表現論シンポジウム講演集, 1996
pp.7-19

2面体群に付随した可積分系

立教大理　落合啓之 (Hiroyuki Ochiai)

Abstract. 2面体群を対称性に持つような Calogero-Moser type の完全積分可能系が存在するための必要条件をいくつか与える. 応用として Weyl 群にならないような2面体群を対称性にもつものはいわゆる三角函数的あるいは指数函数的なポテンシャル函数を持たないことを示す.

1. Introduction.

Calogero-Moser model [C] [M] は直線上のいくつかの質点が距離の2乗に反比例するポテンシャルで相互作用するような量子多体力学系である. すなわちハミルトニアン

$$H_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \sum_{1\le i<j\le N} \frac{\beta}{(x_i - x_j)^2}$$

を持つような完全可積分系である. いろいろな方向への拡張が考察されていて

(a) <u>古典力学系 ⇒ 量子力学系 ⇒ 相対論系</u>：微分作用素の可換族（量子力学系）を扱う代わりに差分作用素の可換族（相対論系）や Poisson 括弧で可換な函数族（古典力学系）を扱う. この文章ではこの方向への発展にはこれ以上踏み込まない.

(b) <u>函数の形を変更する</u>：z^{-2} の代わりに $(\sin^2 z)^{-1}$ や Weierstrass の楕円函数 $\wp(z)$ を用いる. これらの函数には, $\mathbb{C}$ 上の有理型函数で偶函数であり周期に関する基本領域の中に一つの2位の極を持つ, という共通の性質がある.

(c) <u>ルート系に付随したものを考える</u>：上のハミルトニアン H_{CM} は, 対称群 $\mathfrak{S}_n$（すなわち A_{n-1} 型のルート系に付随した Weyl 群）で不変である. これを一般のルート型に対応した Weyl 群に拡張したものを考察の対象とする.

このようにいろいろな拡張を許したものも Calogero-Moser 系と呼ぶ. ここに共通の性質はいろいろあるが, ハミルトニアンのみならず積分（ハミルトニアンと可換な作用素）も 対称群（一般には Weyl 群）で不変である, というのは一つの顕著な性質であろう. これはこの可積分系のもう一つの現れ方と関係している. このシンポジウムではむしろこちらの説明の方がわかりやすいだろう.

群や対称空間の帯球関数はその定義から不変微分作用素環（たいていは対応するLie 環の展開環 $U(\mathfrak{g})$ の中心 $Z(\mathfrak{g})$ としてよい）の同時固有関数である．Cartan 分解を念頭において Cartan 部分群に制限した函数を考えるとそれは不変微分作用素を変数分離した微分作用素系の同時固有函数になっている．特に Laplacian (Casimir) からこのプロセスを経て出てくる微分作用素は三角函数の形のポテンシャルを持つ Calogero-Moser 系の Hamiltonian になる．対称空間の制限ルート系がここでいうルート系であり結合定数 β はルートの重複度（自然数）から決まる特別な値をとる．すなわちここでいう完全可積分系は帯球函数の満足する微分方程式系に他ならない．いわゆる Heckman-Opdam の超幾何微分方程式系は三角函数の場合にこれを一般のルート系一般のパラメータで考えたものである．Cartan motion group （いわゆる K と $\mathfrak{p}$ の半直積, 特別な場合が Euclid 運動群）の場合も同様のストーリーが展開しこの時には有理ポテンシャル t^{-2} が現れる．

群や対称空間から来る場合は不変微分作用素の Laplacian 以外の元の変数分離として積分（ Hamiltonian と交換可能な微分作用素）が得られる．このときそれら積分の特徴的なことは, それぞれが Weyl 群不変であることと主部が Weyl 群不変式に対応した定数係数の微分作用素になっていることである．

では逆に「２階の形式的自己共役（ formally self adjoint ）な微分作用素

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + V(x)$$

が完全積分可能でその積分が今の性質を持っているようなもの」はいったいどのくらい存在するだろうか．この問に対しては古典型の Weyl 群, すなわち対称群（ A 型）やその符号つきの拡張（ BC 型および D 型）の場合には若干の弱い仮定の下で分類がほぼできている [OOS]. 結果としては等質空間に現れる不変微分作用素の変数分離から生ずる形のもののアナログと思えるものしか出てこない．すなわち標語的な言い方が許されるならば, Weyl 群から出発しても背後に Lie 群のにおいがするものしか現れない．なぜか？

