

表現論とゼータの零点と極 [Representation theory and zeta's zeros-poles]

黒川 信重
[Nobushige KUROKAWA/Zeta Institute]

§0. A Problem [A "representation theoretic formulation" of the Hilbert-Polya conjecture (1915).]

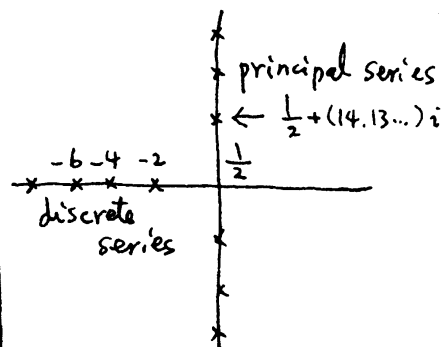
Let $\zeta(s) = \prod_{p: \text{primes}} (1 - p^{-s})^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$: the Riemann ζ .

Prove the Riemann hypothesis ($\zeta(s)=0, s \notin \mathbb{R} \Rightarrow \text{Re}(s)=\frac{1}{2}$) by using the representation theory of a suitable pair of groups $G \supset \Gamma$ satisfying the following conditions:

(a) $L^2(\Gamma \backslash G) = \bigoplus_{\pi \in \hat{G}} m(\pi) \pi$ with an embedding $\hat{G} \hookrightarrow (\frac{1}{2} + i\mathbb{R}) \cup \mathbb{Z}$.

(b) $\zeta(s)(s-1) = \prod_{\pi \in \hat{G}} (s - \pi)^{m(\pi)}$.

Suggestions:
(a) $\Leftrightarrow$ "eigenvalues of Laplace (Casimir, Dirac) operator explain Zeta's zeros-poles"
(b) $\Leftrightarrow$ "{primitive conjugacy classes of Γ } $\leftrightarrow$ {primes}."
So, the pair (G, Γ) is curious enough!
Skip §1-§3, and go to the end of this report.



§1. Selberg ζ (Selberg 1956, Gangalli 1977, Wakayama 1985, ...)

G を階数 1 の半単純 4 -群, Γ を G の離散部分群

$\text{vol}(\Gamma \backslash G) < \infty$ となるものに対し, $X = \Gamma \backslash G / K$

(K は G の極大コンパクト部分群) とおくと, X の Selberg ζ

$$\zeta_X(s) = \prod_{p \in \text{Prim}(X)} (1 - N(p)^{-s})^{-1}$$

が構成される。ここで, $\text{Prim}(X)$ は X の素な閉測地線全体

であり, $N(p) = \exp(\text{length}(p))$. [見方を変えて

$$\zeta_{\Gamma}(s) = \prod_{p \in \text{Prim}(\Gamma)} (1 - N(p)^{-s})^{-1} \quad \text{と考えることもできる。}$$

$\text{Prim}(\Gamma)$ は Γ の素な共役類全体で $\text{Prim}(X) \rightarrow \text{Prim}(\Gamma)$ はホモトピー類をとる写像.]

この ζ は 全 s -平面に有理型に解析接続され (その有理型関数としての位数は $\dim_{\mathbb{R}} X$ に等しい), その零点と極は X のラプラス作用素 Δ_X の $L^2(X)$ における固有値でわかる。

これは表現論的には G の $L^2(\Gamma \backslash G)$ における正則表現を

$$L^2(\Gamma \backslash G) = \bigoplus_{\pi \in \hat{G}} m(\pi) \pi$$

と分解したとき (いまは連続スペクトルを無視して書いてみる) に現れる π ($\hat{G} \hookrightarrow \mathbb{C}$ と埋め込んでおく) と $\zeta_X(s)$ の極・零点 とが一致することになる。

essential zeros・poles ($s \notin \mathbb{R}$) は principal series に, trivial zeros・poles ($s \in \mathbb{R}$) は discrete series に対応する。よって $\zeta_X(s)$ は Riemann hypothesis をみたすことがわかる。その証明の根拠は

Selberg trace formula

$$\sum_{p \in \text{Prim}(X)} M(p) = \sum_{\pi \in \hat{G}} m(\pi) W(\pi)$$

にあり, $M(p) = -\log(1 - N(p)^{-s})$, $W(\pi) = \log(s - \pi)$

のとき

$$\zeta_X(s) = \prod_{\pi \in \hat{G}} (s - \pi)^{m(\pi)}$$

を得る。[なお, $\zeta_X(s)$ の "gamma factor" は X の $\mathbb{Q}$ -1-形式双対 $X' = G'/K$ のラプラス作用素 $\Delta_{X'}$ $1 \leq i \leq 2$ $\det(\sqrt{\Delta_{X'} + p_0^2} + (s - p_0))$ と書ける。]

さらに $\rho: \pi_1(X) \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ から与えられるとき

$$\zeta_X(s, \rho) = \prod_{p \in \text{Prim}(X)} \det(1 - \rho(p) N(p)^{-s})^{-1}$$

が考えられる

$$\text{Ind}_F^G(\rho) = \bigoplus_{\pi \in \hat{G}} m_\rho(\pi) \pi$$

と表せる

$$\zeta_X(s, \rho) = \prod_{\pi \in \hat{G}} (s - \pi)^{m_\rho(\pi)}$$

と (本質的には) 書ける。

Problem A $\sup \{ m(\pi) \mid \pi \in \hat{G} : \text{principal series} \} < \infty ?$

[$\Leftrightarrow$ orders of essential zeros/poles of $\zeta_X(s)$ are bounded ?]

