

複素鏡映群 $G_{m,p,n}$ の Littlewood-Richardson ring について

山口 学 (manabu YAMAGUCHI)

東京大学大学院数理科学研究科

0. Introduction

$C_m = \langle \zeta \rangle$ を位数 m の巡回群とする ($\zeta = e^{2\pi i/m}$). $G_{m,p,n}$ は, 次で定義されるレス積 $G_{m,n} := C_m \wr \mathfrak{S}_n$ の指数 p の正規部分群である.

$$G_{m,p,n} = \{(\zeta^{g_1}, \dots, \zeta^{g_n}; \sigma) \mid 0 \leq g_j \leq m-1, \sigma \in \mathfrak{S}_n, \zeta^{m/p \sum_j g_j} = 1\}.$$

対称群の族 $\{\mathfrak{S}_n\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ の Littlewood-Richardson ring $R(\mathfrak{S}) = \bigoplus_{n \geq 0} R(\mathfrak{S}_n)$ ($R(\mathfrak{S}_0) = \mathbb{Z}$ であり, $R(\mathfrak{S}_n)$ は, $\mathfrak{S}_n$ の指標によって張られる $\mathbb{Z}$ 上の線形空間で, 積構造は, テンソル積の誘導表現によって定義される) は, $\mathbb{Z}$ 上の graded ring となる. $R(\mathfrak{S})$ は, Frobenius の characteristic map により, 対称関数環 Λ_X と同型になる. ここでは, これらの結果を, 既約複素鏡映群 $G_{m,p,n}$ の場合に拡張する.

すでに, 名古屋大の岡田聡一氏によって, さまざまな環の Littlewood-Richardson ring の構造 (対称関数環との対応) が研究されている (Theorem 1.8, 1.9). また, J.R. Stembridge 氏は, D_n 型の Weyl 群について DFT を計算し, ([Stem 1] 参照) 対称関数環との同型対応を求めた ([Stem 2, 3] 参照). つまり, $G_{2,2,n}$ の場合である. ここでは, 岡田氏の結果と, Stembridge 氏の結果を $G_{m,p,n}$ の場合に一般化して, これらの間の関係も明らかにした (Corollary 2.3).

1. Preliminaries and notations

A. m -tuples of partitions. $\mathcal{P}_{m,n}$ は, ウェイトの総和が n になる m 個の partition の列全体である. 即ち,

$$\mathcal{P}_{m,n} := \{\lambda = (\lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^{m-1}) \mid \lambda^j \vdash n_j, \sum_{j=0}^{m-1} n_j = n\}.$$

$\mu = (\mu^0, \dots, \mu^{m-1}) \in \mathcal{P}_{m,n}$ と正整数 k に対して $k * \mu \in \mathcal{P}_{m, kn}$ を

$$k * \mu = (k\mu^0, \phi, \dots, \phi, k\mu^1, \phi, \dots, \phi, k\mu^{m-1}, \phi, \dots, \phi)$$

と定義する. ただし, $k\mu^j$ は, μ^j の中の各成分を k 倍したもので, $k * \mu$ の第 kj 項に位置する.

m, p を $p \mid m$ となる自然数とし, $d := m/p$ とする. $\text{sh}: \mathcal{P}_{m,n} \rightarrow \mathcal{P}_{m,n}$ を, 任意の $(\lambda^0, \dots, \lambda^{m-1}) \in \mathcal{P}_{m,n}$ に対して,

$$\text{sh}(\lambda^0, \dots, \lambda^{m-1}) = (\lambda^{m-1}, \lambda^0, \dots, \lambda^{m-2})$$

で定義する. そして, $\mathcal{P}_{m,n}$ に同値関係を, $\lambda = (\lambda^0, \dots, \lambda^{m-1}), \mu = (\mu^0, \dots, \mu^{m-1}) \in \mathcal{P}_{m,n}$ に対して,

$$\lambda \sim \mu \Leftrightarrow \lambda = \text{sh}^d \mu \quad (0 \leq j \leq p-1)$$

と定義する. λ を含む同値類を $[\lambda]$ と書き, 同値類 $[\lambda]$ に含まれる元の個数を $d[\lambda]$ と書く.