<u>Coxeter 群のプロフィール</u>：Coxeter 群は鏡映で生成され Weyl 群のように Coxeter 関係式を持つ．既約な有限 Coxeter 群は Weyl 群（ A から G まで）と H_3, H_4, $I_2(n)$ のいずれかである．最後の $I_2(n)$ と書かれるものが２面体群であり, 表裏のある正 n 角形の対称性を表す位数 $2n$ の有限群である．２面体群 $I_2(n)$ は $n = 2, 3, 4, 6$ の時（すなわち長方形, 正三角形, 正方形, 正六角形の時）には Weyl 群 $A_1 \times A_1$, A_2, $B_2 = C_2$, G_2 と同型でありそれ以外の時は Weyl 群にならない．Weyl 群にはその格子拡大である affine Weyl 群が存在するが Coxeter 群ではそれは期待できない．

ではWeyl群の代わりにLie群を背後に持たないような有限群を考えたらどうなるだろうか. 例えばCoxeter群[1]のようにWeyl群に'似ている'有限群の時はどうか？

ここでなぜCoxeter群（の自然表現）を考えるのか動機を二つ書こう.
(壱) Coxeter群ならばChevalleyの定理によって不変式環が多項式環になる. ここでは不変式環の生成元を主部（首部？）とするような積分の存在を要請しているので, 不変式環の環としての構造が複雑になれば問題そのものの立て方をまず吟味しなくてはならない. 生成元の間に関係式が存在すれば, 得られる可積分系はalgebraic integrable systemの色彩を帯びる. それはここでの問題とは一応は別の興味となる.
(弐) Dunkl作用素との関係. Heckman-Opdamの仕事の整理の過程でLie群の表現論でも有名になった微分差分作用素がDunkl作用素である. 彼らはいわゆるHeckman-Opdamの超幾何微分方程式系（つまり三角函数ポテンシャル）の再構成にこの作用素を用いた. 同様の構成は有理ポテンシャルの場合に知られていてしかもこの時はWeyl群のみならずCoxeter群で構成がうまくいく. すなわち類似の可積分系の存在が既に保証されている.

2面体群の時のDunkl作用素による構成は有理ポテンシャルではうまくいくが三角函数ポテンシャルではうまくいかない. その気分は今まで'affine Weyl群がないから'と説明されていた. そこら辺の気分をここでは数学にしてみる. すなわち(3.1), (3.2)の形の微分作用素H, Pが交換可能であればどのようなかたちをしているかを考察する. ここではそのようなものを分類するまでは至らないが非正則点の振る舞いについてかなり強い制限が課せられることを中心に議論する. 結果は§5にまとめられているが, 端的に言うと非正則点は少ない. 例えば仮定を強くして分かりやすくした結論を一つを書くと

Theorem. $n \neq 2,3,4,6$とする. 2面体群$W = I_2(n)$で不変な$\mathbb{C}^2$上の2つの有理型*(meromorphic)*微分作用素

$$H = \partial_1 \partial_2 + V(x) \tag{3.1}$$

$$P = \partial_1^n + \partial_2^n + (\textit{lower order terms}) \tag{3.2}$$

が互いに交換可能ならば極は高々有限個の直線からなる.

従って例えば三角函数の2乗べき$(\sin^2 z)^{-1}$のような函数はポテンシャルとして許されない.

Organization この文章の内容は以下の通り：

§1 は長めの Introduction である．今回のこの文章は報告集としてよりも講演の予稿として書きます．最初の 2 ページはこの話の枕となる非常に一般的なことである．次にここでの問題を考える動機を述べる．論文（英語）では表現しきれないことも文字にするよう努力してみた．最後に以降の節の内容をまとめる（このページのこと）．

§2 では，与えられた微分作用素 P が 2 階の自己共役な微分作用素 H と交換可能（可換）であるという条件をどう言い換えることができるかを書き下す．このステップは代数的な計算だけからなる．結果はいくつかの微分方程式で記述される．すなわちこれらの連立微分方程式を満たすことと交換可能であることは同値である．