Problem B rank $G \geq 2$ case ($SL_3(\mathbb{R}), \dots$)?

dim $G = \infty$ case ($\text{Diff}(S^1), SO(1, \infty), \dots$)?

G : quantum group case?

§2. Ihara ζ (Ihara 1968, Sunada 1986, ...)

§1の類似の場合として $G = SL_2(\mathbb{Q}_p)$ (or $SL_2(\mathbb{Q}_p) \times SL_2(\mathbb{R})$)
 の場合を Ihara は考え, $\zeta_X(s)$ に対して, 矢張り同様の
 解釈 (表現論的, trace formula, ...) が与えられることを示した。
 [Labessee 等が補完]

この場合にも §1と異なる点を2点記す。

(a) $\zeta_X(s)$ は tree $T = "G/K"$ or "finite graph X "
 の解析によっても解釈できる。[むしろ, この解釈が
 普通と言える。ところで, $Aut(T) \supset \Gamma$ という
 "無限次元"の組に対応すると考えることもできる?]

(b) $\zeta_X(s)$ は $\mathbb{F}_p$ 上のある代数曲線の Hasse ζ
 となることがある。[したがって, この Hasse ζ に対しては
 §0の問題は解決する。]

Problem C infinite graph case?

§3. A categorical trial [Kurokawa 1984, 1996]

§0の問題を category を用いて考えよう。

いま $\mathcal{C}$ は 0-object をもつ category とする。このとき
 Hasse ζ

$$\zeta_{\mathcal{C}}^{\text{Hasse}}(s) = \prod_{p \in P_0(\mathcal{C})} (1 - N(p)^{-s})^{-1}$$

$$(P_0(\mathcal{C}) = \{\text{simple objects}\} / \sim, \quad N(p) = \# \text{End}_{\mathcal{C}}(p))$$

と Selberg ζ

$$\zeta_e^{\text{Selberg}}(s) = \prod_{p \in P_1(\mathcal{C})} (1 - N(p)^{-s})^{-1}$$

$$(P_1(\mathcal{C}) = \{ \text{"simple paths"} \} / \sim, \quad N(p) = \# \text{End}_{\text{path cat}}(p))$$

加構成 2"き, -22き:

Theorem $\zeta_e^{\text{Hasse}}(s) = \zeta_e^{\text{Selberg}}(s).$

[HASSELBERG §]

Example $\zeta(s) = \zeta_{\underline{\text{Ab}}}^{\text{Hasse}}(s) = \zeta_{\underline{\text{Ab}}}^{\text{Selberg}}(s).$

[$\underline{\text{Ab}}$ = cat of abelian groups]

Question Let $G = \text{Aut}(\widetilde{\underline{\text{Ab}}}) \supset \Gamma = \pi_1(\underline{\text{Ab}})$, and

$$L^2(\Gamma \backslash G) = \bigoplus_{\pi \in \widehat{G}} m(\pi) \pi. \quad \text{Then}$$

$$\zeta(s) = \prod_{\pi \in \widehat{G}} (s - \pi)^{m(\pi)} \quad ?$$

Moreover, all $m(\pi) \leq 1$?
["multiplicity one"]

[Remark: There exist other candidates $G = \text{GT}(\mathbb{R})$, $\Gamma = \text{GT}(\mathbb{Z})$ for the Grothendieck-Teichmüller group GT , etc.]

References

- [1] A. Selberg: "Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series" J. Indian Math. Soc. 20 (1956) 47-87.

[2] R. Gangolli "Zeta functions of Selberg's type for compact space forms of symmetric spaces of rank one"
Illinois J. Math. 21 (1977) 1-41.

[3] M. Wakayama "Zeta functions of Selberg's type associated with homogeneous vector bundles"
Hiroshima Math. J. 15 (1985) 235-295.

[4] Y. Ihara "The congruence monodromy problems"
J. Math. Soc. Japan 20 (1968) 107-121.

[5] T. Sunada "L-functions in geometry and some applications" Springer Lect. Notes in Math. 2001 (1986) 266-284.

[6] N. Kurokawa "On some Euler products(I)" Proc. Japan Acad. 1984

[7] N. Kurokawa "Zeta functions of categories" Proc. Japan Acad.
72A (1996) 221-222. 

~~~~~ 折りたたみ線 ~~~~~

Answer to the problem of §0:

$$G = \boxed{\phantom{0000}}, \quad \Gamma = \boxed{\phantom{0000}}.$$

"We are all agreed that your theory is crazy.

The question which divides us is whether it is crazy enough." Niels Bohr

[comment to Heisenberg-Pauli's "Ultimate Theory"]