B. Littlewood-Richardson rings. ([O] 参照) 基礎体 K を固定する. 半単純 K -algebra とは K 上の完全行列環のいくつかの直和になっているものを言う. 半単純 K -algebra A に対して, $\text{Irr}(A)$ はその既約な K -character 全体とし, $R(A)$ は $\text{Irr}(A)$ を K -basis にもつ free $\mathbb{Z}$ -module とする.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}\text{-}\mathcal{T}\mathcal{E}\mathcal{X}$

Definition 1.1 I を加法的半群とする. $A_i (i \in I)$ は半単純 K -algebra, そして $\alpha_{i,j} : A_i \otimes A_j \rightarrow A_{i+j}$ は, K -algebra homomorphism とする. 2つの集合の pair $\mathcal{A} = (\{A_i\}_{i \in I}, \{\alpha_{i,j}\}_{i,j \in I})$ が次の条件を満たすとき, I -graded tower という.

(a) $A_0 = K, \alpha_{i,0} = \alpha_{0,i} = id_{A_i} (i \in I)$,

(b) 次の図式が A_{i+j+k} での共役を除いて可換となる

$$\begin{array}{ccc} A_i \otimes A_j \otimes A_k & \xrightarrow{\alpha_{i,j} \otimes id_{A_k}} & A_{i+j} \otimes A_k \\ id_{A_i} \otimes \alpha_{j,k} \downarrow & & \downarrow \alpha_{i+j,k} \\ A_i \otimes A_{j+k} & \xrightarrow{\alpha_{i,j+k}} & A_{i+j+k} \end{array}$$

つまり, $a_{i,j,k} \in A_{i+j+k}^\times$ が存在して, 任意の $a \in A_i, b \in A_j, c \in A_k$ に対して,

$$\alpha_{i,j+k}(a \otimes \alpha_{j,k}(b \otimes c)) = a_{i,j,k}(\alpha_{i+j,k} \alpha_{i,j}(a \otimes b) \otimes c) a_{i,j,k}^{-1}.$$

となる.

$\mathcal{A} = (\{A_i\}, \{\alpha_{i,j}\})$ を I -graded tower とする.

$$R(\mathcal{A}) := \bigoplus_{i \in I} R(A_i)$$

(ここで, $R(A_0)$ は単位元 1 からなる空間) とする. $R(\mathcal{A})$ は次のようにして, I -graded $\mathbb{Z}$ -algebra となる. $\varphi \in Irr(A_i), \psi \in Irr(A_j)$ とし, V, W はそれぞれの character を与える既約な A_i, A_j -module とする. この積 $\varphi\psi$ を induced A_{i+j} -odule $A_{i+j} \otimes_{(A_i \otimes A_j, \alpha_{i,j})} (V \otimes W)$ の与える K -character で定義する. つまり,

$$\varphi\psi = \text{Ind}_{A_i \otimes A_j}^{A_{i+j}} (\varphi \times \psi).$$

これを双線形に拡張して, $R(\mathcal{A})$ は I -graded $\mathbb{Z}$ -algebra となる. $R(\mathcal{A})$ を $\mathcal{A}$ の Littlewood-Richardson ring (L-R ring) と呼ぶ.

Proposition 1.2 次が成り立つとき, $R(\mathcal{A})$ は可換となる. 任意の $i, j \in I$ に対して, $\sigma_{i,j} \in A_{i+j}^\times$ が存在して

$$\alpha_{j,i}(b \otimes a) = \sigma_{i,j} \alpha_{i,j}(a \otimes b) \sigma_{i,j}^{-1} \quad (a \in A_i, b \in A_j)$$

となる.

