表現論シンポジウム講演集, 1996
pp.1-6

Cartan 型 Lie 環 W_n と写像半群の相互律
(Schur-Weyl reciprocity for Cartan type Lie algebra W_n)

西山 享 (Kyo Nishiyama : kyo@math.h.kyoto-u.ac.jp)
京都大学 総合人間学部 (Facluty of IHS, Kyoto University)

W_n を $\mathbb{C}^n$ 上の多項式係数のベクトル場のなす Lie 環とする。 W_n は通常 Cartan 型の Lie 環と呼ばれている４系列の無限次元単純 Lie 環の一つであって、自然な $\mathbb{Z}$-次数付けを持つ。この次数付けに関して次数が 0 の元全体 $W_n(0)$ は有限次元の Lie 環になるが、これは一般線形群 $GL_n(\mathbb{C})$ の通常の $\mathbb{C}^n$ への作用を微分したものと一致する。

他の三系列の Cartan 型の Lie 環でも次数 0 の元全体は有限次元の単純 Lie 環となり、それぞれ $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$, $\mathfrak{sp}_n(\mathbb{C})$, $\mathfrak{so}_{2m+1}(\mathbb{C})$ といったものになっている。Cartan 型の Lie 環の構造、表現については例えば [Mathieu], [HP], [Kostrikin], [Rudakov1], [Rudakov2] などを参照されたい。

さてこの無限次元の Lie 環 W_n は多項式環 $P = S(\mathbb{C}^n)$ に自然に作用するが、これを**自然表現**と呼び (ψ, P) で表す。我々の目標はこの表現の tensor 積の分解であるが、完全な分解を記述することはかなり難しい問題であろうと思われる。というのも理由は二つあって、一つは W_n の表現が半単純ではなく、表現の記述を組成列 (composition series) によって行わなければならないこと。もう一つはその組成列が有限ではなく、一般に無限の長さを持つからである。

一番簡単な例によってこれを説明してみよう。$n = 2$ とする。このとき $f(x,y), g(x,y)$ を２変数の多項式とするならば W_2 の元は

$$D = f(x,y)\partial_x + g(x,y)\partial_y$$

と書ける。次数付けは f, g が $\deg f = \deg g = k+1$ の斉次多項式の時 $\deg D = k$ と定める。さてこのような微分作用素達はもちろん二変数の多項式の空間 $P = \mathbb{C}[x,y]$ に作用している。この空間は既約ではないが、定数多項式 $\mathbb{C}$ で割ったものは既約になっている。

P の２階の tensor 積を考えよう。

$$P \otimes P \simeq \mathbb{C}[x_i, y_i \mid i = 1,2]$$

であって、上に挙げた微分作用素 D はこの空間に

$$\psi^{\otimes 2}(D) = \sum_{i=1,2} \left(f(x_i,y_i)\partial_{x_i} + g(x_i,y_i)\partial_{y_i} \right)$$

で働くことになる。このとき $P \otimes P$ の組成列はいったいどうなっているだろうか？ 少なくとも確実に言えることはそれが無限列になっていることである。実際

$$\zeta_l = (y_1 - y_2)^l \qquad (l \geq 0)$$

とおくと、この多項式達はまず $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{C})$ の最低ウェイトベクトルになっており、しかも

$$\psi^{\otimes 2}(\partial_x) = \partial_{x_1} + \partial_{x_2}, \quad \psi^{\otimes 2}(\partial_y) = \partial_{y_1} + \partial_{y_2}$$

によって消える。つまり ζ_l は W_2 の最低ウェイトベクトルである。ウェイトは全部異なっているから、既約成分は無限個あることになる。

しかし表現の分解がすべてこのように統制が効かないようなことになっているかというとそうでもない。実は既約な商表現に限って言えばその記述は有限的に行え、しかもそれがある意味で完全であることを以下で説明しよう。残念ながら今のところそのような記述は tensor 積の階数 m が Lie 環 W_n の階数 n よりも小さい場合にのみ得られているが、有限性については一般の階数での tensor 積でも成り立つと思われる。以下では

$$\underline{m \leq n \text{ を常に仮定して}}$$

tensor 積表現 $\otimes^m P$ を考えることにする。最初の基本的な結果は次の定理である。

定理 1 ([N1, Th. 2.3]) tensor 積表現 $\otimes^m P$ $(m \leq n)$ における W_n の可換子環 (= intertwiners) は m 変数の写像半群の半群環に一致する。