§3 では，上で記述した連立微分方程式のうち最も高階の項に関した（一つの）条件を利用してポテンシャル函数が 2 点間相互作用の和に書けることを示す．このステップは難しくないし方法自体も新しくないが，考えている領域の形状が複雑な場合は多価性に伴う煩雑さが生ずる．最終結果にはほとんど反映しないと思われるが論理的な筋道を通すには領域の形についての弱い仮定が必要である．

§4 では，§2 の連立微分方程式の次に高階の項に関した条件を一つの（非線型の）函数微分方程式に書き換える．以前 B_2 型（C_2 型）の Weyl 群，すなわち正 4 角形に対応した 2 面体群，の場合に一つの双線型函数微分方程式が得られることを示した[O] [OO]．その場合は更にその函数微分方程式は積分できて微分を含まない双線型函数方程式に書き直せるのであった．ここではそれらの結果を一般の 2 面体群の場合へ拡張する．ただし今の場合には，得られる函数微分方程式は高階の微分を含んでいて，また微分を含まない形に積分することはできないと思われる，という相違がある．ここでは函数方程式の形だけでなく係数の具体的な形もある程度知りたいので，このステップでは若干の計算が避けられない．

§5 では前節で得られた函数微分方程式の解の性質を調べる．実際には例えば三角函数の逆二乗べきの形の解がないことを示したい．ここでは極の位数や非正則点の位置に関する定理を述べる．ただしこの函数微分方程式から汲み尽くされるべき情報がまだ全ては汲みつくされていないようで，特に n が偶数の場合はこれが最終的な結果であるとはいえないと思う．このステップでは平面における直線の配位 (configuration) に関する少しの考察が必要になる．その過程が，なぜ affine Weyl 群が存在する場合としない場合で相違が生まれるのかの一つの説明になると思う．

Appendix では §2 のキーとなる補題の証明を与える．

2. A pair of commuting operators. この節では $\mathbf{C}^N$ の領域 Ω 上で定義された微分作用素

$$H = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} \partial_k^2 + V(x), \quad \text{と} \tag{2.1}$$

$$P = \sum_{\alpha} a_\alpha(x)\partial^\alpha \tag{2.2}$$

がいつ交換可能になるかを考える．ここで $x = (x_1, \ldots, x_N)$ は $\mathbf{C}^N$ の座標で, 対応する偏微分を $\partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$ と略記する．また multi-index $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbf{Z}_{\geq 0}^N$ に対して $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\alpha_2}\ldots\partial_N^{\alpha_N}$ と定める．

(2.2) の様に微分を右に寄せて書いた時に対応する函数

$$p(x,\xi) = \sum_{\alpha} a_\alpha(x)\xi^\alpha$$

を P の total symbol と呼ぶ．ここで $(x,\xi) = (x_1, \ldots, x_N, \xi_1, \ldots, \xi_N)$ は余接束 $T^*\Omega$ の座標である．P が N 階の微分作用素ならば total symbol p は ξ に関して N 次の多項式になる．その k 次斉次部分を p_k と書く：

$$p_k = p_k(x,\xi) = \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_N=k} a_\alpha(x)\xi^\alpha.$$

$T^*\Omega$ 上の微分作用素を 3 つ定義しよう．

$$X = \sum_{k=1}^{N} \partial_{\xi_k}\partial_k, \qquad Y = \sum_{k=1}^{N} \xi_k\partial_k, \qquad Z = \sum_{k=1}^{N} \partial_k^2.$$

ここで $\partial_{\xi_k} = \frac{\partial}{\partial \xi_k}$ である．この 3 つの微分作用素 (X, Y, Z) は交換関係

$$[X, Y] = Z, \quad [X, Z] = 0, \quad [Y, Z] = 0$$

に従う．すなわち Heisenberg Lie 代数を成す．

Lemma 2.3. 二つの微分作用素 P, S の *total symbol* をそれぞれ $p = \sum p_k$, $s = \sum s_k$ とする．この時 P と S が

$$S = [\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} \partial_k^2, P]$$