以後, $R(\mathcal{A})$ は可換なものを考える. そして,

$$R_K(A_i) := K \otimes_{\mathbb{Z}} R(A_i), \quad R_K(\mathcal{A}) := K \otimes_{\mathbb{Z}} R(\mathcal{A})$$

とする.

Definition 1.3 $a \in A_i$ に対して, $p(a) \in R(\mathcal{A})$ を

$$p(a) = \sum_{\varphi \in Irr(A_i)} \varphi(a) \varphi.$$

で定義する.

Proposition 1.4 $a \in A_i, b \in A_j$ に対して,

$$p(\alpha_{i,j}(a \otimes b)) = p(a)p(b)$$

Definition 1.5 $\tilde{K}$ を K -algebra とする. K -linear map $\tau_i : A_i \rightarrow \tilde{K}$ ($i \in I$) が次の性質を満たすとき, $\{\tau_i\}_{i \in I}$ を pre-Markov trace という.

- (a) $\tau_i(1) = 1$
- (b) $\tau_i(aa') = \tau_i(a'a)$ ($a, a' \in A_i$)
- (c) $\tau_{i+j}(\alpha_{i,j}(a \otimes b)) = \tau_i(a)\tau_j(b)$ ($a \in A_i, b \in A_j$)

上の定義から

$$\tau_i = \sum_{\varphi \in \text{Irr}(A_i)} c_\varphi \varphi \quad (c_\varphi \in \tilde{K})$$

と書ける. c_φ を τ_i の weight という.

Proposition 1.6 $p(1_{A_i}) \in R(\mathcal{A})$ ($i \in I$) は零因子でないとする. $\tilde{R}_K(\mathcal{A}) := R_K(\mathcal{A})[1/p(1_{A_i}); i \in I]$. K -linear map $\tilde{\tau}_i : A_i \rightarrow \tilde{R}_K(\mathcal{A})$ ($i \in I$) を

$$\tilde{\tau}_i(a) = p(a)/p(1_{A_i})$$

で定義すると, $\{\tilde{\tau}_i\}_{i \in I}$ は pre-Markov trace であり, その weight $\tilde{c}_\varphi$ は

$$\tilde{c}_\varphi = \varphi/p(1_{A_i}).$$

で与えられる. さらに, K -algebra homomorphism $\pi : \tilde{R}_K(\mathcal{A}) \rightarrow K$ が存在すれば, $\{\tau_i : A_i \rightarrow K\}_{i \in I}$ を

$$\tau_i(a) := \pi(p(a)/p(1_{A_i}))$$

で定義することにより, pre-Markov trace となる.

C. 対称関数環と cyclic shift operator. r 個の対称関数環のテンソル積 $\Lambda^{\otimes r} := \Lambda_{X_0} \otimes \cdots \otimes \Lambda_{X_{r-1}}$ の自己同型 sh_r を

$$sh_r(f^{(0)} \otimes \cdots \otimes f^{(r-1)}) = f^{(r-1)} \otimes f^{(0)} \otimes \cdots \otimes f^{(r-2)} \quad (f^{(j)} \in \Lambda_{X^{(j)}})$$

で定義し, これを $\mathbb{C}$ 係数に拡張した $\Lambda_{\mathbb{C}}^{\otimes r} := \mathbb{C} \otimes \Lambda^{\otimes r}$ の自己同型に対しても sh_r と書く. また, $\Lambda_{\mathbb{C}}^{\otimes r}$ 上のもう一つの自己同型 $\overline{sh}_r$ を

$$\overline{sh}_r(p_k(X^{(j)})) = e^{-j(2\pi i)/r} p_k(X^{(j)})$$

で定義する. ただし, p_k は, べき和対称関数である. $(\Lambda_{\mathbb{C}}^{\otimes r})^{sh_r^\dagger}$ (resp. $(\Lambda_{\mathbb{C}}^{\otimes r})^{\overline{sh}_r^\dagger}$) は, $sh_r^\dagger$ (resp. $\overline{sh}_r^\dagger$) の作用で不変な元からなる部分環を表す.

