表現論シンポジウム講演集, 1996
pp.53-82

複素鏡映群のヘッケ環の表現論について

有木 進
東京商船大学
ariki@ship2.ipc.tosho-u.ac.jp

目次

1 モジュラー表現としての通常表現

この章と次の章では、複素鏡映群のヘッケ環の導入も考えながら、モジュラー表現の用語の導入をする。良く知っている方にはいささか退屈になるかと思いますがご容赦ください。

一般に、F を代数閉体、A を有限次元の F-代数とする。表現論屋さんの目的はもちろんこの環の F 上の有限次元表現を完全に理解することである。

まず、最初に次のような場合を考えよう。

「既約表現 $V_1, \ldots, V_N$ を構成したところ、$dim_F A = \sum_{i=1}^{N} (dim_F V_i)^2$ になった。」

この場合はすべてわかったといってよい。このことを説明するためにまずつぎのことに注意する。

補題 1.1 *(1)* A を上のとおりとし、V を 既約 A-加群とすると、

$$Hom_A(V, V \otimes F^m) \simeq F^m$$

ここで、同型は、$f \in F^m$ に $v \mapsto v \otimes f$ を対応させるもの。
(2) A_1、A_2 を A と同じ仮定を満たす環とし、V_1、V_2 をそれぞれの環の既約加群とする。このとき、$V_1 \otimes V_2$ は既約 $A_1 \otimes A_2$-加群。
(3) A を上のとおりとし、V を既約 A-加群とすると、$End_F(V)$ は既約両側 A-加群。

証明は上から順々にやればよい。さて、この注意より、$\rho_i :\rightarrow End_F(V_i)$ を表現加群 V_i の定める環準同型とすると、$\mathcal{I} = \cap_{i=1}^N Ker(\rho_i)$ に対し、埋め込み $A/\mathcal{I} \rightarrow \bigoplus_{i=1}^N End_F(V_i)$ は全射になる。実際、$End_F(V_i)$ は両側加群として非同値だから、$A/\mathcal{I}$ の両側加群としての既約部分加群はどれかの $End_F(V_i)$ とぴったり一致する。よって、これで両辺を割り、以下同様の議論をつづければ、各 ρ_i が零写像ではないことより全射が従う。

ここで次元を比較すれば、$\mathcal{I} = 0$、つまり、$A \simeq \bigoplus_{i=1}^N End_F(V_i)$ を得る。さてこのことより、すべての既約加群は冪等元を用いて Ae の形にかける。よって射影加群になる。(クルル-レマク-シュミット-東屋の定理より直既約射影加群は A の直和因子なので V が、直既約射影加群であることと V が Ae とかけることは同値である。) よって、全ての既約加群は射影加群であるから、任意の表現は完全可約、つまり既約加群の直和にかける。

以上から、完全可約性と既約表現の具体的構成から全ての表現が具体的にわかり、しかもそのあいだの準同型も完全にわかるわけだから、これをもって完全にわかったといっているわけである。この場合が成り立つとき、A を分裂型半単純環という。

例 **1.1** S_n を n 次対称群、$A = FS_n$ とし、F 中で $n! \neq 0$ だとしよう。通例のように $s_i = (i, i+1)$ を対称群の生成元（コクセタージェネレータ）にとる。λ を大きさが n のヤング図形とするとき、形が λ の標準盤たちを基底として既約表現が以下のように構成される。(*semi-normal form*)

まず、ヤング図形の各セル x に対して、$ct(x)$ という数を以下のように対応させる。

0	1	2	3	4	5
-1	0	1	2		
-2	-1	0			
-3					

すなわち、正確にかけば、セル x が、$a(x)$ 行 $b(x)$ 列めにあるとき、$ct(x) = -a(x) + b(x)$ と定める。

さて標準盤とは、ヤング図形のなかに数字 1 から n を 1 つずつ、右方向に増加、下方向に増加するように書きこんだものであった。標準盤に対しては、i が書きこまれているセルが x のとき、$ct(x)$ を $ct(i)$ とかくこととする。たとえば、上の例において標準盤を次のようにとれば、$ct(10) = 2$ である。

1	2	5	8	12	14
3	6	9	10		
4	7	11			
13					

一般の場合、すなわちヤング図形の対、$\lambda = (\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(m)})$ のときは、あ

とで述べるように、各 $1,\ldots,m$ に対して、1 行 1 列目の値を 0 とは限らない色々な整数に固定して、同様に定義する。

さて、標準盤 T において、i と $i+1$ が隣り合っていないとしよう。このとき、T において i と $i+1$ を入れ替えてつくった標準盤を T' とする。このとき、s_i の作用は次のように定義される。

$$s_i(T,T') = (T,T')\begin{bmatrix} -\frac{1}{ct(i)-ct(i+1)} & 1+\frac{1}{ct(i)-ct(i+1)} \\ 1-\frac{1}{ct(i)-ct(i+1)} & \frac{1}{ct(i)-ct(i+1)} \end{bmatrix}$$

また、i と $i+1$ がたてに隣り合っているときは、$s_i T = -T$、よこに隣り合っているときは、$s_i T = T$ と定める。この表現を V^λ とかく。

今、$n! \neq 0$ であるから、分母はすべて非零でこの条件は表現の定義に問題がないことを保証している。これらの表現が既約表現であることは簡単に証明でき、さらにロビンソン-シェンステッド対応を用いれば次元の条件、$n! = \sum dim(V^\lambda)^2$ が示される。

例 1.2 まず、複素鏡映群 $G(m,1,n)$ とは、1 の m-乗根を成分にもつ置換行列全体のなす群である。すなわち、

$$\{(\zeta_i \delta_{i,\sigma(i)})_{1\leq i,j\leq n} \mid \zeta_i^m = 1, \sigma \in S_n\}$$

この群の群環の変形として定義される代数が、表題にあるヘッケ環で、すなわち、パラメータ $q \in F^\times$ および $v_1,\ldots,v_m \in F$ が与えられたとき、$G(m,1,n)$ のヘッケ環とは、次の生成元と基本関係で定義される F-代数である。

$$(a_1 - v_1)(a_1 - v_2)\cdots(a_1 - v_m) = 0,$$

$$(a_i - q)(a_i + q^{-1}) = 0 \quad (i \geq 2),$$

$$a_1 a_2 a_1 a_2 = a_2 a_1 a_2 a_1,$$

$$a_i a_{i+1} a_i = a_{i+1} a_i a_{i+1} \quad (i \geq 2),$$

$$a_i a_j = a_j a_i \quad (j \geq i+2).$$

さて、ここでパラメータが次の条件をみたすとする。

$$q^{2d} v_i \neq v_j \ (i \neq j, -n < d < n), \quad [n]_q! \neq 0$$

ただし、$[n]_q! = [n]_q[n-1]_q \cdots [1]_q$、$[i]_q = q^{i-1} + q^{i-3} + \cdots + q^{-i+1}$。

このとき、既約表現が、ヤング図形の組、$\lambda = (\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(m)})$ に対して次のように構成される。

表現の基底は前と同様に標準盤である。a_1 の作用だけ特別なのでまずこれを定義する。 ヤング図形の対 $\lambda = (\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(m)})$ において、セル x がいるヤング図形を $\lambda^{(c(x))}$ とあらわすこととする。 標準盤が与えられたときは前と同様に $c(i)$ とかく。さてこのとき、標準盤 $\mathbf{T}$ において、1 が $c(1)$ 番めのヤング図形にあるとき、

$$a_1\, \mathbf{T} = v_{c(1)} \mathbf{T}$$

と定める。次に残りの生成元の作用を定義する。
まず、標準盤 $\mathbf{T} = (T^{(1)}, \ldots, T^{(m)})$ において、$i-1$ と i が隣り合っていないとしよう。このとき、$\mathbf{T}$ において $i-1$ と i を入れ替えてつくった標準盤を $\mathbf{T}'$ とする。このとき、a_i $(i \geq 2)$ の作用は次のように定義される。

$$a_i\, (\mathbf{T}, \mathbf{T}') = (\mathbf{T}, \mathbf{T}')\, M_{\mathbf{T},\mathbf{T}'},$$