写像半群 (transformation semigroup) $\mathfrak{T}_m$ は m 個の元を持つ有限集合 $[m] = \{1, 2, \cdots, m\}$ からそれ自身へのすべての写像に写像の合成で積を入れたものである (cf. [Howie])。この半群は多項式の空間に次のように作用する。 まず m 階の tensor 積を $\otimes^m P \simeq S(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m) = \mathbb{C}[z_{i,j} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m]$ のように mn 変数の多項式環と同一視しておくと

$$\varphi f(z_{i,j}) = f(z_{i,\varphi(j)}) \qquad (f(z_{i,j}) \in \mathbb{C}[z_{i,j} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m], \varphi \in \mathfrak{T}_m)$$

これを線型に半群環 $\mathbb{C}[\mathfrak{T}_m]$ の作用に拡張しておく。この表現は忠実なので上の定理における写像半群はこのようにして表現された作用素として可換子環がとらえられることを主張している。

さて $\otimes^m P$ そのものをいきなり分解することは少々難しいので、まずある filtration を取っておいてそこにおいて表現の分解を考えることにする。この filtration は写像半群の filtration から導かれるので、写像半群の filtration の方から考えることにしよう。両側イデアルの増大列を

$$R_k = \langle \varphi \in \mathfrak{T}_m \mid \#\mathrm{Im}\varphi \leq k \rangle \subset \mathbb{C}[\mathfrak{T}_m] \quad (k \geq 1)$$

とおく。このとき $\otimes^m P$ の filtration を

$$\mathcal{V}_k = R_k(\otimes^m P) \ (k \geq 1), \quad \mathcal{V}_0 = \mathbb{C}, \ \mathcal{V}_{-1} = (0)$$

と定義する。まず $\mathcal{V}(k) = \mathcal{V}_k / \mathcal{V}_{k-1}$ の既約分解を問題にすることにしよう。$k = m$ つまりトップレベルでの分解は次のようになる。

定理 2 ([N2, Th. 2.4]) (1) $\mathcal{V}(m) = \mathcal{V}_m / \mathcal{V}_{m-1} \simeq \otimes^m (P/\mathbb{C})$ における W_n の可換子環は対称群の群環 $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_m]$ と同型である。

(2) 分割 $\lambda \dashv m$ に対して $\mathfrak{S}_m$ の既約表現を通常のように σ_λ と書く (cf. [Iwahori])。

$$\mathcal{V}(m) \simeq \bigoplus_{\lambda \dashv m} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_m}(\sigma_\lambda, \mathcal{V}(m)) \otimes \sigma_\lambda$$

と分解した時 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_m}(\sigma_\lambda, \mathcal{V}(m)) \neq (0)$ は W_n の分解不可能な表現になっていて、唯一の既約商表現を持つ。その既約商表現の最低ウェイトは $w_0\lambda$ (w_0 は $\mathfrak{S}_n$ の最長元) である。

この定理の証明は難しくない。(1) は前定理の簡易版であり、(2) は結局古典的な $GL_n(\mathbb{C}) \times \mathfrak{S}_m$ に対する Schur の duality に帰着する (cf. [Weyl], [Howe1])。

さてこの定理より $W_n \times \mathfrak{T}_m$ の表現として $\mathcal{V}(m)$ は高々有限個の既約商表現しか持たず、しかもその商重複度は 1 であることがわかる。ただしここで表現 U における既約表現 π の**商重複度** $\mathrm{qmult}(U:\pi)$ は次のように定義される。

$$\mathrm{qmult}(U:\pi) = \dim \mathrm{Hom}_{W_n \times \mathfrak{T}_m}(U, \pi)$$

任意の既約表現に対して商重複度が常に 1 以下であるような表現を**商重複度自由**であるという。次の系は上の定理の言い換えである。

系 3 $\mathcal{V}(m) \simeq \otimes^m (P/\mathbb{C})$ は $W_n \times \mathfrak{T}_m$ の表現として商重複度自由である。

