

## 可解り一群の holomorphically induced representation

九大 数理 井上順子 (Junko Inoue)

$G$  を連結 Lie 群, その Lie 環を  $\mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{g}$  の双対ベクトル空間を  $\mathfrak{g}^*$ ,  $f \in \mathfrak{g}^*$  とする.  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  の複素部分 Lie 環  $\mathfrak{h}$  が条件:

$$X \in \mathfrak{h} \iff f([X, \mathfrak{h}]) = \{0\}, \quad X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}.$$

( $f$  は  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  上に線形に拡張しておく.) を満たす時,  $\mathfrak{h}$  を  $f$  における weak polarization と呼ぶ. weak polarization  $\mathfrak{h}$  が更に条件

(P): 部分空間  $\mathfrak{h} + \bar{\mathfrak{h}}$  は  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  の部分 Lie 環である

を満たす時,  $\mathfrak{h}$  を polarization と呼ぶ. また, 一般に weak polarization  $\mathfrak{h}$  に対し,  $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$  上定義された半線形形式  $S_f$ ,  $S_f(X, Y) = \sqrt{-1}f([X, \bar{Y}])$  が半正值の時,  $\mathfrak{h}$  を  $f$  に於いて positive であるという.

ここでは, weak polarization (必ずしも (P) を満たすとは限らない) から定義される,  $G$  の holomorphically induced representation を考察する.

以下, 対象を exponential 群  $G$  とする.  $f \in \mathfrak{g}^*$  における weak polarization  $\mathfrak{h}$  に対し,  $\mathfrak{d} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}$ ,  $D = \exp \mathfrak{d}$  (対応する連結部分群),  $\mathcal{E} = (\mathfrak{h} + \bar{\mathfrak{h}}) \cap \mathfrak{g}$  とし,  $D$  のユニタリ指標  $\chi_f$  を  $\chi_f(\exp X) = e^{\sqrt{-1}f(X)}$  ( $X \in \mathfrak{d}$ ) で定める. また,  $G, D$  の modular 関数をそれぞれ  $\Delta_G, \Delta_D$  で表す. 今  $\delta \in \mathcal{E}^*$  を

$$\delta(X) = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{tr}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{d}}(X) & X \in \mathfrak{d} \\ 0 & X \in \mathcal{E} \cap \mathfrak{n}(\mathfrak{g}) \end{cases}$$

(ここで  $\mathfrak{n}(\mathfrak{g})$  は  $\mathfrak{g}$  の nilradical.) を満たす様にとる.

この時,  $G$  上の  $C^\infty$  関数  $\phi$  で

$$(i) \phi(gd) = (\Delta_D(d)/\Delta_G(d))^{1/2} \chi_f(d)^{-1} \phi(g) \quad \forall d \in D, \forall g \in G,$$

$$(ii) \|\phi\|^2 = \int_{G/D} |\phi|^2 d\mu_{G,D} < \infty,$$

$$(iii) \mathcal{R}(X)\phi = (-\sqrt{-1}f(X) + \delta(X))\phi \quad \forall X \in \mathfrak{h},$$

(ここで  $\mathcal{R}$  は  $\mathfrak{g}$  の作用  $\mathcal{R}(X)\phi(g) = \frac{d}{dt} \phi(g \exp tX)|_{t=0}$  ( $X \in \mathfrak{g}$ ) を  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  に線形に拡張したもの.) を満たすもの全体の, ノルム  $\|\cdot\|$  による完備化を  $\mathcal{H}(\mathfrak{h}, f, \delta)$  とする. ( $\delta$  の条件より, (i) と (iii) が両立する.)  $G$  の holomorphically induced representation  $\rho = \rho(\mathfrak{h}, f, \delta)$  を  $\mathcal{H}(\mathfrak{h}, f, \delta)$  上で  $x \in G$  の作用  $\rho(x)\phi(g) = \phi(x^{-1}g)$  ( $g \in G$ ) により定義する.  $\rho$  は  $(D, \chi_f)$  からの通常の (Mackey) 誘導表現  $\text{ind}_D^G \chi_f$  の部分表現であるが, ここでは次の問題を考える.