ここで、$M_{\mathbf{T},\mathbf{T}'} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$ は、

$$m_{11} = -(q - q^{-1}) v_{c(i)} / \left(v_{c(i)} - q^{2(ct(i-1) - ct(i))} v_{c(i-1)}\right),$$

$$m_{12} = \left(v_{c(i)} - q^{2(ct(i-1) - ct(i)) + 1} v_{c(i-1)}\right) / \left(v_{c(i)} - q^{2(ct(i-1) - ct(i))} v_{c(i-1)}\right),$$

$$m_{21} = \left(v_{c(i)} - q^{2(ct(i-1)-ct(i))-1}v_{c(i-1)}\right)/\left(v_{c(i)} - q^{2(ct(i-1)-ct(i))}v_{c(i-1)}\right),$$

$$m_{22} = -(q-q^{-1})v_{c(i)}/\left(v_{c(i)} - q^{2(ct(i-1)-ct(i))}v_{c(i-1)}\right)$$

また、$i-1$ と i がたてに隣り合っているときは、$a_i\,\mathbf{T} = -q^{-1}\mathbf{T}$、よこに隣り合っているときは、$a_i\,\mathbf{T} = q\mathbf{T}$ と定める。この表現を V^λ とかく。

この環は、チェレドニクにより８０年代後半に考えられていることが最近わかった。文献 [Ch] を参照のこと。ただし、すこしふれられている程度で主たる考察対象はアファインヘッケ環である。そのためこの論文中にあるこの環に関する予想の一部には反例を与えることが出来る。この反例については [A] を参照のこと。

また、チェレドニクは R 行列を用いてこの環の表現を構成しており、上のようにわかりやすい作用の表示ではないが、実は基底のとりかたまでこめて上で与えた表現と同じである。

また、数理物理を良く知っているものにとっては、上の基底は実はおなじみのものであり、量子群のレベル１のフォック空間のテンソル積の基底である。さらに、神保-ミスラ-三輪-尾角により、レベルが一般の場合にもフォック空間を考え、パス基底を導いているが、これはおなじ空間ではないが、やはりヤング図形の対を似た形で用いている。[JMMO] を参照のこと。

さてこの一致はなにかの関係を予感させるが、実はこれが本講演の後半部分の主題である。そして、我々は、パス基底ではなく制限ヤング図形というもので既約最高ウエイト表現の基底をパラメトライズし、クリスタルグラフはヘッケ環のモジュラー表現であらわれるクレシュチェフの good node という概念で記述されることになる。

今は分裂型半単純環の場合だが、もう少し一般に表現の具体的構成をあきらめたとしても、全ての既約加群が射影加群なら A は色々な斜体上の行列環の直和になる。実際、完全可約性より $A \simeq End_A({}_AA)^{op}$、つまり左正則加群の自己準同型環にかけざんの順序が逆の積が入った環は行列環の直和にな

るので、行列環は転置行列をとればかけざんの順序が逆になることに注意すれば、A 自身が行列環の直和になる。この様に行列環の直和になる場合を半単純環という。

例 **1.3** G を有限群とし、G の位数が F で可逆だとする。このとき、全ての FG-加群は射影加群である。

実際、任意の FG-加群 V に対し、一度単位群に制限したのち G まで誘導した表現、$FG \otimes Res(V)$ を考える。$v \mapsto \frac{1}{|G|}\sum g \otimes g^{-1}v$ は単射 FG-準同型、

$$0 \to V \to FG \bigotimes Res(V)$$

を与え、しかも $g \otimes v \mapsto gv$ が切断を与えるので、V は $FG^{\oplus dimV}$ の直和因子である。これは射影加群であることと同値である。

2 分解行列

さて、前章において、モジュラー表現で良く使われる議論はすでにかなり出てきた。射影加群を用いた議論、冪等元を用いた議論、そしてブロック分解である。最後のブロック分解について説明を加えると、半単純環のとき環 A は色々な斜体上の行列環の直和の形に分解できた。ここで行列環はこれ以上は環の直和には分解できない。実際、分解できたとするとその中心も分解できるはずで、ところが行列環の中心は斜体の中心になりこれも体である。よって、2つの環への分解が $1 = e_1 + e_2$, $e_ie_j = \delta_{ij}e_i$ という直交冪等元分解に対応することに注意すると、体であることより一方が零になり矛盾する。このようにこれ以上直和に分解できない環の直和に分解することをブロック分解といい、この各々の直和に現われる環をブロック環とよぶ。今の議論でわかったように、ブロック環への直和分解は、1 をできるだけ沢山の互いに

直交する中心冪等元の和のかたちにかくことと同じである。このアイデアはひろく使われ、実際あとで述べるように、ルスティクのアファインヘッケ環の理論においてもまずブロック分解にあたることをやり、特殊化アファインヘッケ環という有限次元の環を得てから幾何的な考察をおこなう。しかし、このかたちでは前章の最後でのべたアファインヘッケ環と量子群の表現の関係は見えてこない。本講演の目的は、このアイデアから離れた別のかたちの環の考察が正しい理解に結びつくというおはなしである。

さて、本章では、前章の場合（つまり既約加群が全て射影加群になっている場合）以外の場合を考える。まず先に進む前に、これ以上いくら既約表現を探しても原理的に前章の場合には帰着できないことを判定する方法だが、たとえば既約加群で射影加群でないものを1つ見つければよい。

例 2.1 G を有限群とし、G の位数が F 中で非可逆、つまり 0 とする。このとき、FG は半単純ではない。

実際、単位表現が射影加群とすると、対応する冪等元は、$ge = e$ $(g \in G)$ より、$\sum g$ のスカラー倍でなければならないが、すると、$e = e^2 = 0$ で矛盾。

または、直既約加群であって既約加群でないものを1つ見つけてもよい。次の補題は基本的である。

補題 2.1 A を有限次元 F-代数、V を有限次元 F-加群とするとき、V が直既約加群であるための必要十分条件は、$End_A(V)$ が局所環、つまり、非可逆元が冪零になる環になることである。

必要条件は、$V = Im(\sigma^N) \oplus Ker(\sigma^N)$ $(N >> 0)$ が$\sigma \in End_A(V)$ に対して成り立つことより明らかで、十分条件は、2つの冪零元の和$\sigma_3 := \sigma_1 + \sigma_2$ が可逆だとすると、$\sigma_3^{-1}\sigma_1$ と $\sigma_3^{-1}\sigma_2$ は非可逆元、よって仮定よりこれらはまた冪零元になり、$\sigma_3^{-1}\sigma_1 = 1 - \sigma_3^{-1}\sigma_2$ は冪零かつ可逆で 0、同じく $\sigma_3^{-1}\sigma_2$ も 0、これは矛盾。

特に以下の例のように $End_A(V) = F$ なら、V は直既約加群とわかるわけである。

例 2.2 複素数 q が、$q^2+q+1=0$ を満たすとき、A を次の基本関係で定義される $\mathbf{C}$-代数とする。

$$(T_1 - q)(T_1 + 1) = 0, \quad (T_2 - q)(T_2 + 1) = 0,$$

$$T_1T_2T_1 = T_2T_1T_2$$

このとき、$V = \mathbf{C}^2$ に対し、作用を

$$T_1 \mapsto \begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad T_2 \mapsto \begin{bmatrix} q & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

で定める。このとき、$End_A(V) = \mathbf{C}$。また、V は部分加群をもつので既約ではない。

表現論の完全な理解に達したといえるのは、全ての直既約加群を求めてしかも具体的に構成できたときであろうが、これは一般にはとてつもなくむずかしく、そこで、せめて加群の圏のグロタンディエク群レベルでわかりたい、つまり、グロタンディエク群の元として既約表現をよくわかる表現の交代和でかきたい、というのが目標になる。

さて一般に、次のような状況がよくおこる。すなわち、R を可換局所環、K をその商体、F を剰余体とする。このとき、R 上の環 A に対して、「$A \otimes K$ は半単純だが、$A \otimes F$ は半単純ではない。」という状況である。

$A \otimes K$-加群のグロタンディエク群から $A \otimes F$-加群のグロタンディエク群への写像が次のように定義される。

定義 2.1 V を $A \otimes K$-加群とする。このとき、V の R-格子 V_R をとり、

$$[V] \mapsto [V_R \otimes F]$$

とすると、これは定義に矛盾なく、$A\otimes K$-加群のグロタンディエク群から $A\otimes F$-加群のグロタンディエク群への写像に拡張される。これを、分解写像とよぶ。