の関係にあるための必要十分条件は

$$Y\left(\sum_{i\geq 0} \frac{1}{i!}(-\tfrac{1}{2}X)^i p_{k+i-1}\right) = \sum_{i\geq 0} \frac{1}{i!}(-\tfrac{1}{2}X)^i s_{k+i} \qquad (k = 0, 1, \ldots) \tag{2.4}$$

である．

Lemma 2.5. 二つの微分作用素 P, S の *total symbol* をそれぞれ $p = \sum p_k$, $s = \sum s_k$ とする. また $V = V(x)$ を x の函数とする. この時 P, S, V が

$$S = [P, V]$$

の関係にあるための必要十分条件は

$$\sum_{i \geq 0} \frac{1}{i!}(-\tfrac{1}{2}X)^i s_{k+i} = \sum_{j \geq 1, \mathrm{odd}} \frac{1}{j! 2^{j-1}} \{\sum_{l \geq 0} \frac{1}{l!}(-\tfrac{1}{2}X)^l p_{k+j+l}, V\}_j \tag{2.6}$$

である.

ここで $\{\cdot,\cdot\}_j$ は Poisson 括弧の一般化で, 特に (x,ξ) の函数 $g = g(x,\xi)$ と x の函数 $V = V(x)$ に対して

$$\{g(x,\xi), V(x)\}_j := \sum_{i_1,\ldots,i_j=1}^{N} \frac{\partial^j g}{\partial \xi_{i_1} \partial \xi_{i_2} \cdots \partial \xi_{i_j}} \frac{\partial^j V}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_j}}. \tag{2.7}$$

と定義される.

Corollary 2.8. 微分作用素 P の *total symbol* をそれぞれ $p = \sum p_k$ と記す時

$$\mathring{p}_k := \sum_{i \geq 0} \frac{1}{i!}(-\tfrac{1}{2}X)^i p_{k+i}. \qquad (k = 0, 1, \ldots, m) \tag{2.9}$$

と定義する. 和は有限和であり $\mathring{p}_k$ は p_k と同様に ξ に関して k 次斉次である. この記号の下で, x の函数 $V = V(x)$ に対して次の 2 条件は同値.

$$[\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} \partial_k^2 + V(x), P] = 0, \tag{2.10}$$

$$Y(\mathring{p}_k) = \sum_{j \geq 1, \mathrm{odd}} \frac{1}{j! 2^{j-1}} \{\mathring{p}_{k+1+j}, V\}_j. \quad (k = -1, 0, \ldots, m) \tag{2.11}$$

条件式 (2.11) で分かるように $\mathring{p}$ の添字が偶奇のものは互いに無関係である. これは (2.1) の形の作用素 H は（形式的に）自己共役なので P の自己共役部分, 反自己共役部分がそれぞれ H と交換可能になることを反映している.

3. Dihedral case. この節では2変数（すなわち前節の記号で $N=2$ ）の場合に領域 $\Omega\subset\mathbb{C}^2$ 上の微分作用素 H, P が交換可能である条件を書き直す. ここで

$$H=\partial_1\partial_2+V(x) \tag{3.1}$$

$$P=\partial_1^n+\partial_2^n+\text{(lower order terms)} \tag{3.2}$$

の形をしているとする. 後の都合上, (2.1) に線型変換を施して H の主部をこの形にしておく. これに応じて (X,Y,Z) も

$$X=\partial_{\xi_1}\partial_1+\partial_{\xi_2}\partial_2,\quad Y=\xi_2\partial_1+\xi_1\partial_2,\quad Z=2\partial_1\partial_2 \tag{3.3}$$

と変更しておく必要がある. 以下この記号を用いることに注意.

方程式 (2.11) から3つを書き下すと

$$\begin{cases} Y(\mathring{p}_n)=0 \\ Y(\mathring{p}_{n-2})=\{\mathring{p}_n,V\} \\ Y(\mathring{p}_{n-4})=\{\mathring{p}_{n-2},V\}+\dfrac{1}{24}\{\mathring{p}_n,V\}_3 \end{cases} \tag{3.4}$$

となる. 定義 (2.9) によれば $\mathring{p}_n=\xi_1^n+\xi_2^n$ であり $\mathring{p}_{n-2}=p_{n-2}$ となる. 従って (3.4) の最初の式 $Y(\mathring{p}_n)=0$ は今は自動的に満たされている.