**問題** (1)  $\rho$  が自明でない ( $\mathcal{H}(\mathfrak{h}, f, \delta) \neq \{0\}$ ) ための条件を求める.

(2)  $\rho \neq 0$  の時,  $\rho$  を既約分解する.

(3)  $\rho$  の既約分解に於いて, 既約表現  $\pi$  の重複度と空間

$$(\mathcal{H}_{\pi}^{-\infty})^{\mathfrak{h}, f, \delta} = \{a \in \mathcal{H}_{\pi}^{-\infty}; \pi(\bar{X})a = (\sqrt{-1}f(\bar{X}) + \delta(\bar{X}))a \quad \forall X \in \mathfrak{h}\}$$

の次元は一致するか? (相互律の問題) ここで,  $\mathcal{H}_{\pi}^{-\infty}$  は  $\pi$  の表現空間  $\mathcal{H}_{\pi}$  の  $C^{\infty}$  ベクトルの反双対空間で,  $\pi$  の微分表現を双対性により  $\mathcal{H}_{\pi}^{-\infty}$  に拡張しておく.

$\rho$  の  $C^{\infty}$  ベクトル  $\mathcal{H}(\mathfrak{h}, f, \delta)^{\infty}$  において  $G$  の単位元  $e$  における Dirac 測度  $a_{\rho}$  :  $\langle a_{\rho}, \phi \rangle = \overline{\phi(e)}$  は,  $a_{\rho} \in \mathcal{H}(\mathfrak{h}, f, \delta)^{-\infty}$  であって, semiinvariance :  $\rho(\bar{X})a_{\rho} = (\sqrt{-1}f(\bar{X}) + \delta(\bar{X}))a_{\rho}$  ( $\forall X \in \mathfrak{h}$ ) が成り立つ. Penney [P] により,  $a_{\rho}$  は  $\rho$  の既約分解に沿って分解され, 既約分解の Plancherel 測度に関して殆ど全ての  $\pi \in \hat{G}$  に対して不等式 ( $\pi$  の重複度)  $\leq \dim(\mathcal{H}_{\pi}^{-\infty})^{\mathfrak{h}, f, \delta}$  を得る.

さて,  $\mathfrak{h}$  が polarization である場合,  $\delta$  を自然に選ぶ事が出来, 通常  $\delta = \frac{1}{2} \text{tr}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{k}}$  等が用いられる. この時, (1), (2) についてはよく知られている (藤原 [F], Rossi-Vergne [R]). 特に  $\rho \neq 0$  ならば,  $\mathfrak{h}$  は positive である. また,  $\rho \neq 0$  の時  $\rho$  は既

約表現の直和に分解し, 各既約表現の重複度は Kirillov-Bernat 写像により対応する coadjoint 軌道を用いて記述出来る [F],[V].

これらを踏まえて, positive weak polarization からの誘導表現を調べよう. 但し, 巾零 Lie 群に於いては, positive weak polarization は実際には polarization であるので, 巾零でない群が対象となる事を注意しておく.

本稿では, Lie 環が正規  $\mathfrak{j}$  代数の構造を持つ場合に得られた結果について述べる.

定義. 次を満たす組  $(\mathfrak{g}, J, \omega)$  を正規  $\mathfrak{j}$  代数と呼ぶ.

- (i)  $\mathfrak{g}$  は完全可解 Lie 環である.
- (ii)  $J: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  は複素構造 ( $J^2 = -1$ ) である.
- (iii)  $[JX, JY] = J[JX, Y] + J[X, JY] + [X, Y] \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}$ .
- (iv)  $\omega \in \mathfrak{g}^*$  であって次を満たす:
  - (a)  $\omega([JX, JY]) = \omega([X, Y]) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}$ ,
  - (b)  $\omega([X, JX]) > 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g} \setminus \{0\}$ .

$\mathfrak{g} = (\mathfrak{g}, J, \omega)$  を正規  $\mathfrak{j}$  代数,  $G = \exp \mathfrak{g}$  を対応する連結単連結 Lie 群とする. この時  $G$  は coadjoint 作用で  $\mathfrak{g}^*$  に開軌道を持ち, 開軌道全体の和集合は  $\mathfrak{g}^*$  で Zariski 開集合をなす.