$\Lambda_{\mathbb{C}}^{\otimes r}$ はテンソル積の各成分の次数の和をとることで graded ring となる. $\Lambda_{\mathbb{C}}^{\otimes r+}$ によって, 次数が正の元からなる $\Lambda_{\mathbb{C}}^{\otimes r}$ のイデアルを表す. $(\Lambda_{\mathbb{C}}^{\otimes r+})^{sh_r^\dagger}$ や $(\Lambda_{\mathbb{C}}^{\otimes r+})^{\overline{sh}_r^\dagger}$ については上と同様に定義される.

D. 鏡映群とその表現. G を有限群とする. G と対称群 $\mathfrak{S}_n$ のレス積 $G \wr \mathfrak{S}_n$ は次で定義される有限群である.

$$G \wr \mathfrak{S}_n = \{(g_1, \dots, g_n; \sigma) \mid g_j \in G, \sigma \in \mathfrak{S}_n\}.$$

$$(g_1, \dots, g_n; \sigma)(g'_1, \dots, g'_n; \tau) = (g_1 g'_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, g_n g'_{\sigma^{-1}(n)}; \sigma\tau)$$

$x = (g_1, \dots, g_n; \sigma) \in G \wr \mathfrak{S}_n$ とする. $(i_1, \dots, i_k)$ を σ の中の cycle とする. このとき, $g_{i_k} \cdots g_{i_2} g_{i_1}$ の属する共役類は $i_1, \dots, i_k$ の cyclic shift によらずに一意に定まる. この共役類を, 対応する cycle の G -class という. G の共役類全体を, $C_G = \{c_0, \dots, c_{t-1}\}$ とする. μ^j を G -class が c_j となる σ の中の cycle たちの長さによって作られる partition とする. このようにして, $x \in G \wr \mathfrak{S}_n$ に対して, $\mathcal{R}_n$ の元 $\mu = (\mu^0, \dots, \mu^{t-1})$ を対応させる. $\mathcal{R}_n$ の μ を x の type と呼ぶ. $x, y \in G \wr \mathfrak{S}_n$ が共役であることと, それらが同じ type を持つことは同値である ([Mac 2, chap.9]) から, $G \wr \mathfrak{S}_n$ の共役類は $\mathcal{R}_n$ の元で特徴付けられる. $\mu = (\mu^0, \dots, \mu^{t-1}) \in \mathcal{R}_n$ に対して, μ に対応する共役類の自然な代表元 $\sigma(\mu)$ を

$$\sigma(\mu) := \prod_{0 \leq j \leq t-1} \prod_{s=1}^{l(\mu^j)} (g^{(j)}, \overbrace{1, \dots, 1}^{\mu_s^j - 1 \text{ times}}; (12 \cdots \mu_s^j))$$

で定義する. ただし, $g^{(j)} \in G$ は c_j の代表元.

次に $G \wr \mathfrak{S}_n$ の既約表現を構成する. U を G -module, V を $\mathfrak{S}_n$ -module とする. $U \wr V := U^{\otimes n} \otimes V$ は次のように定義される G_n -module $(g_1, \dots, g_n; 1) \in G^n$ (対角成分からなる部分群) に対して,

$$(g_1, \dots, g_n; 1) \circ (u_1 \otimes \cdots \otimes u_n \otimes v) = g_1 u_1 \otimes \cdots \otimes g_n u_n \otimes v$$

$(1, \dots, 1; w) \in \mathfrak{S}_n$ (対称群の元からなる部分群) に対して,

$$(1, \dots, 1; w) \circ (u_1 \otimes \cdots \otimes u_n \otimes v) = u_{w^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes u_{w^{-1}(n)} \otimes wv$$

と定義する. ただし, $u_i \in U, v \in V$.

