

対称行列の行列式環の重複度と セルバーグ型積分*

落合 啓之 (Hiroyuki Ochiai, 立教大理)

Abstract : N 次対称行列で階数が r 以下のもののなす代数多様体の上の関数環 S_{r+1} (つまり, $r+1$ 次の小行列式達の生成するイデアルによる剰余環) について報告する.

定理 S_{r+1} の重複度 $e(S_{r+1})$ は次の式で与えられる.

$$\begin{aligned} e(S_{r+1}) &= \prod_{l=0}^{r-1} \frac{l! (2N - 2r + l)!!}{l!! (N - r + l)!} \\ &= 2^{-(N-r)(N-r-1)/2} \det \left(\binom{n}{n-r+i-2j+1} \right)_{1 \leq i, j \leq n-r} \end{aligned}$$

前半では, 代数幾何, 不変式論, 表現論, 組み合わせ論の関係する事柄をざっと復習する. 次に重複度の定義を復習して上の定理を説明する. 最後にこの公式と 1 次式のべき積の積分との関係に触れる.

またこの文章では行きがかり上, 対称行列に対して議論しているが, 交代行列, 及び長方形の行列の場合も全ての議論は並行に進む.

1 S_{r+1} の定義といろいろな言い換え

1.1 可換環論的記述

$\mathbb{C}$ を標数が 2 でない代数閉体とする. たとえば複素数体でよい. Sym_N を $\mathbb{C}$ 上の N 次対称行列全体とする;

$$\text{Sym}_N := \{X \in \text{Mat}(N, \mathbb{C}) \mid X = {}^t X\}.$$

*表現論シンポジウム (1997) 報告集

Sym_N は $\mathbb{C}$ 上の $(N+1)N/2$ 次元の線形空間である。 Sym_N の閉部分代数多様体 $\text{Sym}_{N,r}$ を次のように定義する。

$$\text{Sym}_{N,r} := \{X \in \text{Sym}_N \mid \text{rank}(X) \leq r\}.$$

この集合の定義イデアルを I_{r+1} と記す；

$$I_{r+1} := \{p \in \mathbb{C}[\text{Sym}_N] \mid p \text{ vanishes on } \text{Sym}_{N,r}\}.$$

添え字のずれは慣習に合わせた。行列の「階数が $r+1$ より小さい」という条件は「 $(r+1)$ 次のすべての小行列式が消える」と言い直すことができる。従って I_{r+1} は $(r+1)$ 次の小行列式たちで生成されるイデアルである。 $\text{Sym}_{N,r}$ を *determinantal variety* あるいは *rank variety* と呼ぶ。

(アフィン) 代数多様体 $\text{Sym}_{N,r}$ の座標環 S_{r+1} は Sym_N の座標環 (すなわち多項式環) をイデアル I_{r+1} で割った商環と定義して良い。

$$S_{r+1} = \mathbb{C}[\text{Sym}_{N,r}] := \mathbb{C}[\text{Sym}_N]/I_{r+1}.$$

多項式環 Sym_N には多項式の次数による階数づけが入っている。イデアル I_{r+1} は斉次なので S_{r+1} も自然に階数づけられた環 (graded algebra) になる。 S_{r+1} は正規 (normal) で Cohen-Macaulay である [BH, Remark 7.3.7(c)], [DEP, §18], [H].

1.2 不変式論との関係

古典的な不変式論と S_{r+1} との関係を述べる。 $\text{Mat}(N, r)$ で N 行 r 列の行列全体を表す。まず、写像

$$\psi : \text{Mat}(N, r) \ni Y \mapsto Y \cdot {}^t Y \in \text{Sym}_{N,r}$$

を定義する。これは2次の斉次多項式写像である。この写像 ψ は (閉体 $\mathbb{C}$ 上) 全射である。この写像 ψ は $GL(N) \times O(r)$ 共変である。

$$\psi(gYh) = g\psi(Y)g, \quad g \in GL(N), h \in O(r).$$

ψ は階数付き環の間の準同型

$$\psi^* : \mathbb{C}[\text{Sym}_{N,r}] \rightarrow \mathbb{C}[\text{Mat}(N, r)]^{O(r)}$$