$f \in \mathfrak{g}^*$  を開軌道に属する点とし,  $\mathfrak{h}$  を  $f$  における positive weak polarization とする.  $\mathfrak{v}, \mathcal{E}$  等は前と同様とし,  $\mathcal{E}^\perp + f = \{\ell \in \mathfrak{g}^*; \ell(X) = f(X) \quad \forall X \in \mathcal{E}\}$ ,  $(\mathcal{E}^\perp + f)_+ = \{\ell \in \mathcal{E}^\perp + f; \sqrt{-1}\ell([X, \bar{X}]) \geq 0 \quad \forall X \in \mathfrak{h}\}$  とする.

以上の仮定の下,  $D$  からの誘導表現  $\text{ind}_D^G \chi_f$  は, Kirillov-Bernat 写像により開軌道に対応する既約表現の直和 ( $\mathfrak{h} \neq \bar{\mathfrak{h}}$  ならば重複度無限の直和) に分解することが分かっている.

定理 1.  $G = \exp \mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{h}$ ,  $f$  は上述のものとする.  $\pi$  を  $G$  の既約表現で, 対応する coadjoint 軌道  $\mathcal{O} = \mathcal{O}(\pi)$  が開軌道であるものとする.  $m(\mathcal{O})$  を  $(\mathcal{E}^\perp + f)_+ \cap \mathcal{O}$  に含まれる  $D$ -軌道の数とする. この時,  $m(\mathcal{O})$  は有限であって, 不等式

$$\dim(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{\mathfrak{h}, f, \delta} \leq m(\mathcal{O}) < \infty$$

が成り立つ.

定理 2. 定理 1 と同じ仮定の下で, 適当な  $\delta \in \mathcal{E}^*$  が存在して, 次が成り立つ.

$\rho = \rho(\mathfrak{h}, f, \delta) \neq 0$  であって,  $\rho = \bigoplus_\pi m(\mathcal{O}(\pi))\pi$  (開軌道に対応する既約表現  $\pi$  の直和) に分解する. 各開軌道に対応する既約表現  $\pi$  に対して, 等式

$$m(\mathcal{O}(\pi)) = (\pi \text{ の重複度}) = \dim(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{\mathfrak{h}, f, \delta} < \infty$$

が成り立つ.

注意. 特に  $\mathfrak{h}$  が positive polarization である場合,  $(\mathcal{E}^\perp + f)_+ = \mathcal{E}^\perp + f$  であるから, 定理 2 において等式  $m(\mathcal{O}(\pi)) = (\pi \text{ の重複度})$  は [F], [V] で与えられたものと一致する.

(相互律の問題 (3) は, polarization に対しても一般にはまだ未解決である.)

例.  $\mathfrak{g}$  を  $\mathfrak{g} = \mathbf{R}\text{-span}\{P, X, Y, Z\}$ ,  $[X, Y] = Z$ ,  $[P, X] = X$ ,  $[P, Y] = Y$ ,  $[P, Z] = 2Z$  で定義される Lie 環とし,  $J$  を  $J(X) = Y$ ,  $J(P) = 2Z$ ,  $J(Y) = -X$ ,  $J(Z) = -\frac{1}{2}P$  で定まる複素構造,  $\omega = -Z^*$  とすれば,  $(\mathfrak{g}, J, \omega)$  は正規  $\mathfrak{j}$  代数である. この時  $G = \exp \mathfrak{g}$  は 2 個の開軌道  $\mathcal{O}_+ = \{\ell; \ell(Z) > 0\}$ ,  $\mathcal{O}_- = \{\ell; \ell(Z) < 0\}$  を持つ. それぞれに対応する既約表現を  $\pi_+$ ,  $\pi_-$  とする.  $\mathfrak{h} = \mathbf{C}P + \mathbf{C}(X + \sqrt{-1}Y)$ ,  $f = Z^*$  とすれば,  $\mathfrak{h}$  は  $f$  における positive weak polarization であって,  $\mathfrak{h} + \bar{\mathfrak{h}}$  は部分 Lie 環でない.  $\mathcal{E}^\perp + f = \mathbf{R}Z^*$ ,  $(\mathcal{E}^\perp + f)_+ = \{\lambda Z^*; \lambda > 0\} = D \cdot Z^* \subset \mathcal{O}_+$  である. また,  $\delta \in \mathcal{E}^*$  は, 条件により,  $\delta(P) = 2$ ,  $\delta(X) = \delta(Y) = 0$  で決まる.