$\{V_1,\ldots,V_k\}$ を、$A\otimes K$-既約加群の完全代表系とするとき、これらの上の写像による像もまた同じ記号でかくことにすると、$A\otimes F$-既約加群の完全代表系 $\{S_1,\ldots,S_l\}$ を用いて、$[V_i]=\sum d_{ij}[S_j]$ とかける。この係数 d_{ij} を分解係数といい、この係数を成分とする行列を分解行列という。

我々が考えたいのは、$G(m,1,n)$ のヘッケ環で、q^2 が1の原始 r-乗根、$v_1,\ldots,v_m$ が q^2 の冪、R として、多項式環 $\mathbf{C}[\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_m,\mathbf{q}]$ をイデアル $(\mathbf{v}_1-q^{2i_1},\ldots,\mathbf{v}_m-q^{2i_m},\mathbf{q}-q)$ で局所化した環、をとったときの分解係数である。このとき、$A\otimes K$-加群は前章で述べたようによくわかっており、さらに既約 $A\otimes F$-加群を $[V^\lambda]$ たちの交代和でかくことができる。その具体的係数も、分解係数を計算するアルゴリズムを与えることができるので計算可能である。これをこれから説明していくわけだが、そのためにまず、次の章で量子群について復習しておく。

3 量子群

よく知られているように、(C_{ij}) をルート系のカルタン行列とするとき、量子群は、次の生成元と基本関係により定義される $\mathbf{C}(v)$ 上の環である。

まず、カルタン部分環は $Y_{\mathbf{C}}=(\oplus_{i=0}^{r-1}\mathbf{C}h_i)\oplus\mathbf{C}D$、又その双対空間は $Y_{\mathbf{C}}^*=(\oplus_{i=0}^{r-1}\mathbf{C}\Lambda_i)\oplus\mathbf{C}\delta$。自然なカップリングは、

$$<\Lambda_i,h_j>=\delta_{ij},\quad <\Lambda_i,D>=0,\quad <\delta,h_i>=0,\quad <\delta,D>=1$$

である。ここで、$Y_{\mathbf{Z}}=(\oplus_{i=0}^{r-1}\mathbf{Z}h_i)\oplus\mathbf{Z}D$ とおく。

このとき、生成元は、$\{v^h\ (h\in Y_{\mathbf{Z}})\}$ と、$e_i,f_i\ (0\le i\le r-1)$ で、基本関係は、

$$v^h v^{h'} = v^{h+h'}, \quad v^0 = 1, \quad e_i f_j - f_j e_i = \delta_{ij}\frac{v^{h_i} - v^{-h_i}}{v - v^{-1}},$$

$$v^h e_j v^{-h} = v^{<\alpha_j, h>} e_j, \qquad v^h f_j v^{-h} = v^{-<\alpha_j, h>} f_j,$$

$$\sum_{k=0}^{1-c_{ij}} (-1)^k \begin{bmatrix} 1 - c_{ij} \\ k \end{bmatrix}_v e_i e_j^{1-c_{ij}-k} e_i^k = 0,$$

$$\sum_{k=0}^{1-c_{ij}} (-1)^k \begin{bmatrix} 1 - c_{ij} \\ k \end{bmatrix}_v f_i f_j^{1-c_{ij}-k} f_i^k = 0$$

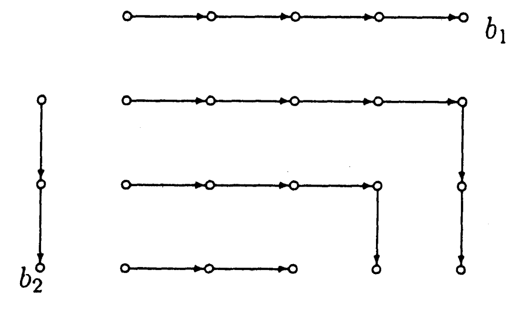
ここで、v-2項係数は、$[i] = \frac{v^i - v^{-i}}{v - v^{-1}}$ を用いて定義したものである。我々が必要とするのは、$A_{r-1}^{(1)}$ 型のときだけなので、以後量子群といったら、この型のものをさすこととする。すなわち、$c_{ii} = 2$ で、その他の非零な成分は $i - j \equiv \pm 1 (mod\, r)$ のときのみ $c_{ij} = -1$ というカルタン行列から定まる量子群のこととする。そしてこのとき単純ルートは、$\alpha_i = 2\Lambda_i - \Lambda_{i-1} - \Lambda_{i+1} + \delta_{i0}\delta$ である。

我々はあとで結晶基底として、lower crystal base のほうをとるので、余積としては次のものを採用する。

$$\begin{cases} \Delta(e_i) & = e_i \otimes 1 + v^{-h_i} \otimes e_i, \\ \Delta(f_i) & = f_i \otimes v^{h_i} + 1 \otimes f_i, \\ \Delta(v^h) & = v^h \otimes v^h \end{cases}$$

テンソル積のクリスタルグラフはよく知られているように次の場合をもととして定義される。

$\tilde{f}_i(b_1 \otimes b_2)$:



4 クリスタルグラフ

さて、$A_{r-1}^{(1)}$ 型の量子群の一般のレベルでの既約最高整ウエイト表現 $L(\Lambda)$ のクリスタルグラフは神保-ミスラ-三輪-尾角によって求められた。この論文では結晶基底として、upper crystal base を用いている。我々は、lower crystal base を用いる。([K,Lemma 2.4.1] とその直前の式によりクリスタルグラフはおなじである。)

興味のある人のために簡単に復習すると、$\Lambda_0,\ldots,\Lambda_{r-1}$ を基本ウエイトとし、レベル m の整ウエイトの無限列、$(\mu_0,\mu_1,\ldots)$ であって、自然表現の m 次対称テンソル積 $S^m(\mathbf{C}^r)$ のあるウエイト $\gamma_i=\sum m_{ij}\epsilon_j$ に対し、$\mu_{i+1}-\mu_i=\sum m_{ij}(\Lambda_j-\Lambda_{j+1})$ とかけるものを考える。これを path という。σ を Λ_i を Λ_{i+1} にうつすシフト作用素とするとき、$N>>0$ で巡回的境界条件 $\mu_N=\sigma^N(\Lambda)$ をみたす path をΛ-path とよぶ。[JMMO] においてはクリスタルグラフの頂点は Λ-path によりパラメトライズされている。また、議論は $L(\Lambda)$ をレベル m のフォック空間に埋め込むことによりおこなわれる。さてこのレベル m のフォック空間は、$G(m,1,n)$ のヘッケ環の通常表現のなすグロタンデイエク群と似た表示をもつ。すなわち、$v_1,\ldots,v_m$ を $v_i=q^{2\pi\sqrt{-1}\gamma_i/r}$、$0\le\gamma_1\le\cdots\le\gamma_m<r$ と並べるとき、$\lambda=(\lambda^{(1)},\ldots,\lambda^{(m)})$ であって、$\lambda^{(i)}=1^{m_1^{(i)}}2^{m_2^{(i)}}\cdots N^{m_N^{(i)}}$ とかくとき、

$$m_j^{(i)}+\cdots+m_N^{(i)}-\gamma_i\ge m_j^{(i+1)}+\cdots+m_N^{(i+1)}-\gamma_{i+1}\quad(i=1,\ldots,m)$$

をみたすヤング図形の対 λ を基底にもつ空間に他ならない。
(ただし $\gamma_{m+1}=\gamma_1+m$ とする。)

さて、$G(m,1,n)$ のヘッケ環のグロタンデイエク群との関係をみるには、我々は [JMMO] と異なり、$L(\Lambda)$ をレベル 1 のフォック空間の m 階テンソル積の空間に埋め込まねばならない。このときクリスタルグラフの頂点は r-制限的ヤング図形によりパラメトライズされる。また、クリスタルグラフの辺

の与え方は、[JMMO] においては符号という概念を用いて記述されるが、これはクレシュチェフの good node という概念により記述される。これらは [A] の応用として [M] において証明された。ここでは [M] にしたがって説明する。我々は [M] の記号に従うため [LLT] とはヤング図形が転置していることに注意せよ。