$\{U_0, \dots, U_{t-1}\}$ を 既約 G -modules の完全代表系とする. $\mathcal{R}_n$ の元 $\lambda = (\lambda^0, \dots, \lambda^{t-1})$ に対して, 既約 $G \wr \mathfrak{S}_n$ -modules $V_{G \wr \mathfrak{S}_n}^\lambda$ は次のように定義される. $G_\lambda := G \wr \mathfrak{S}_{|\lambda^0|} \times \cdots \times G \wr \mathfrak{S}_{|\lambda^{t-1}|}$ として,

$$V_{G_n}^\lambda := CG_n \otimes_{CG_\lambda} (U_0 \wr V_{\mathfrak{S}_{|\lambda^0|}}^{\lambda^0} \otimes \cdots \otimes U_{t-1} \wr V_{\mathfrak{S}_{|\lambda^{t-1}|}}^{\lambda^{t-1}})$$

と定義する. $\psi_{G_n}^\lambda$ を $V_{G \wr \mathfrak{S}_n}^\lambda$ の与える character とするとき,

$$\text{Irr}(G_n) = \{\psi_{G_n}^\lambda \mid \lambda \in \mathcal{R}_n\}$$

となる.

Theorem 1.7 (Frobenius formula) $C_G = \{c_0, \dots, c_{t-1}\}$, $\text{Irr}(G) = \{\eta^0, \dots, \eta^{t-1}\}$ は G の共役類と, 既約な character の完全代表系とする. さらに, $\eta_j^i := \eta^i(c_j)$ ($0 \leq i, j \leq t-1$) は η^i の共役類 c_j での値とする. このとき, $\Lambda^{\otimes t}$ で次の等式が成り立つ.

$$\bar{p}_{\mu(x)} = \sum_{\lambda \in \mathcal{R}_n} \psi_{G_n}^\lambda(x) s_\lambda(X) \quad (x \in G_n)$$

ここで,

$$s_\lambda(X) := s_{\lambda^0}(X^{(1)}) \otimes \cdots \otimes s_{\lambda^{t-1}}(X^{(t-1)}), \quad \bar{p}_\mu := \prod_{i=0}^{t-1} \prod_{s=1}^{l(\mu^i)} \left(\sum_{j=0}^{t-1} \eta_j^i p_{\lambda_i^j}(X^{(j)}) \right).$$

$\mathcal{G} := (\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{\alpha_{m,n}\}_{m,n \in \mathbb{N}})$ は $G \wr \mathfrak{S}_n$ の $\mathbb{N}$ -graded tower とする. ただし, $\alpha_{m,n} : G_m \times G_n \longrightarrow G_{m+n}$ は

$$\alpha_{m,n}((g_1, \dots, g_m; \sigma) \times (h_1, \dots, h_n; \tau)) := (g_1, \dots, g_m, h_1, \dots, h_n; \sigma \times \tau).$$

Theorem 1.8 ([O]) $|Irr(G)| = t$ とする. $\mathbb{Z}$ -linear map $ch_{\mathcal{G}} : R(\mathcal{G}) \longrightarrow \Lambda_X$ を

$$ch_{\mathcal{G}}(\varphi) := \frac{1}{|G_n|} \sum_{x \in G_n} \varphi(x) \bar{p}_{\mu(x^{-1})} \quad (\varphi \in Irr(G \wr \mathfrak{S}_n))$$

で定義すると, $ch_{\mathcal{G}}$ は, $\mathbb{Z}$ -algebra isomorphism となる. また,

$$ch_{\mathcal{G}}(\varphi_{G_n}^\lambda) = s_\lambda(X) \quad (\lambda \in \mathcal{R}_n).$$

Theorem 1.9 ([O]) (1) 次の性質を満たす $\mathbb{C}$ -linear map $\tau_n : \mathbb{C}[G_n] \longrightarrow \mathbb{C}(x_1, \dots, x_t)$ ($n \in \mathbb{N}$) がただ一つ存在する.