この時,  $\rho(\mathfrak{h}, f, \delta) = \pi_+$  となり,  $\dim(\mathcal{H}_{\pi_+}^{-\infty})^{\mathfrak{h}, f, \delta} = 1$ ,  $(\mathcal{H}_{\pi_-}^{-\infty})^{\mathfrak{h}, f, \delta} = \{0\}$ . が成り立つ.

最後に, weak polarization とは別の観点からの話題に少し触れておく. [M] において Magneron は, 対称空間に付随した場合について次の様な結果を得た:  $G = \exp \mathfrak{g}$  を連結単連結な巾零 Lie 群,  $\sigma \in \text{Aut}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$  を  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  の involution で  $\sigma\bar{\sigma} = \bar{\sigma}\sigma$  を満たすもの (ここで  $\bar{\sigma}(X) = \overline{\sigma(\bar{X})}$ ) とし,  $f \in \mathfrak{g}^*$  は  $\sigma f = -f$  を満たすもの,  $\mathfrak{h}$  を複素部分 Lie 環で  $f([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]) = \{0\}$  を満たし, かつ  $\sigma$  の不動点集合を含むものとする. ( $\mathfrak{h}$  は  $f([\cdot, \cdot])$  に関して必ずしも極大等方的ではないことに注意.) この時,  $(\mathfrak{h}, f)$  からの holomorphically induced representation  $\rho(\mathfrak{h}, f)$  (巾零群だから modular 関数の項は 0) は  $(\mathcal{E}^{\perp} + f)_+ = \{\ell \in \mathcal{E}^{\perp} + f; \sqrt{-1}\ell([X, \bar{X}]) > 0 \forall X \in \mathfrak{h} \setminus \mathfrak{d}_{\mathbb{C}}\}$  に交わる軌道に対応する表現の重複度 1 の直積分に分解し, 相互律も成り立つ. (特に  $(\mathcal{E}^{\perp} + f)_+ = \emptyset \iff \rho = 0$ ). またこの時, 任意の coadjoint 軌道  $\mathcal{O}$  に対して  $\mathcal{O} \cap (\mathcal{E}^{\perp} + f)_+$  は空集合か 1 つの  $D$  軌道である.

これは, 単連結巾零 Lie 群の単項表現における Corwin-Greenleaf-Grélaud の orbit method による既約分解の記述 [C] の自然な拡張とみなせる.

一般の複素部分 Lie 環からの誘導表現については, 巾零 Lie 群においてもまだ殆ど知られていない.

## References

- [C ] L. Corwin, F. Greenleaf and G. Grélaud, Direct integral decompositions and multiplicities for induced representations of nilpotent Lie groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* **304** (1987), 549–583.
- [F ] H. Fujiwara, On holomorphically induced representations of exponential groups, *Japan.J.Math.* **4** (1978), 109–170.

- [M ] B. Magneron, Représentations induites holomorphes des groupes de Lie nilpotents et involutions complexes, *C.R. Acad. Sci. Paris* **317** (1993), 37–42.
- [P ] R. Penney, Abstract Plancherel theorems and a Frobenius reciprocity theorem, *J. Funct. Anal.* **18** (1975), 177–190.
- [R ] H. Rossi and M. Vergne, Representations of certain solvable Lie groups on Hilbert spaces of holomorphic functions and the application to the holomorphic discrete series of a semisimple Lie group, *J. Funct. Anal.* **13**(1973), 324–389.
- [V ] M. Vergne, Étude de certaines représentations induites d'un groupe de Lie résoluble exponentiel, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.* **3**(1970), 353–384.