まず、ヤング図形に関する言葉をすこし用意する。

定義 4.1 まず、$i_1, \ldots, i_m$ が与えられているとし、このとき、ヤング図形 $\lambda = (\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(m)})$ の各セル x に対して、それが、$\lambda^{(c(x))}$ 中の $a(x)$ 行 $b(x)$ 列めにあるとき、剰余 $r(x)$ を $r(x) \equiv i_{c(x)} - a(x) + b(x) \ (mod\ r)$ により定義する。剰余が i のセルを *i-node* とよぶ。

indent i-node とは、剰余が i の *node* で、それを λ に付け加えたものがサイズが 1 つ大きいヤング図形になるもののことである。

removable i-node とは、剰余が i の *node* で、それを λ から削ったものがサイズが 1 つ小さいヤング図形になるもののことである。

まず我々はミスラ-三輪の結果、すなわち次の定理を必要とする。ここで、上で述べたように我々はレベル 1 のフォック空間のテンソル積に既約最高ウエイト表現を埋め込むので、この結果とテンソル積に対するクリスタルグラフの定理があればあとの議論には十分である。ここで与えられた表現を林表現と呼ぶこととする。

定理 4.1 *(1)* $m = 1$, $i_1 = 0$ とする。すると $A^{(1)}_{r-1}$ 型量子群 U_v の表現 $L(\Lambda_0)$ は次のように実現される。

まず、カルタン部分環の作用は、

$$v^{h_i}\lambda = v^{N_i(\lambda)}\lambda, \quad v^D\lambda = v^{-N^0(\lambda)}\lambda$$

ここで、$N^0(\lambda)$ は λ 中の *0-node* の個数。$N_i(\lambda)$ は、λ 中の *indent i-node* の個数から *removable i-node* の個数を引いたもの。

他の量子群の生成元については、作用は次のように与えられる。

$$e_i\lambda = \sum_{r(\lambda/\mu)=i} v^{-N_i^a(\lambda/\mu)}\mu,$$
$$f_i\lambda = \sum_{r(\mu/\lambda)=i} v^{N_i^b(\mu/\lambda)}\mu$$

ここで、$N_i^a(x)$ とは x より真に上にある行全体のなす領域の中で *indent i-node* の個数から、*removable i-node* の個数を引いたもののことで、$N_i^b(x)$ とは x より真に下にある行全体のなす領域の中で *indent i-node* の個数から、*removable i-node* の個数を引いたもののことである。

(2) $L = (\oplus \mathbf{C}[v]_{(v)}\lambda) \cap U_v\phi$ は、$U_v\phi$ の結晶格子（*lower crystal lattice*）になる。ここで ϕ は空なヤング図形である。また、L/vL で重複度をこめて次式が成立。

$$\{\tilde{f_{i_1}} \cdots \tilde{f_{i_N}}\phi \neq 0\ (mod\ v)\} \subset \{\lambda\ (mod\ v)\}$$

さて、$\lambda = (\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(m)})$ に対して、$\lambda^{(1)}$ を1番上、$\lambda^{(2)}$ をその真下、というように縦に一列に並べて、セルが上の行にあるとか、下の行にあるという概念を定め、$N_i^a(x)$ と $N_i^b(x)$ を前と全く同じに定める。すると、この定理と結晶基底のテンソル積規則により、レベル1のフォック空間の m 階のテンソル積への量子群の作用とその結晶格子及び結晶基底は、全く同様に与えられる。

さて、以下では $v_1 = q^{2i_1}, \ldots, v_m = q^{2i_m}$ のとりかたを、$0 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_m < r$ とする。q^2 は1の原始 r-乗根である。

定義 4.2 ヤング図形 λ、μ に対して、もし任意の i、j に対し、

「$\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(i-1)}$ のサイズと、$\lambda^{(i)}$ の最初の j 行のサイズの和が常に

$\mu^{(1)}, \ldots, \mu^{(i-1)}$ のサイズと、$\mu^{(i)}$ の最初の j 行のサイズの和以上」

になっているとしよう。このとき、$\lambda \trianglerighteq \mu$ とかく。これを *dominance order* と呼ぶ。

標準盤 T に対して、i 番目の数が $v_i q^{2ct(i)}$ であるような n 個の数字のシークエンスを T のウエイトと呼ぶ。(これは実際 V^λ を $G(m,1,n)$ のヘッケ環の最大可換部分環に制限したときに現われる表現に他ならない。)

制限的ヤング図形とは次のように定義される。

定義 4.3 μ が r-制限的とは、μ のある標準盤 T があって、そのウエイトが、$\lambda \rhd \mu$ を満たすλ の標準盤のウエイトとしては決して現われないときをいう。

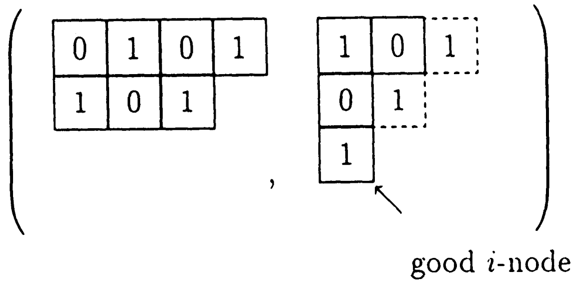
これがクリスタルグラフの頂点をあたえるのであるが、さらに辺を与えるためにヘッケ環のモジュラー表現論で制限則（の socle 部分）の記述のため最近クレシュチェフにより用いられた good node という概念を説明しよう。

定義 4.4 *removable i-node* x が *normal* とは、$N_i^b(x) \le 0$ かつ x より下の全てのセル y に対し、$N_i^b(y) > N_i^b(x)$ が成り立つときをいう。

normal な *i-node* がさらに *good node* であるとは、λ の *normal* な *i-node* の中で一番上にあるときをいう。

x の下にある全ての y に対して $N_i^b(y) > N_i^b(x)$ とは、x から下に indent i-node と removable i-node を読むとき、常に removable i-node の方の個数が先行する、という条件なので、removable i-node のとき $\epsilon = 1$、indent i-node のとき $\epsilon = 0$ として、一番上の i-node から下に読んでいったときできる０と１のシークエンスに対して、１０となっているのがあれば除く、ということを繰り返した結果残るのが normal i-node で、そのなかで一番上にあるのが good i-node ということになる。これはまさに [JMMO] の符号によるクリスタルグラフの与え方に他ならない。

例 4.1 たとえば下の例で考えてみる。このとき、$i \equiv 1\ (mod\ 2)$ として、シークエンスは、１１００１である。１０を除いていくと、まず１＊＊０１、次に＊＊＊＊１となり、*normal 1-node* は１個で当然これが *good i-node* でもある。$N_i^b(x)$ は３つの *removable i-node* に対し、上から０１０である。



さて、このときマサスの定理は次のようにまとめられる。

定理 4.2 $L(\Lambda)$ のクリスタルグラフは、頂点が r-制限的ヤング図形でパラメトライズされ、辺は、$\lambda \xrightarrow{i} \mu$ となるのが μ/λ が *good i-node* になるとき、という条件で与えられる。

さて、このクリスタルグラフをもとにしてさらに議論を続けることにより、マサスは次の定理を得た。

定理 4.3 $A^{(1)}_{r-1}$ 型量子群のレベル m の最高整ウエイト表現を上のようにレベル 1 のフォック空間の m 階テンソル積に埋め込み、結晶格子をテンソル積で定める。このとき、この結晶格子には、量子群の生成元の作用から計算可能な基底 $\{A_\mu\}$ であって、次を満たすものが存在する。