この節では2番目の方程式 $Y(\mathring{p}_{n-2})=\{\mathring{p}_n,V\}$ を扱い, 次の節では最後の方程式 $Y(\mathring{p}_{n-4})=\{\mathring{p}_{n-2},V\}+\frac{1}{24}\{\mathring{p}_n,V\}_3$ を扱う. 一般には方程式 (2.11) には (3.4) 以外にも満たすべき方程式があるのでこれら3条件 (3.4) を満たすことは H, P に対する必要条件にすぎないことに注意しておく.

Proposition 3.5. *(3.1), (3.2) の形をした二つの微分作用素 H, P に対して次の3条件は同値である.*

- $[H,P]$ の階数は $n-2$ 以下である. すなわちシンボル $\sigma_{n-1}([H,P])=0$.
- $Y(\mathring{p}_{n-2})=\{\mathring{p}_n,V\}$.
- 次の条件 *(3.6)* を満たすような函数 $v_l(x)=v_l(x_1,x_2)$ が存在する.

$$\begin{cases} (\zeta^{-l}\partial_1+\zeta^l\partial_2)v_l(x)=0, \\ V(x)=\displaystyle\sum_{l=0}^{n-1}v_l(x), \\ \mathring{p}_{n-2}(x,\xi)=-n\displaystyle\sum_{l=0}^{n-1}v_l(x)\frac{\zeta^l\xi_1^{n-1}-\zeta^{-l}\xi_2^{n-1}}{\zeta^{-l}\xi_1-\zeta^l\xi_2}. \end{cases} \tag{3.6}$$

ここで ζ は 1 の原始 $2n$ 乗根 $\zeta = \exp(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{n})$ である. (3.6) の最後の式は割り切れて ξ の多項式となる. 条件 (3.6) を満足するような v_l は V と $\mathring{p}_{n-2}$ から一意に決まる. 実際

$$
\begin{aligned}
f(x,\xi) &:= \frac{n\xi_1^n V(x) - \xi_1\xi_2\mathring{p}_{n-2}}{n^2}, \\
v_l(x) &:= f(x,(\zeta^{2l},1)), \qquad (l = 0,1,\ldots,n-1),
\end{aligned} \tag{3.7}
$$

で与えられる.

条件 (3.6) の最初の式

$$(\zeta^{-l}\partial_1 + \zeta^l\partial_2)v_l(x) = 0$$

は v_l が projection

$$\pi_l : \Omega \ni (x_1, x_2) \mapsto (\zeta^l x_1 - \zeta^{-l}x_2) \in \mathbb{C}$$

のファイバーに沿って局所定数であること（ファイバーの各連結成分上定数であること）を意味している. 従って領域 Ω の形状に関して許容できる条件をつけることによって, 実際に v_l がファイバーに沿って定数であることが導かれる.

Lemma 3.8. 領域 $\Omega \subset \mathbb{C}^2$ が条件

(3.9) *projection* π_l *のファイバーが連結である*

を満足すると仮定する. この時一変数函数 $r_l = r_l(z)$ が存在して

$$v_l(x_1, x_2) = r_l(\zeta^l x_1 - \zeta^{-l}x_2) \tag{3.10}$$

と表すことができる.

例えば Ω_1 を $\mathbb{C}^2$ の開凸集合とし Y_1 を Ω_1 の解析的閉部分集合とする. この時, 領域 $\Omega = \Omega_1 \setminus Y_1$ は条件 (3.9) を満足する.

(3.6) と (3.10) を合わせればポテンシャル函数は

$$V(x) = \sum_{l=0}^{n-1} r_l(\zeta^l x_1 - \zeta^{-l}x_2) \tag{3.11}$$

と書き表せる. すなわち 2 点間相互作用の和に書き表せることとなる.