さて次に一般の k について表現 $\mathcal{V}(k) = \mathcal{V}_k/\mathcal{V}_{k-1}$ を考えよう。そのために $\mathfrak{T}_m$ の既約表現の族を次のようにして構成する。$\mathfrak{T}_m$ の放物型部分半群 $\mathcal{P}_k$ を

$$\mathcal{P}_k = \{\varphi \in \mathfrak{T}_m \mid \varphi([k]) \subset [k]\}$$

で定義する。すると作用域を $[k] = \{1, \cdots, k\}$ に制限することによって自然な射影 $\mathcal{P}_k \to \mathfrak{T}_k$ が得られるのでこの射影と合成することにより $\mathfrak{T}_k$ の既約表現 (σ, U) を $\mathcal{P}_k$ の表現と思うことにする。通常のように誘導表現を

$$\mathrm{ind}_{\mathcal{P}_k}^{\mathfrak{T}_m}(\sigma, U) = \mathbb{C}[\mathfrak{T}_m] \otimes_{\mathcal{P}_k} U$$

で定義する。作用は左からの掛け算による作用を考えることとする。

命題 4 ([N2, Prop. 3.1]) k の分割 $\lambda \dashv k$ に対して $\mathfrak{S}_k$ の既約表現 σ_λ を考える。この表現を $\mathbb{C}[\mathfrak{T}_k]/R_{k-1} \simeq \mathbb{C}[\mathfrak{S}_k]$ により R_{k-1} の作用を自明にして $\mathfrak{T}_k$ の既約表現へ拡張する。このとき上で定義した放物型の誘導表現 $\mathrm{ind}_{\mathcal{P}_k}^{\mathfrak{T}_m}\sigma_\lambda$ はただ一つの既約商表現を持つ。この既約商表現を Σ_λ と表すことにする。

以上の記号に従うと $\mathcal{V}(k)$ の分解は次のように表すことができる。

定理 5 ([N2, Th. 4.2]) $\mathcal{V}(k) = \mathcal{V}_k/\mathcal{V}_{k-1}$ は $W_n \times \mathfrak{T}_m$ の表現として商重複度自由であって、その既約商表現の全体は $\{\pi_\lambda \otimes \Sigma_\lambda \mid \lambda \dashv k\}$ で与えられる。ここに π_λ は最低ウェイトが $w_0\lambda$ の W_n の既約表現を表す。

この定理の証明は少し複雑ではあるが、基本的に

$$\mathrm{ind}_{\mathcal{P}_k}^{\mathfrak{T}_m}\left(\otimes^k(P/\mathbb{C})\right) \simeq \mathcal{V}(k)$$

であることと $k = m$ の時の定理 2 を用いれば証明できる。

さて最後に元の表現 $\otimes^m P$ についての結果を記しておこう。環 A の表現 (ρ, U) に対して $\mathcal{R}_A(U)$ で U の既約商表現として得られる A の既約表現の同値類を表す。

定理 6 ([N2, Th. 5.1, 5.2]) (1) $\otimes^m P$ は $W_n \times \mathfrak{T}_m$ の表現として商重複度自由である。

(2) $\mathcal{R}_{W_n}(\otimes^m P) \ni \pi$ と $\mathcal{R}_{\mathfrak{T}_m}(\otimes^m P) \ni \Sigma$ の間には次の関係によって定まる一対一の対応が存在する。

$$\pi \leftrightarrow \Sigma \quad \Leftrightarrow \quad \dim \mathrm{Hom}_{W_n \times \mathfrak{T}_m}(\otimes^m P, \pi \otimes \Sigma) = 1$$

この定理の証明は今までの定理を用いれば簡単なので証明してみよう。完全系列

$$0 \to \mathcal{V}_{k-1} \to \mathcal{V}_k \to \mathcal{V}(k) \to 0$$

を考えることにより長完全列

$$\begin{aligned} 0 \to \mathrm{Hom}_{W_n \times \mathfrak{T}_m}(\mathcal{V}(k), \pi \otimes \Sigma) \to \mathrm{Hom}_{W_n \times \mathfrak{T}_m}(\mathcal{V}_k, \pi \otimes \Sigma) \to \mathrm{Hom}_{W_n \times \mathfrak{T}_m}(\mathcal{V}_{k-1}, \pi \otimes \Sigma) \\ \to \mathrm{Ext}^1_{W_n \times \mathfrak{T}_m}(\mathcal{V}(k), \pi \otimes \Sigma) \to \cdots \end{aligned}$$

が得られる。定理 5 より

$$\mathrm{qmult}(\mathcal{V}(k) : \pi \otimes \Sigma) = \dim \mathrm{Hom}_{W_n \times \mathfrak{T}_m}(\mathcal{V}(k), \pi \otimes \Sigma) \leq 1$$