(a) $\tau_n(1) = 1,$

(b) $\tau_n|_{\mathbb{C}G_{n-1}} = \tau_{n-1},$

(c) $\tau_n(ab) = \tau_n(ba) \quad (a, b \in \mathbb{C}G \wr \mathfrak{S}_n),$

(d) $\tau_n(a \cdot (1, \dots, 1, g; 1)) = \left(\sum_{j=1}^t \eta^j(g) x_j \right) / \left(\sum_{j=1}^t \eta^j(1) x_j \right) \tau_{n-1}(a) \quad (a \in \mathbb{C}G_{n-1}),$

$$\tau_n(a s_{n-1} b) = 1 / \left(\sum_{j=1}^t \eta^j(g) x_j \right) \tau_{n-1}(ab) \quad (a, b \in \mathbb{C}G_{n-1}),$$

ここで, $s_{n-1} := (n-1, n) \in \mathfrak{S}_n \subseteq G_n$.

(2) $\tau_n = \sum_{\lambda \in \mathcal{R}_n} c_\lambda \psi_{G_n}^\lambda \quad (c_\lambda \in \mathbb{C}(x_0, \dots, x_{m-1}))$ と書くとき,

$$c_\lambda = \frac{1}{\sum_{j=1}^t \eta^j(1) x_j} \prod_{k=1}^t \prod_{(p,q) \in \lambda^k} \frac{(x_i + c_{\lambda^k}(p, q))}{h_{\lambda^k}(p, q)}$$

, ここで $c_\lambda(p, q) = q - p$ は λ を Young tableau と同一視したときの (p, q) の content, $h_{\lambda^k}(p, q)$ は (p, q) を角とする hook length .

$\mathcal{G}_m = (\{G_{m,n}\}_{n \in \mathbb{N}}, \{\alpha_{n_1, n_2}\}_{n_1, n_2 \in \mathbb{N}})$ は $G_{m,n}$ の $\mathbb{N}$ -graded tower である. すでに, $R(\mathcal{G}_m)$ は $\Lambda^{\otimes m}$ と同型になることを話した. ここで, $R_{\mathbb{C}}(\mathcal{G}_m)$ から, $\Lambda_{\mathbb{C}}^{\otimes m}$ へのもう一つの $\mathbb{C}$ -algebra isomorphism を構成する. ($m = 2$ の場合は [Stem 1]) .

Theorem 1.10 $\mathbb{C}$ -linear map $\overline{ch}_{\mathcal{G}_m} : R_{\mathbb{C}}(\mathcal{G}_m) \longrightarrow (\Lambda_m)_{\mathbb{C}}$ を

$$\overline{ch}_{\mathcal{G}_m}(\varphi) := \frac{1}{|G_{m,n}|} \sum_{x \in G_{m,n}} m^{l(\mu(x))} \varphi(x) p_{\mu(x^{-1})}(X) \quad (\varphi \in Irr(G_{m,n}))$$

で定義する. このとき, $\overline{ch}_{\mathcal{G}_m}$ は $\mathbb{C}$ -algebra isomorphism であり,

$$\overline{ch}_{\mathcal{G}_m}(\psi_{G_{m,n}}^\lambda) = \bar{s}_\lambda(X) \quad (\lambda \in \mathcal{P}_{m,n})$$

, ここで

$$p_\mu(X) := p_{\mu^1}(X^{(0)}) \otimes \cdots \otimes p_{\mu^m}(X^{(m-1)}), \quad \bar{s}_\lambda(X) := \prod_{i=0}^{m-1} s_{\lambda^i}(X^{(0)}, \dots, X^{(m-1)})^{\bar{s}^i}.$$

n の分割 λ と m -tuple $\mu \in \mathcal{R}_{m,n}$ に対して, 次の数を定義する

$$LR(\lambda, \mu) := \sum_{(\nu^1, \dots, \nu^{m-2}) \in \mathcal{R}_{m-2}} LR_{\mu^0 \mu^1}^{\nu^{m-2}} LR_{\nu^{m-2} \mu^2}^{\nu^{m-3}} \cdots LR_{\nu^2 \mu^{m-2}}^{\nu^1} LR_{\nu^1 \mu^{m-1}}^\lambda$$

, ここで $LR_{\mu\nu}^\lambda$ は Littlewood-Richardson 係数.