(1) $\overline{A_\mu} = A_\mu$,

(2) $A_\mu = \mu + \sum_{\lambda \rhd \mu} \alpha_{\lambda\mu}(v)\lambda$

これらを用いれば結晶基底が計算可能である。具体的なアルゴリズムは一番最後の章で説明する。

5 主定理

さて、以上の準備のもとでいよいよ主定理を述べることができる。まず我々が考える環について記号を導入し、また必要な用語をこの章にまとめておこう。

定義 5.1 H_n とは、生成元 $a_1, \ldots, a_n$ と次の基本関係で定義される $\mathbf{C}$-代数である。

$$(a_1 - v_1)(a_1 - v_2)\cdots(a_1 - v_m) = 0,$$

$$(a_i - q)(a_i + q^{-1}) = 0 \quad (i \geq 2),$$

$$a_1 a_2 a_1 a_2 = a_2 a_1 a_2 a_1,$$

$$a_i a_{i+1} a_i = a_{i+1} a_i a_{i+1} \quad (i \geq 2),$$

$$a_i a_j = a_j a_i \quad (j \geq i+2)$$

ただし、$n = 0$ のときは $H_n = \mathbf{C}$ であると思うこととする。さて以下では常に、1 の r-乗根 q^2 と、q^2 の冪、$v_1 := q^{2i_1}, \ldots, v_m := q^{2i_m}$ が固定されていると仮定する。

もし、パラメータが上のように特殊化されていなければ、おなじ基本関係が局所環 $\mathbf{C}[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m, \mathbf{q}]_{(\mathbf{v}_1 - v_1, \ldots, \mathbf{v}_m - v_m, \mathbf{q} - q)}$ の商体上の代数を定めるが、これを $\mathbf{H}_n$ とかく。

H_n-加群のなすグロタンデイエク群を、$K(H_n)$、または u_n とかく。同様に、$\mathbf{H}_n$-加群のなすグロタンデイエク群を、$K(\mathbf{H}_n)$、または $\mathbf{u}_n$ とかく。どちらの場合にもここで考えるときは、係数が $\mathbf{C}$ に拡大されているものとする。

そして、$\varphi_n : K(\mathbf{H}_n) \to K(H_n)$ を、分解写像とする。このとき、次が成り立つ。

補題 5.1 *(1)* $\mathbf{H}_n$ は半単純環。

(2) 既約 $\mathbf{H}_n$-加群は、次の集合でパラメトライズされる。各 λ に対し、対応する加群を $\{S^\lambda\}$ とかく。

$$\{\lambda = (\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(m)}) \mid | \lambda |= n\}$$

u_n^* と $\mathbf{u}_n^*$ をそれぞれ、$u_n = K(H_n)$ と $\mathbf{u}_n = K(\mathbf{H}_n)$ の双対空間であるとする。このとき、

定義 5.2 $\{[S^\lambda]^*\}$ を $\{[S^\lambda]\}$ の双対基底とする。$[S^\lambda]^*$ のかわりに単に、λ とかくことにする。また、$\varphi_n^T : u_n^* \to \mathbf{u}_n^*$ を、φ_n の転置だとする。次に、これらの直和をとって、$u^* = \oplus u_n^*$、$\mathbf{C}Y^m = \oplus \mathbf{C}\lambda$ とおき、$\oplus\varphi_n^T$ は φ^T とかく。

林表現の $v = 1$ への特殊化として、$\mathbf{C}Y^m$ はアファインリー環 $g(A_{r-1}^{(1)})$ の作用をもつ。すなわち、前にも出てきたように、

定義 5.3 ヤング図形 $\lambda = (\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(m)})$ のセル x が、$\lambda^{(c(x))}$ の $a(x)$ 行 $b(x)$ 列めにあるとき、値を $\mathbf{Z}/r\mathbf{Z}$ にとる、x の剰余というものを、

$$r(x) = i_{c(x)} - a(x) + b(x) \ (mod\, r)$$

で定める。

例 5.1 もし、$v_1 = q^2$, $v_2 = 1$, $q^2 = e^{2\pi\sqrt{-1}/3}$ ならば、$\lambda = (21^2, 42)$ として、剰余はつぎのようになる。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & & & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & & & & 2 & 0 & & \\ 2 & & , & & & & & \end{pmatrix}$$

補題 5.2 e_i, f_i を $\mathbf{C}Y^m$ 上に定義される次のような作用素とする。

$$e_i\lambda = \sum_{r(\lambda/\mu)=i} \mu, \quad f_i\lambda = \sum_{r(\mu/\lambda)=i} \mu$$

すると、これにカルタン部分の作用を付け加えることによって、$\mathbf{C}Y^m$ に $g(A_{r-1}^{(1)})$-加群構造がはいる。

このとき、主定理は以下の通り。

主定理

(1) $\varphi^T(u^*)$ は空なヤング図形で生成される CY^m の巡回的部分加群。

(2) n_i を $v_1, \ldots, v_m$ 中の q^{2i} の重複度とする。$\Lambda = \sum n_i \Lambda_i$ とおくと、u^* は最高ウエイト Λ の既約最高整ウエイト加群 $L(\Lambda)$ と同値。

(3) $K(H_n)$ は既約加群からなる基底をもつが、これの双対基底は、上の同型により、$L(\Lambda)$ の標準基底（Lusztig の canonical basis）に一致する。

このように、主定理の命題自体は完全に代数的なのであるが、証明には以下の３つの結果を必要とする。

(i) ルスティクによる量子群の幾何的実現

(ii) ギンズブルグによるアファインヘッケ環の既約加群の幾何的構成

(iii) 位相的Ｋ理論を用いたアファインヘッケ環の標準加群の幾何的構成

6 ルスティクによる量子群の幾何的実現

以下では我々が証明に必要とする長さ r の quiver に話を限る。頂点には普通に順序で番号が振ってあるとする。この quiver の既約表現 e_i とは、i-番めの頂点に C、のこりの頂点には $\{0\}$ が乗っているものである。

非負整数列 $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_r)$ に対し、

$$\begin{aligned} G_{\mathbf{d}} &= GL(d_1, \mathbf{C}) \times \cdots \times GL(d_r, \mathbf{C}), \\ E_{\mathbf{d}} &= \bigoplus_{i \to j} Hom_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}^{d_i}, \mathbf{C}^{d_j}) \end{aligned}$$

とおくと、次元型 d の quiver の表現の同値類は、$E_{\mathbf{d}}$ 中での $G_{\mathbf{d}}$-軌道に他ならない。そこで、各々の表現の同値類 $[V]$ に対して、対応する軌道を $O_{[V]}$ とかく。

さて次に、$d_i = \sum_{i_l=i} a_l$ を満たす、$\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_N) \in (\mathbf{Z}/r\mathbf{Z})^N$ と $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_N) \in (\mathbf{Z}_{\geq 0})^N$ という組に対して、次の集合をタイプ $(\mathbf{i}, \mathbf{a})$ の旗多様体と呼び、$F_{(\mathbf{i},\mathbf{a})}$ で表す。

$$\{\phi = (V^0 \supset V^1 \supset \cdots \supset V^N = \{0\}) \mid V^{l-1}/V^l = e_{i_l}^{\oplus a_l}\}$$

このとき、$\{(x, \phi) \in E_{\mathbf{d}} \times F_{(\mathbf{i},\mathbf{a})} \mid \phi : x\text{-stable}\}$ は非特異で、第 1 成分 $E_{\mathbf{d}}$ への射影を$\pi_{(\mathbf{i},\mathbf{a})}$ で表すこととすると、この写像は proper である。

$S \in D^b(E_{\mathbf{d}})$ は、以下を満たすとき偏屈層とよばれる。

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{supp}(\text{the } i\text{-th cohomology sheaf of } S) &\leq -i, \\ \dim \operatorname{supp}(\text{the } i\text{-th cohomology sheaf of } \mathbf{D}S) &\leq -i \end{aligned}$$

ここで、$\mathbf{D}S$ は S のヴェルディエ双対である。

定義 6.1 $P_{\mathbf{d}}$ を単純偏屈層 L で、そのあるシフト $L[d]$ が、ある $(\mathbf{i}, \mathbf{a})$ に対する $\pi_{(\mathbf{i},\mathbf{a})_!}\mathbf{C}$ に現われるものの全体とする。

$Q_{\mathbf{d}}$ を、$Q_{\mathbf{d}} = \{\bigoplus L_i \in D^b(E_{\mathbf{d}}) \mid L_i \in P_{\mathbf{d}}\}$ とおき、基底 $\{(L)\}$ が $L \in Q_{\mathbf{d}}$ で添字づけられた自由 $\mathbf{Z}$-加群を $K_{\mathbf{d}}$ とかく。これは、$(L') + (L") = (L' \oplus L")$ と $v(L) = (L[1])$ により $\mathbf{Z}[v, v^{-1}]$-加群になる。