を誘導する。古典的な不変式論 (classical invariant theory) によればこの準同型は同型になる。

$$\psi^* : S_{r+1} \cong \mathbb{C}[\text{Sym}_{N,r}] \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[\text{Mat}(N, r)]^{O(r)}.$$

これが不変式論による S_{r+1} の記述である. ψ は2次の写像なので階数 (degree) は2倍に勘定することに注意しておこう. つまり S_{r+1} の n 次斉次成分は ψ^* を通じて

$$\mathbf{C}[\mathrm{Mat}(N, r)]_{2n}^{O(r)} = \mathbf{C}[\mathrm{Mat}(N, r)]^{O(r)} \cap \mathbf{C}[\mathrm{Mat}(N, r)]_{2n}$$

に同型である.

幾何学的不変式論 (geometric invariant theory [Mu]) の言葉遣いでは, 幾何学的商 $\mathrm{Mat}(N, r)//O(r)$ はその関数環

$$\mathbf{C}[\mathrm{Mat}(N, r)//O(r)] := \mathbf{C}[\mathrm{Mat}(N, r)]^{O(r)}$$

を通じて定義される. この言い方を用いると

$$\mathrm{Sym}_{N, r} \cong \mathrm{Mat}(N, r)//O(r).$$

$\mathrm{Sym}_{N, r}$ の次元 d は $\mathrm{Mat}(N, r)$ の次元から $O(r)$ の次元を引いたものと一致する. それは

$$Nr - r(r-1)/2 = N(N+1)/2 - (N-r)(N-r+1)/2.$$

1.3 組み合わせ論による記述

$\mathbf{C}[\mathrm{Mat}(N, r)]_{2n}$ の $GL(N) \times GL(r)$ -module としての既約分解は (おおげさにいえば) Schur-Weyl duality によってわかり, それは $2n$ の分割によって記述される. そこに現れる $GL(r)$ の既約表現のうち $O(r)$ -spherical なものはちょうど even partition に対応している

$$2\mu = (2\mu_1 \geq 2\mu_2 \geq \cdots \geq 2\mu_r \geq 0).$$

分割 2μ に対応する $GL(N)$ の既約表現を $\pi_{2\mu}$ と記せば $O(r)$ 不変部分の既約分解は

$$\mathbf{C}[\mathrm{Mat}(N, r)]_{2n}^{O(r)} = \bigoplus_{\mu} \pi_{2\mu} \quad \text{as } GL(N)\text{-module.}$$

ここで右辺の μ に関する和は, 深さ r 以下の n の分割全体をわたる.

従って各 graded piece $\mathbf{C}[\mathrm{Mat}(N, r)]_{2n}^{O(r)}$ の次元は表現 $\pi_{2\mu}$ の次元 $\dim \pi_{2\mu}$ の和として

(すなわち組み合わせ論的に) 書き表すことができる. 各既約表現は Weyl の次元公式によれば

$$\dim \pi_{2\mu} = \prod_{1 \leq i < j \leq N} \frac{2\mu_i - 2\mu_j + j - i}{j - i}$$

という具体的な表示を持つ. ここで $j > r$ の場合は $\mu_j = 0$ と約束した. 後の計算 (§3.2) に合わせるためにほんの少し書き替えると

$$\dim \pi_{2\mu} = \frac{2^{Nr-r(r+1)/2}}{\prod_{i=1}^r (N-i)!} \prod_{i=1}^r \prod_{j=i+1}^N \left(\mu_i - \mu_j + \frac{j-i}{2} \right).$$

1.4 oscillator 表現からの動機

このノートのテーマである S_{r+1} の重複度は実半単純 Lie 群の表現と次のように関連している. この節の記号は他の節では用いない.

今まで通り $0 \leq r \leq N$ を固定する. ユニタリ表現論の文脈では $r > N$ の場合を考察することにも意味があるが, ここでは考察の対象としない. reductive dual pair $\widetilde{Sp}(N, \mathbf{R}) \times O(r, \mathbf{R})$ を考える (R. Howe). ここで $\widetilde{Sp}(N, \mathbf{R})$ は (rank N の) symplectic 群 $Sp(N, \mathbf{R})$ の 2 重被覆 (metaplectic 群) であり, $O(r, \mathbf{R})$ は (compact) 定値直交群である. 大きな metaplectic 群 $\widetilde{Sp}(rN, \mathbf{R})$ の oscillator 表現 (= Segal-Shale-Weil 表現) を経由して $O(r)$ の (有限次元) 既約表現から $\widetilde{Sp}(N, \mathbf{R})$ の既約表現への対応 (theta 対応, lifting) が存在する. ここでは特に $O(r)$ の trivial 表現に対応した $\widetilde{Sp}(N, \mathbf{R})$ の表現を $L(r/2)$ と記し, 考察の対象とする.