Theorem 1.11 (1) 次の性質を満たす $\mathbb{C}$ -linear map $\bar{\tau}_n : \mathbb{C}[G_{m,n}] \rightarrow \mathbb{C}(x_0, x_1, \dots, x_{m-1})$ ($n \in \mathbb{N}$) がただ一つ存在する.

$$(a) \bar{\tau}_n(1) = 1$$

$$(b) \bar{\tau}_n|_{\mathbb{C}G_{m,n-1}} = \bar{\tau}_{n-1}$$

$$(c) \bar{\tau}_n(ab) = \bar{\tau}_n(ba) \quad (a, b \in \mathbb{C}G_{m,n})$$

$$(d) \bar{\tau}_n(a \cdot (1, \dots, 1, \zeta^i; 1)) = x_i/x_0 \bar{\tau}_{n-1}(a) \quad (a \in \mathbb{C}G_{m,n-1})$$

$$\bar{\tau}_n(a s_{n-1} b) = 1/m \cdot x_0 \bar{\tau}_{n-1}(ab) \quad (a, b \in \mathbb{C}G_{m,n-1})$$

$$(2) \bar{\tau}_n = \sum_{\lambda \in \mathcal{R}_{m,n}} \bar{c}_\lambda \psi_{G_{m,n}}^\lambda \cdot (\bar{c}_\lambda \in \mathbb{C}(x_0, \dots, x_{m-1})), \text{ と書くとき,}$$

$$\bar{c}_\lambda = \frac{1}{(mx_0)^n} \prod_{j=0}^{m-1} \sum_{\mu^{(j)} \in \mathcal{P}_{m-1, \lambda^{(j)}}} LR(\lambda^j, \mu^{(j)}) \prod_{k=0}^{m-1} \prod_{(p,q) \in \lambda^j} \frac{(\zeta^{-kj} x_k + c_{\mu^{(j)}, k}(p, q))}{h_{\mu^{(j)}, k}(p, q)}.$$

E. 鏡映群 $G_{m,p,n}$ とその表現. G を有限群, H をその正規部分群とする. さらに G/H が巡回群であるとする.

$$C := \{\chi \in \text{Irr}(G) | H \subseteq \ker \chi, \chi(1) = 1\}$$

とおく. ここで, $\ker \chi = \{g \in G | \chi(g) = \chi(1)\}$. このとき, 群として, $C \cong G/H$. C の $\text{Irr}(G)$ への作用を

$$\chi \cdot \varphi(g) = \chi(g) \varphi(g) \quad (\chi \in C, \varphi \in \text{Irr}(G), g \in G)$$

で定義する. 2つの既約 G -module が, 同じ C -orbit に属するとき, 互いに associate であるという. G の irreducible character φ を一つ固定し, それを与える G -module を V とする. $C_\varphi := \{\delta \in C | \varphi = \delta \times \varphi\}$ は φ の stabilizer. C_φ の generator $\delta \in C$ を固定し, これを与える one-dimensional G -module を W とする. G -module としての同型 $V \cong W \otimes V$ を実現する一次変換 $S \in GL(V)$ は,

$$Sgv = \delta(g)gSv \quad (g \in G, v \in V)$$

を満たすものであるが, $|C_\varphi| = k$ であるとする, δ の位数は k であり, S^k は G の作用と可換になる. Schur's Lemma によって S^k は nonzero scalar となる. S を $S^k = id_V$ となるように normalize したものを V の associator と呼ぶ.

V の associator S を固定して, V をその固有空間に分解する.

$$V = E_0 \oplus E_1 \oplus \cdots \oplus E_{k-1}$$

, ここで $E_j := \{v \in V | Sv = \omega^j v\}$. $\ker \delta \supseteq H$ となることから, 各固有空間は H -module となることがわかる.

Proposition 1.12 ([Stem 1]) G, H, V, E_j 's は上の通り.