さて次の可換図式を考えよう。

$$E_{\mathbf{d}'} \times E_{\mathbf{d}"} \xleftarrow{p_1} \{(x, V, R', R")\} \xrightarrow{p_2} \{(x, V)\} \xrightarrow{p_3} E_{\mathbf{d}'+\mathbf{d}"}$$

ここで、x は $E_{\mathbf{d}'+\mathbf{d}"}$ の元を走り、$V = \oplus V_i$ は次元型 $d"$ の x の部分表現を走り、R' と $R"$ は次の線形同型の直和である。

$$R'_i : \mathbf{C}^{d'_i + d"_i}/V_i \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}^{d'_i}, \quad R"_i : V_i \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}^{d'_i}$$

さてここで 2 つの複体 $L' \in Q_{\mathbf{d}'}$ と $L" \in Q_{\mathbf{d}"}$ を考えよう。次元型は各々$\mathbf{d}'$ と $\mathbf{d}"$ であるとする。

$p_1^*(L' \oplus L")$ は $G_{\mathbf{d}'} \times G_{\mathbf{d}"}$-共変なので、ある唯1つに決まる L を用いて $p_1^*(L' \oplus L") = p_2^*(L)$ と書くことができる。

すると、$\mathbf{K} = \oplus K_{\mathbf{d}}$ に積構造を次のようにして入れることができる。

$$(L')(L") = v^{m(\mathbf{d}',\mathbf{d}")}(p_{3!}L)$$

ここで、$m(\mathbf{d}', \mathbf{d}") = \sum_{i\to j} d'_i d"_j + \sum d'_i d"_i$ である。

次の定理はルステイクの定理である。

定理 6.1 $A_{r-1}^{(1)}$ 型量子群を考え、U_v^- を *Kostant* $\mathbf{Z}[v, v^{-1}]$*-form* とする。

$i_{[e_i^{\oplus l}]} : O_{[e_i^{\oplus l}]} \to E_{(0,\ldots,l,\ldots,0)}$ は埋め込み写像を意味するものとする。

すると、$f_i^{(l)}$ を $i_{[e_i^{\oplus l}]!}\mathbf{C}_{O_{[e_i^{\oplus l}]}}$ に対応させることにより、$\mathbf{Z}[v, v^{-1}]$-代数としての次の環の同型、$U_v^- \xrightarrow{\sim} \mathbf{K}$ が得られる。$v = 1$ のときは、U_v^- を単に U^- とかく。

この定理の証明はランクが2の場合の具体的な計算が基本関係を与え、$\pi_{(\mathbf{i},\mathbf{a})}$ がシフトを除いて $f_{i_1}^{(a_1)} \cdots f_{i_N}^{(a_N)}$ の像になるという事実が全射を与える。一般の場合で証明をやるときはサイクルのない場合に帰着するためにフーリエ-ドリーニュ変換を施して後、次元を比較すると同型が証明される、という仕組みになっているが、今の場合は次のもうひとつのルステイクの定理がこの部分のかわりをする。そして、この単純偏屈層の具体的な記述があとの議論で本質的なのである。

定理 6.2 $i \in \mathbf{Z}/r\mathbf{Z}$ と非負整数 h に対して、*quiver* の表現 $V(i,h)$ を、*head* が e_i、組成列がただ1つでその長さが h の直既約表現で, 組成商

$$rad/rad^2, rad^2/rad^3, \ldots, rad^h$$

が上から順に $e_{i+1}, e_{i+2}, \ldots, e_{i+h}$ となっているものとする。

$V(\mathbf{i},\lambda) := V(i_1,\lambda_1)\oplus\cdots\oplus V(i_l,\lambda_l)$ が *aperiodic* とは、どの h に対しても $V(1,h),\ldots,V(r,h)$ の全てがこの表現の直和因子の中に同時に現われることがないときをいう。

このとき、$\{(IC(O_{V(\mathbf{i},\lambda)},\mathbf{C})) \mid V(\mathbf{i},\lambda)$: *aperiodic* $\}$ が、$\mathbf{K}$ の $\mathbf{Z}[v,v^{-1}]$-自由基底である。これがルステイクにより定義された標準基底である。

7　ギンズブルグによるアファインヘッケ環の既約加群の幾何的構成

X をボレル部分群のなす多様体とし、スタインバーグ多様体を考える。すなわち、

$$Z = \{(N,B',B") \mid B',B" \in X, N\in Lie(B')\cap Lie(B")\}$$

我々が興味があるのは $G = GL(n,\mathbf{C})$ のときで、極大トーラス T は対角行列全体にとる。さて、$(s,q)\in T\times\mathbf{C}^{\times}$ の Z への作用が次のように定義される。

$$(s,q)(N,B',B") = (s(q^{-2}N)s^{-1}, sB's^{-1}, sB"s^{-1})$$

固定点集合は次のようになる。

$$Z^{s,q} = \{(N,B',B")\in Z \mid sNs^{-1} = q^2N, B',B" \in X^s_{N'}\}$$

さて、Y を次のようにおくと、これは非特異で、$Z^{s,q}\subset Y^{s,q}\times Y^{s,q}$ である。

$$\begin{aligned} Y = &\ \{(N,B) \mid B\in X, N\in Lie(B)\},\\ Y^{s,q} = &\ \{(N,B)\in Y \mid sNs^{-1} = q^2N, B\in X^s_N\} \end{aligned}$$

また、射影 $p_{ij} : Y^{s,q}\times Y^{s,q}\times Y^{s,q}\to Y^{s,q}\times Y^{s,q}$ に対して、写像 p_{13} : $p_{12}^{-1}(Z^{s,q})\cap p_{23}^{-1}(Z^{s,q})\to Z^{s,q}$ は proper である。

よって、ボレル- ムーアホモロジー群 $H_*(Z^{s,q})$ に対してコンボリューション積が次の式により定義できる。ここで $\cap$ はキャップ積である。

$$[C'][C"] = (p_{13})_*([C'\times Z^{s,q}]\cap[Z^{s,q}\times C"])$$

定義 7.1 $M(s,q)$ を (s,q) を含む最小の $T \times \mathrm{C}^\times$ の部分群とする。これは $Z_G(s) \times \mathrm{C}^\times$ の部分群でもある。すると、$Z^{s,q}$ は $M(s,q)$-*variety* で、$M(s,q)$-共変な $Z^{s,q}$ の連接層のなすグロタンディエク群を $K^{M(s,q)}(Z^{s,q})$ とかくと、これは次の式によりコンボリューション積をもつ。

$$[\mathcal{F}'][\mathcal{F}''] = (p_{13})_*([\mathcal{F}' \otimes \mathrm{C}_{Y^{s,q}}] \otimes [\mathrm{C}_{Y^{s,q}} \otimes \mathcal{F}''])$$

ここで、$p_{13*}(\mathcal{F}) = \sum(-1)^i[R^i p_{13*}\mathcal{F}]$ である。中間にあるテンソル積は、

$$K^{M(s,q)}(p_{12}^{-1}(Z^{s,q}) \cap p_{23}^{-1}(Z^{s,q}))$$

の元であることに注意せよ。正確には、次の対角埋め込み Δ に関する引き戻し Δ^* である。

$$\Delta : p_{12}^{-1}(Z^{s,q}) \cap p_{23}^{-1}(Z^{s,q}) \to (Z^{s,q} \times Y^{s,q}) \times (Y^{s,q} \times Z^{s,q})$$

さて、ここでアファインヘッケ環を考えよう。ここではベルンシュタインによる、正ルート系の取り方に見かけ上依存する定義を採用する。我々は平行移動部分としてはウエイトのなす格子をとるので、生成元が T_s $(s \in S)$ と、θ_x $(x \in Hom(T, \mathrm{C}^\times))$ の、ローラン多項式環 $\mathrm{Z}[\mathrm{q}, \mathrm{q}^{-1}]$ 上の代数で、基本関係はここでは全部は書かないことにするが肝心な部分は次のとおりである。

$$(T_s - \mathrm{q})(T_s + \mathrm{q}^{-1}) = 0, \qquad T_s\theta_x T_s = \theta_{sx} \quad (sx = x + \alpha_s)$$