4. Functional equation. この節では (3.4) の（初めの 2 つの式のみならず）3 番目の式も用いる.

Proposition 4.1. (x,ξ) についての函数 $\mathring{p}_{n-4}$, $\mathring{p}_{n-2}$, $\mathring{p}_n = \xi_1^n + \xi_2^n$ が ξ に関してそれぞれ $n-4$ 次斉次, $n-2$ 次斉次, n 次斉次であるとする. これらの函数が方程式 *(3.4)* に従うならば

$$(\partial_{\xi_1}\partial_1 - \partial_{\xi_2}\partial_2)^{n-3}(\{\mathring{p}_{n-2}, V\}) = 0 \tag{4.2}$$

が成り立つ.

ここに使われている微分作用素 $\partial_{\xi_1}\partial_1 - \partial_{\xi_2}\partial_2$ が Heisenberg Lie 環 (X, Y, Z) と可換であることが証明の鍵の一つとなる.

この式はコンパクトにまとまっていてきれいではあるがこのままでは詳しい解析に役立たないので, バラバラにほぐした形を次に求める.

Proposition 4.3. 前の命題で得られた方程式は *(3.6)* の v_l を用いると

$$\sum_{l,l'=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-2} b(l,l';i)(\zeta^{-l}\partial_1)^i(v_l) \times (\zeta^{-l'}\partial_1)^{n-2-i}(v_{l'}) = 0 \tag{4.4}$$

という双線型な微分方程式に書き直すことができる. ここで現れる定数 $b(l,l';i)$ は

$$b(l,l';i) = \begin{cases} 0 & (l = l') \\ \dfrac{(-1)^{l'}(n-3)!n}{2\sqrt{-1}}\dbinom{n}{i+1}\dfrac{\cos\frac{(l-l')\pi}{n}\sin\frac{(l-l')(i+1)\pi}{n}}{\sin^2\frac{(l-l')\pi}{n}} & (l \neq l') \end{cases}$$

という表示を持つ.

(4.4) のような表示を持つことは (3.6) から易しいが係数 $b(l,l';i)$ を求めるには多少の計算が必要である. 特にその具体形が必要になるものを挙げておくと

$$\begin{aligned} b(l,0;0) &= \frac{(n-3)!n^2}{2\sqrt{-1}}\cot\frac{l\pi}{n}, \\ b(l,0;1) &= (n-1)\cos\tfrac{l\pi}{n} \times b(l,0;0). \end{aligned} \tag{4.5}$$

更に v_l 達が (3.10) にあるように r_l 達で表示できる時には式 (4.4) は r_l 達の微分の 2 次形式で書き直せる．特に一つの函数，例えば r_0 に注目して移項すれば次のように書ける:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n-2} c_i(x_1; x_2, \{r_l\}) r_0^{(n-i-2)}(x_1 - x_2) \\
(4.6) \qquad &= -\sum_{l_1=1}^{n-1}\sum_{l_2=1}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-2} b(l_1, l_2; i) r_{l_1}^{(i)}(\zeta^{l_1}x_1 - \zeta^{-l_1}x_2) r_{l_2}^{(n-i-2)}(\zeta^{l_2}x_1 - \zeta^{-l_2}x_2).
\end{aligned}
$$

ここで

$$
(4.7) \qquad c_i(x_1; x_2, \{r_l\}) = \sum_{l=1}^{n-1} 2b(0, l, i) r_l^{(i)}(\zeta^l x_1 - \zeta^{-l} x_2)
$$

と定義した．ここでもし $r_1, \dots r_{n-1}$ が定義されているならば x_2 を固定するごとに (4.6) は x_1 を変数とし r_0 を未知函数とする線型常微分方程式と見なすことができる．

常微分方程式の基本的な性質を思い出すと次の定理が得られる．

Theorem 4.8. 次の 2 条件を共に満たすような点 $(\mathring{x}_1, \mathring{x}_2) \in \Omega$ を考える．

- $r_l(z)$ は $z = \zeta^l \mathring{x}_1 - \zeta^{-l} \mathring{x}_2$ で正則である $(l = 1, 2, \dots, n-1)$.
- $r_0(z)$ は $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \left| z - (\mathring{x}_1 - \mathring{x}_2) \right| < \varepsilon\}$ で 正則である．

このような点は Ω の開部分集合を成す．このとき

(i) $c_0(\mathring{x}_1; \mathring{x}_2, \{r_l\}) \neq 0$ ならば $r_0(z)$ は $z = \mathring{x}_1 - \mathring{x}_2$ で正則である．