と一見難しそうに言っても良いのだが, 表現 $L(r/2)$ の Harish-Chandra module $L(r/2)_K$ は今までの節の結果を利用して簡単に実現できている. 以下, 記号を用意してこれを説明する.

$Sp(N, \mathbf{R})$ の極大コンパクト部分群 $U(N)$ を取る. $Sp(N, \mathbf{R}), U(N)$ の Lie 環の複素化を $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$ と書く. 対応する Cartan 分解とそれに付随した三角分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p} = \mathfrak{p}^+ \oplus \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}^-$ とする. この時 $U(N)$ -module として $\mathfrak{p}^+ \cong \text{Sym}_N$ となる. $U(N)$ の中心 $U(1)$ が多項式の次数を測っているので, graded algebra としても同型になっていることに注意しておく. §1.3 の $GL(N, \mathbf{C})$ は $U(N)$ の複素化であることに注意しておこう.

これらの状況は全て二重被覆 $G = \widetilde{Sp}(N, \mathbf{R}) \supset K \curvearrowright$ 持ち上がる. そして, $L(r/2)$ は 1 次元 K -type

$$\det^{r/2} = \underbrace{(r/2, \dots, r/2)}_N$$

を持つような既約最高ウェイト表現となることが知られている. しかもその K -type は, 同型

$$L(r/2)_K \cong S(\mathfrak{p}^+)_r = \mathbf{C}[\text{Sym}_{N,r}]$$

によって完全にわかる. この同型を利用すると GK 次元や Bernstein degree の定義から直ちに

$$\text{「}L(r/2) \text{ の Gelfand-Kirillov 次元」} = \text{「}S_{r+1} \text{ の次元」}$$

$$\text{「}L(r/2) \text{ の Bernstein degree」} = \text{「}S_{r+1} \text{ の重複度」}$$

となる.

ついでながら交代行列や長方形列の場合には Hermitian type の直交群やユニタリ群を用いる.

2 Hilbert 多項式

2.1 重複度の定義, 基本性質

有限生成 graded module $M = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M_n$ の次元 d や重複度 e の定義を復習する. これらは各 graded piece M_n の ($\mathbb{C}$ 上の線形空間としての) 次元 $\dim M_n$ だけから決まる量である. この数列 $\{\dim M_n\}_n$ から二つの関数を定義しよう.

- $\chi(M, \cdot) : \text{Hilbert-Samuel 関数}$ または first iterated Hilbert 関数

$$\chi(n) = \chi(M, n) := \dim M_0 + \cdots + \dim M_n.$$

- $P(M, \cdot) : M$ の Hilbert series あるいは Poincaré series

$$P(M, t) := \sum_{n=0}^{\infty} t^n \dim(M_n) \in \mathbb{Z}[[t]].$$

どちらも $\dim M_n$ のすべての情報を保持しているが, ここで大切なのは $n \rightarrow \infty$ の漸近挙動である.

$\chi(M, \cdot)$ は $n \gg 0$ で多項式になる. その多項式の次数 d を M の次元という. χ の最高次係数の係数から M の重複度 e が定義される.

$$\chi(t) = \frac{e}{d!} t^d + (\text{次数の低い項}).$$

$$e = d! \lim_{t \rightarrow \infty} \chi(t) t^{-d}.$$

以上を Poincaré 級数の言葉で言い直してみよう. M の Poincaré 級数 $P(M, t)$ は有理関数 (を $t = 0$ で Laurent 展開したもの) であって

$$P(M, t) = \frac{Q(t)}{(1-t)^d}$$

と書き表すことができる. ここで分子 $Q(t) \in \mathbb{Z}[t]$ は $Q(1) \neq 0$ を満たすように選ぶ (約分しておく). この時の分母の因子の重複度 d が M の次元となり, その係数が M の重複度を表す:

$$e = Q(1) = P(M, t)(1-t)^d \Big|_{t=1}.$$

重複度は加群の直和に関して '加法的' であり, テンソル積に関して乗法的である.