である。また $k = 1$ のときは $\mathrm{qmult}(\mathcal{V}_0 : \pi \otimes \Sigma) = \mathrm{qmult}(\mathbb{C} : \pi \otimes \Sigma) \leq 1$ なので帰納法を使えば $\mathrm{qmult}(\mathcal{V}_k : \pi \otimes \Sigma) < \infty$ がわかる。次元が有限であることがわかったので上の完全列より不等式

$$\mathrm{qmult}(\mathcal{V}_k : \pi \otimes \Sigma) \leq \mathrm{qmult}(\mathcal{V}(k) : \pi \otimes \Sigma) + \mathrm{qmult}(\mathcal{V}_{k-1} : \pi \otimes \Sigma)$$

が成立する。これを繰り返し使えば

$$\mathrm{qmult}(\mathcal{V}_m : \pi \otimes \Sigma) \leq \sum_{k=0}^{m} \mathrm{qmult}(\mathcal{V}(k) : \pi \otimes \Sigma)$$

ところが上の定理 5 および 2 より既約表現 $\pi \otimes \Sigma$ に対して $\mathrm{qmult}(\mathcal{V}(k) : \pi \otimes \Sigma) \leq 1$ はたかだか一つの $0 \leq k \leq m$ に対して $\neq 0$ である。これから定理は容易にわかる。特に $\mathrm{Ext}^1_{W_n \times \mathfrak{T}_m}(\mathcal{V}(k), \pi \otimes \Sigma) = 0$ $(\forall k \geq 1)$ が成立すれば

$$\mathrm{qmult}(\mathcal{V}_m : \pi \otimes \Sigma) = \sum_{k=0}^{m} \mathrm{qmult}(\mathcal{V}(k) : \pi \otimes \Sigma) = \begin{cases} 1 & \pi \otimes \Sigma = \pi_\lambda \otimes \Sigma_\lambda \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

であることに注意しておく。

定理において

$$\mathcal{R}_{W_n}(\otimes^m P) \subset \{\pi_\lambda \mid \lambda \dashv k, 1 \leq k \leq m\}, \qquad \mathcal{R}_{\mathfrak{T}_m}(\otimes^m P) \subset \{\Sigma_\lambda \mid \lambda \dashv k, 1 \leq k \leq m\}$$

の間の対応を（抽象的な）**Howe の対応**と呼ぶことにしよう。もちろんこれは Schur の duality の無限次元への拡張とも見れるが、商表現を用いて記述する手法は基本的に Howe の手法を踏襲している ([Howe2, Howe3])。つまりこの定理は、Schur の duality の無限次元への拡張と、半単純でない代数たちの間の表現の対応を確立するという意味での拡張の二通りの意味を持っていることになる。

上の既約表現の同値類 $\mathcal{R}_*(\otimes^m P)$ は具体的に記述はできるものの特定できたわけではない。このあたりは今後の課題である。

前の例に戻って $n = m = 2$ の場合に既約商表現を特定しておこう。この場合 filtration の階層は2で、最高階の既約商表現は明らかに $\otimes^2 P$ の既約商になる。したがって $\pi_{(1^2)} \otimes \Sigma_{(1^2)}, \pi_{(2)} \otimes \Sigma_{(2)}$ は既約商になっている。既約商になる可能性があるのは上の注意によって他に $\pi_{(1)} \otimes \Sigma_{(1)}$ だけである。これが商表現として実現できるかどうかを見ればよい。

$$\omega_{(1^2)} = y_1 y_2, \qquad \omega_{(2)} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}, \qquad \omega_{(1)} = y_1 + y_2, \qquad \omega_{(\emptyset)} = 1$$

とおくと、$\otimes^2 P$ は $W_2 \times \mathfrak{T}_2$ 加群としてこれらの元で生成される。このとき mod $(\mathbb{C}[x_1, y_1] \oplus \mathbb{C}[x_2, y_2])$ で $\omega_{(1^2)}, \omega_{(2)}$ は最低ウェイトベクトルになっていてこれらのベクトルが既約商 $\pi_{(1^2)} \otimes \Sigma_{(1^2)}, \pi_{(2)} \otimes \Sigma_{(2)}$ を生成する。一方 $\omega_{(1^2)}$ を $(y_1 - y_2)^2$ に取り替えることにより、$\omega_{(1)}$ は $\otimes^2 P$ mod $\left(U(W_2)(y_1 - y_2)^2 + U(W_2)\omega_{(2)} + \mathbb{C}\right)$ の最低ウェイトベクトルになり、既約商 $\pi_{(1)} \otimes \Sigma_{(1)}$ を生成する。したがって $n = m = 2$ の時には可能性のある既約商がすべて現れることがわかる。