我々が考えているのは $G = GL(n, \mathrm{C})$, 格子は $\mathrm{Z}\epsilon_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{Z}\epsilon_n$ であり、$T_i\theta_{\epsilon_i}T_i = \theta_{\epsilon_{i+1}}$ である。このアファインヘッケ環の中心は、$\theta_{\epsilon_1}, \ldots, \theta_{\epsilon_n}$ の対称式のなす環に一致する。よって、任意の元 $(s,q) \in T \times \mathrm{C}^\times$ は自然にこのアファインヘッケ環の中心の 1 次元表現を次のように定める。すなわち、

$$\theta_x \to x(s), \quad \mathrm{q} \to q$$

以下では $s \in T$ の固有値は全て q^2 の冪であると仮定する。

定理 7.1 H をアファインヘッケ環、$Z(H)$ をその中心、$\mathbf{C}_{s,q}\otimes_{Z(H)}H$ を (s,q) に対応する $Z(H)$ の1次元表現で中心をつぶした特殊化アファインヘッケ環とする。すると次の環の同型が成り立つ。

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_{s,q}\otimes_{Z(H)}H &\simeq \mathbf{C}_{s,q}\otimes_{R(G\times\mathbf{C}^\times)}K^{G\times\mathbf{C}^\times}(Z)\\ &\simeq \mathbf{C}_{s,q}\otimes_{R(M(s,q))}K^{M(s,q)}(Z^{s,q})\\ &\simeq H_*(Z^{s,q})\\ &\simeq End_{D^b(Y^{s,q})}(p_{1!}\mathbf{C}_{Y^{s,q}})\end{aligned}$$

ここで、p_1 は $\mathcal{N}^{s,q}$ の第1成分への射影。さらに、

(1) この同型により、対応する3つの表現は全て同型である。すなわち、K群のコンボリューション積により定められる表現、ボレル-ムーアホモロジー群のコンボリューション積により定められる表現、$i_N:\{N\}\to\mathcal{N}^{s,q}$ に関する引き戻しを経由して作用が定義される表現、は全て同型である。式でかくならば、

$$\mathbf{C}_{s,q}\otimes_{R(M(s,q))}K^{M(s,q)}(X_N^s)\simeq H_*(X_N^s)\simeq H^*\left(i_N^!p_{1!}\mathbf{C}_{Y^{s,q}}\right)$$

(2) 各 (s,q) に対し、$sNs^{-1}=q^2N$ を満たす冪零元 N を、固有値 q^{2i} の s の固有空間を i-番めの頂点に乗せることにより、長さ r の巡回的 *quiver* の表現と同一視する。この同一視のもとで、$p_{1!}\mathbf{C}_{Y^{s,q}}$ は次のように記述される。

$$p_{1!}\mathbf{C}_{Y^{s,q}}=\bigoplus L_{O_{[V(\mathbf{i},\lambda)]}}(d)\otimes IC(O_{[V(\mathbf{i},\lambda)]},\mathbf{C})[d]$$

ここで、$V(\mathbf{i},\lambda)$ は *aperiodic* な表現全体を走り、d は $\mathbf{Z}$ を走る。

ここで、$L_{[V(\mathbf{i},\lambda)]}=\bigoplus L_{O_{[V(\mathbf{i},\lambda)]}}(d)$ とおくと、これらは既約 $\mathbf{C}_{s,q}\otimes_{Z(H)}H$-加群の完全代表系である。

8 カズダン-ルスティクの誘導定理

さて一般に、M が G-variety、M^+ が1点コンパクト化で、M^+ は非特異 G-variety に埋め込まれていて、G の極大コンパクト部分群 G^0 に関して共

変な基本近傍系 $\{U_\alpha\}$ をもつとしよう。また、十分大きい α と β に対して、$j_{\alpha\beta}: U_\alpha \to U_\beta$ が、次の同型 $j^*_{\alpha\beta}: K^0_{G^0}(U_\beta) \xrightarrow{\sim} K^0_{G^0}(U_\alpha)$ を誘導するとしよう。ここで、$K^0_{G^0}(U)$ はアテイヤーの位相的K理論である。また係数は複素数まで拡大されている。このK理論の定義の1つとしてはたとえば、G^0-共変ベクトルバンドルの有界複体の全体で添字づけられた基底をもつベクトル空間を次の同値関係のなす部分空間で割ったものというのが定義である。「ある acyclic な有界複体 F_1, F_2 に対して、$E_1 \equiv E_2 \Leftrightarrow E_1 \oplus F_1 \simeq E_2 \oplus F_2$」

すると、$K^G_0(M)$ を次のようにして定義できる。

$$K^G_0(M) = coker(K^0_{G^0}(\infty) \xrightarrow{i_*} K^0_{G^0}(U_\alpha)) \quad (\alpha >> 0)$$

さて、まず我々は $G \times \mathrm{C}^\times$ の部分群 M を次のようにとる。

$$M = \{(diag(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1\mathbf{q}^2, \ldots, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2\mathbf{q}^2, \ldots, \mathbf{v}_m, \ldots), \mathbf{q})\}$$

ここで、$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m, \mathbf{q} \in \mathrm{C}^\times$。

そして $c_0 := \{(s,q) \in M \mid det(1 - sq^2, (g/p)^N) \neq 0\}$ とおく。ここで G の標準ボレル部分群として下三角行列の全体をとる。N はこれに含まれるようにとる。$g = gl(n, \mathrm{C})$ の部分リー環 p、つまり放物型部分群 P のリー環 p もこのボレル部分環を含むようにとっている。

この場合にカズダン-ルステイクの誘導定理を適用すると、次のようになる。

定理 8.1 まず、

$$\begin{aligned}
\Lambda = &\ \{(u,B) \mid B \in X, u \in B,\ u \text{ は冪単 }\},\\
\Lambda^r = &\ \{(u,B) \mid B \in X, u \in B \cup rB,\ u \text{ は冪単 }\},\\
\hat{\Lambda}^r = &\ \{(u,P) \mid u \in P,\ u \text{ は冪単 }\}
\end{aligned}$$

とし、$\hat{\pi}^r: \Lambda^r \to \hat{\Lambda}^r$ を自然な射影とする。$\Lambda^r \setminus \Lambda$ 上で *acyclic* な次の複体をとる。

$$\hat{\epsilon}^r: \cdots \to 0 \to \mathbf{q}^2 \otimes T^*_{\Lambda^r/\hat{\Lambda}^r} \to \overset{degree=0}{\check{\mathrm{C}}} \to 0 \to \cdots$$

ここで、q は第 2 成分への射影 $G\times\mathbf{C}^\times\to\mathbf{C}^\times$ の定める線束。

このとき、τ^r が次のように定義され、

$$\begin{aligned}K_0^M(X_u) &\xrightarrow{i_*} K_0^M(\hat\pi^{r-1}\hat\pi^r(X_u))\\ &\xrightarrow{\hat\pi^r_*} K_0^M(\hat\pi^r(X_u))\xrightarrow{\hat\pi^{r*}} K_0^M(\hat\pi^{r-1}\hat\pi^r(X_u))\\ &\xrightarrow{\hat\varepsilon^r\otimes -} K_0^M(\hat\pi^{r-1}\hat\pi^r(X_u)\cap\Lambda)=K_0^M(X_u)\end{aligned}$$

c_0 に関する局所化 $K_0^M(X_u)_{c_0}$ は次の式により H-加群になる。

$$T_r(\xi)=-\tau^r(\xi)+\mathrm{q}^2\otimes\xi,\quad \theta_x(\xi)=L_x\otimes\xi$$

さらにこの表現は $H\bigotimes_{H_L}K_0^M(X_u^P)$ と同型。ここで、H_L は放物型部分群 P のレヴィ部分群 L に対応する部分環で、X_u^P は u を含む P のボレル部分群のなす集合。