M が既約な affine 代数多様体の関数環の場合には, 次元 d は対応する代数多様体の (regular part の) 次元と一致する. さらに M が超曲面の場合には, 重複度は定義式の次数と一致する.

Example 2.1. 最も典型的な多項式環の場合の次元と重複度を復習しておく. $R = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_d]$ を d 変数の多項式環とし多項式の次数による自然な階数を入れる. このとき

$$\dim R_n = \binom{n+d-1}{d-1}, \quad P(R, t) = (1-t)^{-d}, \quad \chi(R, t) = \binom{t+d}{d}.$$

従って R の次元は d で, 重複度は 1 である.

2.2 重複度の公式

前節では一般の階数付けられた環 M を考えたがこの節からはまた $M = S_{r+1}$ に戻る.

定理 S_{r+1} の重複度 $e(S_{r+1})$ は次の式で与えられる.

$$e(S_{r+1}) = \prod_{l=0}^{r-1} \frac{l! (2N - 2r + l)!}{l! (N - r + l)!}.$$

これは Giambelli の公式として知られている古い公式である.

2.3 Porteous の公式

特異点理論の研究者は determinantal variety を degeneracy loci と呼んでいる. [JLP], [HT] はベクトル束の間の写像の degeneracy loci の cohomology 類をベクトル束の特性類で記述する公式を与えている. これらの公式は一般化された Porteous の公式 [P] と呼ばれる. それを書くと corank r の degeneracy loci の類は

$$2^r \begin{vmatrix} c_r & c_{r+1} \\ c_{r-2} & c_{r-1} \\ \dots & \dots \\ & c_1 \end{vmatrix}.$$

ここで E を多様体 X 上のベクトル束とし, $c_i = c_i(E) \in H^{2i}(X, \mathbb{Z})$ をその Chern 類とした. ここに現れた多項式を Thom 多項式とも呼ぶ. 各類 c_i を重み i で勘定すれば上の行列式は重み $r(r+1)/2$ 斉次である. これは $\text{Sym}_{N, N-r}$ の Sym_N の中の余次元と一致している. この公式の証明は Intersection theory と密接に結びついている. 簡潔には [F2], 本格的には [F1] が参考となる.

Chern 類については次の事実を用いる. 全 Chern 類 $c(E)$ を Chern 類の母関数と定義する;

$$c(E) = 1 + c_1(E) + c_2(E) + \dots.$$

全 Chern 類はベクトル束の直和に対しては積で対応する.

$$c(E \oplus F) = c(E)c(F).$$

また直積に対しては Chern root を用いて

$$c(E) = \prod_{j=1}^{\text{rk}(E)} (1 + \alpha_j), c(F) = \prod_{k=1}^{\text{rk}(F)} (1 + \beta_k)$$

ならば

$$c(E \otimes F) = \prod_{j=1}^{\text{rk}(E)} \prod_{k=1}^{\text{rk}(F)} (1 + \alpha_j + \beta_k).$$

ついでながらこれらの関係は Chern 指標が環準同型を与えているということと同値である.

2.4 公式 2.2 の証明

この項は [HT, Proposition 12] の証明が分かりやすい. 同型 $\text{Hom}(\mathcal{O}^N, \mathcal{O}(1)^N) \cong \text{End}(\mathcal{O}(1/2)^N)$ に鑑みれば, ここで考察の対象としているベクトル束 $E = \mathcal{O}(1/2)^N$ であることがわかる. $\omega \in H^2$ を超平面切断の定める cohomology 類とすれば上の計算公式によって E の全 Chern 類は $(1 + \omega/2)^N$ となる. 二項定理によってこれを展開すれば

$$c_i = \binom{N}{i} \left(\frac{\omega}{2}\right)^i$$

となる. これを上行列式に代入すると

$$2^{-r(r-1)/2} \begin{vmatrix} \binom{N}{r} & \binom{N}{r+1} & & \\ \binom{N}{r-2} & \binom{N}{r-1} & & \\ \dots & & \dots & \\ & & & \binom{N}{1} \end{vmatrix} \omega^{r(r+1)/2}$$

を得る. S_{N-r+1} の重複度はここに現れた $\omega^{r(r+1)/2}$ の係数に他ならない. van der Monde 型の展開によって積による表示も直ちに得られる. $\square$

行列式型の表示は Schur 関数のそのものであり単位元での値は対応する既約表現の次元を表す. Weyl の次元公式によればそれは正ルートを渡る積で書ける. これが重複度の積による表示 (2.2) に他ならない. 「Schubert calculus は Schur 多項式のなす代数である」という哲学 [F1, p278] によればこのような表示は幾何的な意味からも望ましい.