(ii) $c_1(\mathring{x}_1; \mathring{x}_2, \{r_l\}) \neq 0$ ならば $r_0(z)$ は $z = \mathring{x}_1 - \mathring{x}_2$ で有理型であり，その点での極の位数は高々 2 である．

(i) の場合は微分方程式 (4.7) の最高次の係数は消えないので考えている点の周りでの解は自然に延びる．(ii) の場合には微分方程式 (4.7) の最高次係数は考えている点で 1 位の零点を持つ．従ってその点で確定特異点型の微分方程式である．あとは特性指数 (exponent) の計算をすればよいのだが (4.5) に注意して計算すると $0, 1, \dots, n-4$ と -2 であることがわかる．

5. Location of poles of invariant differential operators.

この節では互いに交換可能な (3.1), (3.2) の形の微分作用素 H, P がそれぞれ2面体群 W で不変であると仮定してその特異点の位置や様子を論ずる.

H と P が W で不変なので, (3.7) で与えられる $r_l(z)$ は $r_l(z) = r_{l+2}(z)$ および $r_l(-z) = r_l(z)$ を満足する. 従って

(キ) n が奇数なら一つの $r(z)$ を用いて $r_l(z) = r(z)$ と書ける.

(グ) n が偶数なら二つの $r_0(z), r_1(z)$ を用いて $\left\{\begin{array}{l} r_{\mathrm{even}}(z) = r_0(z) \\ r_{\mathrm{odd}}(z) = r_1(z) \end{array}\right\}$ と書ける.

(A_2 の場合はルートの長さが等しく, Weyl 群はルートの集合に推移的に作用した. B_2, G_2 の場合はルートの長さの長短があるためにルートの集合は Weyl 群の二つの軌道に分かれることを思い出そう.)

初めに原点での特異の様子を調べる.

Theorem 5.1. 2面体群 $W(I_2(n))$ の n 角形が $n \geq 3$ かつ $n \neq 4$ とする. *(4.6)* を満足する $r_l(z)$ が十分小さい *punctured disk* $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < \varepsilon\}$ 上で正則であると仮定する. この時 $r_l(z)$ は原点 $z = 0$ で有理型であり極の位数は高々2位である.

Remark 5.2. 定理で除外された正方形 $n = 4$ の時, すなわち B_2 あるいは C_2 型の *Weyl* 群の時は上のような結果は正しくない. 実際 $r_0(z)$ が定数の時には $r_1(z)$ はどんな函数であっても式 *(4.6)* が満足されているのであった [OO].

定理の証明は Theorem 4.8 の応用であり n が奇数の時は易しい. n が偶数の時は Weyl 群の外部自己同型にあたる変換を H と P に施したものと元のものとを比較することで証明する.

次に原点以外の特異点の位置に関する情報を与えよう．以下 $r_l(z)$ の特異点（正則でない点）は複素平面 $\mathbb{C}$ 上で discrete であると仮定しよう．例えば $r_l(z)$ が $\mathbb{C}$ 上の有理型函数ならばよい．この時，その特異点の集合を

$$\mathrm{Sing}(r_l) := \{\alpha \in \mathbb{C} \mid r_l(z) \text{ は } z = \alpha \text{ で singular } \}$$

と定義する．これら特異点の configuration は次のような関係を満足しなくてはならない．その証明はやはり Theorem 4.8 による．

Theorem 5.3. *Let us consider a solution* $\{r_l(z)\}$ *of (4.6). Suppose* $\alpha_0 \in \mathrm{Sing}(r_0)$ *and* $\alpha_l \in \mathrm{Sing}(r_l)$ *with an* $l \neq \frac{n}{2}$*. Then there is an* $l' \neq \frac{n}{2}, l$ *such that*

$$\left(\frac{\sin\frac{(l-l')\pi}{n}}{\sin\frac{l\pi}{n}}\alpha_0 + \frac{\sin\frac{l'\pi}{n}}{\sin\frac{l\pi}{n}}\alpha_l\right) \in \mathrm{Sing}(r_{l'}).$$