以上の議論は無限次元の Lie 環 W_n が舞台になっていたが、これを有限次元の Lie 超代数 $\mathcal{W}_n$ でも同様に行なうことができる（混同を避けるため Lie 超代数の場合には筆記体を用いることにする）。 $\mathcal{W}_n$ は $(n = 1$ の場合を除いて$)$ 単純な Lie 超代数になっていて、自然表現としてグラスマン代数の上の表現を取ることができる。これについても上の結果のほとんどが（やはり $m \leq n$ を仮定して）成立する。この事実についてはまだ preprint も存在していない状況であるが、前駆的な仕事として H. Wang 氏との共同研究 [NW1, NW2, NW3, Wang] を参考にして欲しい。また最近 W_n と $\mathcal{W}_m$ を同時に扱った Lie 超代数 $W(n, m)$ についても同様の結果が G. Benkart と D. Melville によって得られているようである。しかし筆者はまだ preprint の草稿を手に入れたばかりなのでコメントは差し控えておく。

References.

[HP] N. van den Hijligenberg and G. Post, Defining relations for Lie algebras of vector fields. *Indag. Mathem., N.S.*, **2**(1991), 207 - 218.

[Howe1] R. Howe, Perspectives on invariant theory: Schur duality, multiplicity free actions and beyond. In *The Schur Lectures (1992)*, Israel Mathematical Conference Proceedings **8**, Bar-Ilan Univ., 1995, pp. 1 - 182.

[Howe2] R. Howe, Remarks on classical invariant theory. *Trans. AMS*, **313**(1989), 539 - 570.

[Howe3] R. Howe, Transcending classical invariant theory. *Journ. AMS*, **2**(1989), 535 - 552.

[Howie] J. M. Howie, *Fundamentals of Semigroup Theory.* London Mathematical Society Monographs, Vol. 12, Oxford, 1978.

[Iwahori] N.Iwahori, *Symmetry group and the representation theory of the general linear group,* (in Japanese). Iwanami Shoten, 1978.

[Kostrikin] I.A.Kostrikin, Irreducible graded representations of Lie algebras of Cartan type. *Soviet Math. Dokl.*, **19**(1978), 1369 - 1371.

[Mathieu] O. Mathieu, Classification of simple graded Lie algebras of finite growth. *Invent. Math.* **108**(1992), 455 - 519.

[N1] K.Nishiyama, Commutant algebra and harmonic polynomials of a Lie algebra of vector fields. *J. Alg.*, **183** (1996), 545-559.

[N2] K.Nishiyama, Schur-Weyl duality for Cartan type Lie algebra W_n. Preprint, 1996. [http://w3rep.math.h.kyoto-u.ac.jp/~kyo/mypaper.html]

[NW1] K.Nishiyama and H.Wang, Commutant algebra of Cartan-type Lie superalgebra $W(n)$. *J. Math. Kyoto Univ.*, **36** (1996), 129 - 142.

[NW2] K.Nishiyama and H.Wang, Commutant algebra of superderivations on a Grassmann algebra. *Proc. Japan Acad.*, **72**. Ser.A.(1996), 8 - 11.

[NW3] K.Nishiyama and H.Wang, About commutant algebra of Cartan-type Lie superalgebra $W(n)$. *Proceedings of Symposium on Representation Theory (1995)*, pp. 91 - 104, 1995.

[Rudakov1] A.N.Rudakov, Irreducible representations of infinite-dimensional Lie algebras of Cartan type. *Math. USSR Izv.*, **8** (1974), 836 - 866.

[Rudakov2] A.N.Rudakov, Irreducible representations of infinite-dimensional Lie algebras of types S and H. *Math. USSR Izv.*, **9** (1975), 465 - 480.

[Wang] H.Wang, Decomposition of the canonical representation of $W(1) \times \mathrm{End}\ [m]$ on $\Lambda(m)$. Preprint, 1996.

[Weyl] H. Weyl, *The Classical Groups.* Princeton University Press, Princeton, N.J., 1946.

表現論シンポジウム（蒲郡）予稿 [October 22, 1996]