3 積分による表示

この節は論理的には必要なくなったが, シンポジウムの際に議論になった事柄を報告としてまとめておこう.

3.1 定義

自然数 r と非負の実数 $m \geq 0$ に対して

$$I(m, r) = \int_{\Omega_r} dx_1 \cdots dx_r (x_1 x_2 \cdots x_r)^m \prod_{1 \leq i < j \leq r} |x_i - x_j|$$

と $I(m, r)$ を定義する. ここで積分領域 $\Omega_r \subset \mathbf{R}^r$ は次のように定義される r -単体 (simplex) である.

$$\Omega_r := \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_r) \in \mathbf{R}^r \left| \begin{array}{l} x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_r \geq 0, \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_r \leq 1 \end{array} \right. \right\}.$$

等質空間上の Haar 測度を適切に正規化すれば

$$I(m, r) = \int_{g \in GL(r, \mathbf{R}) / O(r, \mathbf{R}), \text{tr} g^t g \leq 1} (\det g)^{2m} dg$$

という関係もある (see also [M, §6]).

3.2 重複度との関係

定理 S_{r+1} の重複度は次のような積分表示を持つ.

$$e(S_{r+1}) = \frac{2^{Nr-r(r+1)/2}}{r!} \frac{(Nr - \frac{r(r-1)}{2})!}{\prod_{i=1}^r (N-i)!} I(N-r, r).$$

証明 $d = Nr - r(r-1)/2$ と置き $n^{-d} \chi(n)$ を計算する. § 1.3 の記号を踏襲すると

$$\begin{aligned} n^{-d} \chi(n) &= n^{-d} \sum_{n' \leq n} \mathbf{C}[\text{Mat}(N, r)]_{2n'}^{O(r)} \\ &= n^{-d} \sum_{|\mu| \leq n} \dim \pi_{2\mu} \\ &= \frac{2^{Nr-r(r+1)/2}}{\prod_{i=1}^r (N-i)!} \frac{1}{n^r} \sum_{|\mu| \leq n} \prod_{i=1}^r \prod_{j=i+1}^N \frac{\mu_i - \mu_j + \frac{j-i}{2}}{n} \\ &= \frac{2^{Nr-r(r+1)/2}}{\prod_{i=1}^r (N-i)!} \frac{1}{n^r} \sum_{|\mu| \leq n} \prod_{1 \leq i \leq r < j \leq N} \frac{\mu_i + \frac{j-i}{2}}{n} \prod_{1 \leq i < j \leq r} \frac{\mu_i - \mu_j + \frac{j-i}{2}}{n}. \end{aligned}$$

ここで $n \rightarrow \infty$ の極限を取ると

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n^r} \sum_{|\mu| \leq n} \prod_{1 \leq i \leq r < j \leq N} \frac{\mu_i + \frac{j-i}{2}}{n} \prod_{1 \leq i < j \leq r} \frac{\mu_i - \mu_j + \frac{j-i}{2}}{n} \\ & \longrightarrow \int dx_1 \cdots dx_r (x_1 x_2 \cdots x_r)^{N-r} \prod_{1 \leq i < j \leq r} (x_i - x_j). \end{aligned}$$

この積分の積分領域は

$$x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_r \geq 0, \quad x_1 + \cdots + x_r \leq 1.$$

従って積分領域を答の領域に合わせるときに答の分母の因子 $r!$ が登場する. 答に現れている分子の因子 $(Nr - \frac{r(r-1)}{2})! = d!$ は重複度の定義に現れている係数である.