Theorem 5.4. $n \geq 3$ が奇数であるとする．*(4.6)* の解 $r_l(z)$ が原点以外に特異点を持つと仮定する．そのうちで原点に最も近いものを $\alpha \in \mathrm{Sing}(r)$ とすると特異点の集合 $\mathrm{Sing}(r)$ は

$$\frac{\alpha}{2\cos\frac{\pi}{n} - 1} \in \mathrm{Sing}(r)$$

に集積点を持つ．

従って $n \geq 3$ が奇数の時に $r_l(z)$ が $\mathbb{C}$ 上で有理型函数ならば原点以外には正則でなければいけない．特に $\mathbb{C}$ 上で無限個の極を持つような函数，例えば $(\sin^2 z)^{-1}$ の様なものは $r_l(z)$ として許されない．

n が偶数の場合には奇数の場合に比べるとまだ限定的な結果しか得られていない．ごめんなさい．

Theorem 5.5. $n \geq 8$ が偶数であるとする．$\mathbb{C}$ 上で有理型であるような *(4.6)* の解 $r_l(z)$ を考える．この時 $r_l(z)$ は有限個しか特異点を持たない．

上と同じ議論によって三角函数の逆 2 乗べきの様なものは (4.6) を満足しえないことが分かる．

Appendix. Proof of section 2.

この節では Lemma 2.3 と Lemma 2.5 の証明を紹介する．こういう計算が可能であることは谷口さん [T] から学んだ．実際 (3.4) の 3 つの式はそこに明記されている．ここでは直接計算を避けて母函数と Heisenberg 交換関係を用いた証明を与えよう．

References

[D1] C. F. Dunkl, *Difference-differential operators associated to reflection groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **311** (1989), 167–183.

[D2] ———, *Poisson and Cauchy kernels for orthogonal polynomials with dihedral symmetry*, J. Math. Anal. Appl. **143** (1989), 459–470.

[H1] G. J. Heckman, *An elementary approach to the hypergeometric shift operators of Opdam*, Invent. Math. **103** (1991), 341–350.

[H2] G. J. Heckman, *A remark on the Dunkl differential-difference operators*, in Harmonic analysis on reductive groups, Birkhäuser, Progress in Math **101** (1991), 181–191.

[HO] G. J. Heckman and E. M. Opdam, *Root system and hypergeometric functions I-IV*, Compositio Math. **64** (1987), 329–352, 353–373, **67** (1988), 21–49, 191–209.

[Hel] S. Helgason, *Groups and Geometric Analysis*, Academic Press, 1984.

[K] T. H. Koornwinder, *Orthogonal polynomial in two variable which are eigenfunctions of two algebraically independent differential operators I-IV*, Indag. Math. **36** (1974), 48–58, 59–66, 357–369, 370–381.

[O] H. Ochiai, *Commuting differential operators of rank two*, Indag. Math., N.S. **7(2)** (1996), 243–255.

[OO] H. Ochiai, T. Oshima, *Commuting differential operators of type B_2*, preprint (1994), UTMS 94-65.

[OOS] H. Ochiai, T. Oshima and H. Sekiguchi, *Commuting families of symmetric differential operators*, Proc. Japan Acad. **70 A** (1994), 62–66.

[OP1] M. A. Olshanetsky and A. M. Perelomov, *Classical integrable finite dimensional systems related to Lie algebras*, Phys. Rep. **71** (1981), 313–400.

[OP2] ———, *Quantum integrable systems related to Lie algebras*, Phys. Rep. **94** (1983), 313–404.

[OS] T. Oshima, H. Sekiguchi, *Commuting families of differential operators invariant under the action of a Weyl group*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **2** (1995), 1–75.

[P] A. M. Perelomov, *Integrable Systems of Classical Mechanics and Lie Algebras*, Birkhaüser, 1990.

[R] S. N. M. Ruijsenaars, *Complete integrability of relativistic Calogero-Moser systems and elliptic function identities*, Comm. Math. Phys. **110** (1987), 191–213.

[T] K. Taniguchi, *On uniqueness of commutative rings of Weyl group invariant differential operators*, preprint (1996), UTMS 96-36.

[vD] J. F. van Diejen, *Integrability of difference Calogero-Moser systems*, J. Math. Phys. **35** (1994), 2983–3004.

E-mail address: ochiai@rkmath.rikkyo.ac.jp