
- [PP2] ———, *Casimir operators for the orthogonal and symmetric groups*, Soviet J. Nuclear Phys. **3** (1966), 819–824.
- [U] T. Umeda, *Newton's formula for $\mathfrak{gl}_n$* , to appear in Proc. Amer. Math. Soc..
- [W] E. Weyl, *The Classical Groups, their Invariants and Representations*, Princeton Univ. Press, 1939; 2nd ed., 1946.
- [Z] D.P. Želobenko, *Compact Lie groups and their Representations*, Transl. Math. Monographs **40** (Amer. Math. Soc.), 1973.