3.3 系

したがって, 整数 $m \geq 0$ に対しては $I(m, r)$ は

$$I(m, r) = \frac{\prod_{l=0}^{r-1} (l+1)!! \prod_{l=0}^{r-1} (2m+l)!!}{2^{mr+r(r-1)/2} (mr + \frac{r(r+1)}{2})!}.$$

のように与えられる. 現在ではこの事実の積分による証明はないらしい. この理由は積分範囲 Ω の境界 $x_1 + \cdots + x_n = 1$ が integrand と無関係な‘恣意的な’境界であるために, 適切な意味で cycle になっていないからである. したがって $I(m, r)$ は積分 ($:=$ homology と cohomology の pairing) と呼ぶことはできず, そのような理論の恩恵にあずかることはできない. 形式的に $(1 - x_1 - \cdots - x_n)^\varepsilon$ の項を挿入してしかる後に $\varepsilon \rightarrow 0$ という案も提案されたが実行可能かという疑問符がつくようである.

したがってこの積分を実数 $m \geq 0$ に対して考察することが意味のある問題かどうかはわからず, また結果が Gamma 関数の比で書けるかどうかはわからない.

参考文献

- [B] W. Barth, Counting singularities of quadratic forms on vector bundles, Progress in Math. 7, Birkhäuser, 1971, 1–19.
- [BH] W. Bruns, J. Herzog, Cohen-Macaulay Rings, Cambridge University Press, 1993, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 39

- [DEP] C. De Concini, D. Eisenbud, C. Procesi, Hodge Algebras, *Asterisque* **91** (1982) Soc. Math. de France
- [F1] W. Fulton, Intersection Theory, Springer, *Ergeb. Math. Grenz.* **2**, 1984. 特に Chapter 14, Degeneracy loci and Grassmannians.
- [F2] W. Fulton, Introduction to Intersection Theory in Algebraic Geometry, AMS, *CMBS* **54**, 1984. 特に Section 6.
- [G] A. Gyoja, Character sums and intersection cohomology complexes associated to the space of square matrices, *Indag. Math.* **8(3)** (1997) 371–385.
- [HT] J. Harris, L. W. Tu, On symmetric and skew-symmetric determinantal varieties, *Topology* **23** (1984) 71–84.
- [H] M. Hashimoto, Resolutions of determinantal ideals — A counterexample on symmetric matrices, *Proc. of the 26th symposium on ring theory*, 1993, 43–51
- [Ho] 堀田良之, 環と体 I, 岩波講座, 現代数学の基礎 **15**, 1997
- [J] T. Józefiak, Ideals generated by minors of a symmetric matrix, *Comment. Math. Helv.*, **53** (1978) 595–607
- [JLP] T. Józefiak, A. Lascoux, P. Pragacz, Classes of determinantal varieties associated with symmetric and skew-symmetric matrices, *Izvestia* **45** (1981) 662–673, *Math. USSR Izvestija* **18** (1982) 575–586,
- [JPW] T. Józefiak, P. Pragacz, J. Weyman, Resolutions of determinantal varieties and tensor complexes associated with symmetric matrix, *Asterisque*, **87–88** (1981) 109–189
- [KL] G. R. Kempf, D. Laksov, The determinantal formula of Schubert calculus, *Acta Math.* **132** (1974) 153–162
- [K'L] S. L. Kleiman, D. Laksov, Another proof of the existence of special divisors, *Acta Math.* **132** (1974) 163–176,
- [M] M. L. Mehta, Random matrix, 2nd ed., Academic Press, 1991.
- [Mu] D. Mumford, Geometric Invariant Theory, Springer, *Ergeb. Math.* **34**, 1965; 3rd ed. with J. Fogarty, F. Kirwan, 1994.

- [N] K. Nishiyama, Reductive dual pair and Weil representation, Proceeding of Summer School on Number Theory 4 (1997) 63–88 (in Japanese)
- [O] H. Ochiai, 対称行列の行列式環の重複度とセルバーグ型積分, 表現論シンポジウム予稿 (1997) 51–63
- [P] P. Pragacz, Cycles of isotropic subspaces and formulas for symmetric degeneracy loci, Topics in Algebra, Banach center publications **26** No.2 (1990) 189–199.
- [Po] I. R. Porteous, Simple singularities of maps, Proc. Liverpool Singularities Symposium I, Lecture Notes in Math. **192** (Edited by C. T. C. Wall), Springer (1971) 286–307.

e-mail: ochiai@rkmath.rikkyo.ac.jp