命題 8.1 H-加群のグロタンディエク群の中で次の等式が成立。

$$[\mathbf{C}_{s,q}\otimes K^{M(s,q)}(X_N^s)]=[H\bigotimes_{H_L}\mathbf{C}_L]$$

ここで、$\mathbf{C}_L$ は H_L の 1 次元表現であって、次で定義される。

$$T_s\to q,\quad \theta_x\to x(s)$$

9 主定理の証明の概略

$c_n=\theta_{\epsilon_1}+\cdots+\theta_{\epsilon_n}$ は中心 $Z(H)$ の元なので、任意の H-加群 M は必ず一般固有空間 $P_{c_n,\lambda}(M)$ の直和になる。

定義 9.1 作用素 $i-Res$ を次のように定める。

$$i-Res(M)=\bigoplus_{\lambda\in\mathbf{C}}P_{c_{n-1},\lambda-q^{2i}}(Res^{H_n}_{H_{n-1}}P_{c_n,\lambda}(M))$$

U_n を次の元で生成される H-加群のグロタンデイエク群の部分群とする。

$$M_{[V(\mathbf{i},\lambda)]} = \mathbf{C}_{s,q} \otimes K^{M(s,q)}(X_N^s) \quad (N \leftrightarrow V(\mathbf{i},\lambda))$$

そして $U^* = \oplus U_n^*$ and $f_i = (i - Res)^T$ とおく。$\{[L_{[V(\mathbf{i},\lambda)]}]\}$ の双対基底が U^* の基底になるが、これを $\{[L_{[V(\mathbf{i},\lambda)]}]^*\}$ とかくことにする。

命題 9.1 U^- に $f_i \cdot x = xf_i$ により、U^--加群構造を入れる。このとき、
(1) U^* と U^- は U^--加群として同型。
(2) $\{[L_{[V(\mathbf{i},\lambda)]}]^*\}$ はこの同型により標準基底と一致。

証明はまず q^2 が 1 の冪根でない場合に同型を構成するところから始める。このとき、カズダン-ルステイクの誘導定理より、$(i-Res)^T[M_{[V(\mathbf{i},\lambda)]}]$ が具体的に計算できることと、f_i と PBW-型基底の積が具体的に計算できることより、同型が構成できる。q^2 が 1 の冪根のときは、folding の議論により、同型を構成する。(2) を示すには、

$$p_{1!}\mathbf{C}_{Y^{s,q}} = \bigoplus L_{O_{[V(\mathbf{i},\lambda)]}}(d) \otimes IC(O_{[V(\mathbf{i},\lambda)]}, \mathbf{C})[d]$$

に注目する。アファインヘッケ環の既約表現はギンズブルグの定理により、IC-複体の重複度の空間により与えられ、他方、これらの IC-複体はルステイクの定理より標準基底に他ならない。これで本質的には説明がすんでいるのだが、詳しくは [A] を参照のこと。

さてここで $G(m,1,n)$ のヘッケ環に対して $i-Res$ と $i-Ind$ を定義しよう。$t_1 = a_1, t_2 = a_2a_1a_2, \ldots$ とおき、また $c_n = t_1 + \cdots + t_n$ とする。

$$\begin{aligned} i-Res(M) &= \bigoplus_{\lambda \in \mathbf{C}} P_{c_{n-1},\lambda-q^{2i}}(Res_{H_{n-1}}^{H_n} P_{c_n,\lambda}(M)), \\ i-Ind(M) &= \bigoplus_{\lambda \in \mathbf{C}} P_{c_{n+1},\lambda+q^{2i}}(Ind_{H_n}^{H_{n+1}} P_{c_n,\lambda}(M)) \end{aligned}$$

そして、$e_i = (i-Ind)^T, \quad f_i = (i-Res)^T$ とおく。

補題 9.1 *(1)* 自然な写像 $U^* \to u^*$ は U^--加群としての全射準同型。
(2) u^* 上では次が成立。

$$e_i[S^\lambda]^* = \sum_{r(\lambda/\mu)=i} [S^\mu]^*, \quad f_i[S^\lambda]^* = \sum_{r(\mu/\lambda)=i} [S^\mu]^*$$

この補題により、u^* が空のヤング図形で生成される $\mathrm{C}Y^m$ の巡回的部分加群であることがわかり、これから、既約最高整ウエイト表現であることもわかる。よって、上の命題とあわせて定理を得る。

10 アルゴリズム

主定理により、H_n の分解行列を計算するには、$L(\Lambda)$ の標準基底を計算すればよいことになった。ここで、グロノフスキ-ルステイクの定理により、標準基底は柏原の意味の大域基底に等しいこと、さらに、それは柏原の定理により結晶基底（lower crystal base）に写されることが知られている。よって、分解行列を計算するには、$L(\Lambda)$ の結晶基底を計算すればよいわけである。ここで、クリスタルグラフの章で説明したことにより、この表現はレベル 1 のフォック空間の m 階テンソル積に埋め込まれ、しかも次の性質をもつ結晶格子の基底をもつ。

(1) $\overline{A_\mu} = A_\mu$,

(2) $A_\mu = \mu + \sum_{\lambda \rhd \mu} \alpha_{\lambda\mu}(v)\lambda$

また、結晶基底は次の性質をもつ唯一の基底である。

(1) $\overline{C_\mu} = C_\mu$,

(2) $C_\mu \equiv \mu \ (mod\ v)$

これらの事実より、結晶基底を計算するアルゴリズムは次のようになる。

まず、ヤング図形の集合に対して、辞書式順序を dominance order の拡張になるようにいれる。

$$\mu^1 = ((n), \phi, \ldots, \phi) > \cdots > \mu^t$$

まず、一番上の μ^1 に対しては A_{μ^1} が標準基底 C_{μ^1} そのものである。さて、標準基底を $C_{\mu^1},\dots,C_{\mu^{i-1}}$ までは既に決定できたとしよう。このとき、まず C_{μ^i} の形を次のように仮定する。

$$C_{\mu^i} = A_{\mu^i} - \gamma_{i-1}(v)C_{\mu^{i-1}} - \cdots - \gamma_1(v)C_{\mu^1}$$

さてさらに、$\gamma_{i-1}(v),\dots,\gamma_{j+1}(v)$ までは既に決定されたとしよう。このとき、次の式における μ^j の係数を $\alpha^j(v)$ とする。

$$A_{\mu^i} - \gamma_{i-1}(v)C_{\mu^{i-1}} - \cdots - \gamma_{j+1}(v)C_{\mu^{j+1}}$$

すると、次の条件が $\gamma_j(v)$ を決める。

$$\alpha^j(v) - \gamma_j(v) \in v\mathbf{Z}[v], \quad \gamma_j(v) = \gamma_j(v^{-1})$$

最後に文献を挙げて終わりとする。文献は必要最小限にしぼった。他の文献については [A] の文献リストを参照のこと。

References

[1] S. Ariki, "On the decomposition numbers of the Hecke algebra of $G(m,1,n)$" *Journal of Mathematics Kyoto University*, to appear.

[2] G.Lusztig, "Quivers, perverse sheaves and quantized enveloping algebras" *Journal of A.M.S.*, **4**, 1991, pp.365-421.

[3] N.Chriss, V.Ginzburg, "Representation Theory and Complex Geometry" *Birkhäuser*, to appear.

[4] I.V.Cherednik, "A new interpretation of Gelfand-Tzetlin bases" *Duke Math.*, **54**, 1987, pp.563-577.

[5] V.Ginzburg, E.Vasserot, "Langlands reciprocity for affine quantum groups of type A_n"
Internat.Math.Research Notices, 1993, pp.67-85.

[6] M.Jimbo, K.C.Misra, T.Miwa, M.Okado, "Combinatorics of representations of $U_q(\hat{sl}(n))$ at $q = 0$" *C.M.P.*, **136**, 1991, pp.543-566.

[7] D.Kazdhan, G.Lusztig, "Proof of the Deligne-Landlands conjecture for Hecke algebras" *Invent.Math.*, **87**, 1987, pp.153-215.

[8] M.Kashiwara, "On crystal bases of the q-analogue of universal enveloping algebras" *Duke Math.*, **63-2**, 1991, pp.465-516.

[9] I.Grojnowski, "Representations of affine Hecke algebras (and affine quantum GL_n) at roots of unity" *Internat.Math.Research Notices*, 1994, pp.215-217.

[10] A.Lascoux, B.Leclerc, J.Y.Thibon, "Hecke algebras at roots of unity and crystal bases" *Comm.Math.Phys.*, to appear.