- (1) G は $\{E_j\}_{0 \leq j \leq k-1}$ に可移に作用する.
- (2) E_j は 0 でない, 互いに非同値な既約 H -module.
- (3) $\text{Ind}_H^G(E_j)$ は V のすべての associate の直和.

上の Proposition により, 既約 H -module は G の既約な character の C -orbit $\mathcal{O}$ とそれを固定する linear character $\epsilon \in C$ の pair $(\mathcal{O}, \epsilon)$ で特徴付けられる.

χ_j は E_j の与える character とする. S に関する discrete Fourier transform (DFT) $\Delta_i : H \rightarrow \mathbb{C}^\times$ ($0 \leq i \leq k-1$) は, 次のように既約 H -character の一次結合で定義される.

$$\Delta_i(h) := \text{tr}(S^i h|_V) = \sum_{j=0}^{k-1} \omega^{ij} \chi_j(h) \quad (h \in H).$$

逆に, χ_j たちは, 次のように DFT を用いて書ける.

$$\chi_j(h) = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \omega^{-ij} \Delta_i(h) \quad (h \in H).$$

Proposition 1.13 ([Stem 1]) G, H, χ_j, Δ_i は上の通り.

$$\Delta_i(ghg^{-1}) = \delta(g)^i \Delta_i(h) \quad (g \in G, h \in H).$$

上の議論を $G_{m,p,n} \subseteq G_{m,n}$ に適用する. G の linear character $\delta : G_{m,n} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ を

$$\delta(\zeta^{g_1}, \dots, \zeta^{g_n}; \sigma) = \zeta^{\sum g_i}$$

で定義する. $G_{m,n}/G_{m,p,n} \cong C = \langle \delta^d \rangle$ となる. $\delta \cdot \psi_{G_{m,n}}^\lambda = \psi_{G_{m,n}}^{\text{sh}(\lambda)}$ となることから, $\text{Irr}(G_{m,n})$ の C -orbit は $\mathcal{P}_{m,n}/\sim$ の元で特徴付けられる. $V_{G_{m,n}}^\lambda$ は $p/d[\lambda]$ 個の既約 $G_{m,p,n}$ -module に分解する. (associator を S_λ とかく)

$$V_{G_{m,n}}^\lambda = \bigoplus_{\alpha=0}^{p/d[\lambda]-1} E_\alpha^{[\lambda]}$$

$$E_\alpha^{[\lambda]} = \{v \in V_{G_{m,n}}^\lambda \mid S_\lambda \cdot v = \zeta^{d \cdot d[\lambda] \cdot \alpha} v\}.$$

$E_\alpha^{[\lambda]}$ の与える character を $\chi_\alpha^{[\lambda]}$ とかくとき,

$$\text{Irr}(G_{m,p,n}) = \{\chi_\alpha^{[\lambda]} \mid [\lambda] \in \mathcal{P}_{m,n}/\sim, 0 \leq \alpha \leq p/d[\lambda] - 1\}$$

であり, DFT は

$$\Delta[\lambda]_\alpha(x) := \text{tr}(S^\alpha h|_{V_{G_{m,n}}^\lambda}) = \sum_{\beta=0}^{p/d[\lambda]-1} \zeta^{d \cdot d[\lambda] \cdot \alpha \cdot \beta} \chi_\beta^{[\lambda]}(x) \quad (x \in G_{m,p,n})$$

で与えられる.

2. Littlewood-Richardson rings of $G_{m,p,n}$

$\mathcal{G}_{m,p} = (\{G_{m,p,n}\}_{n \geq 0}, \{\alpha_{i,j} | G_{m,p,i} \times G_{m,p,j}\}_{i,j \geq 0})$ は $G_{m,p,n}$ の $\mathbb{N}$ -graded tower となる. $\mathcal{R} := R_{\mathbb{C}}(\mathcal{G}_{m,p})$ とおく.

Theorem 2.1 (1) $\mathcal{R}$ は $\mathcal{R} = \mathbb{C} \oplus_{i=0}^{p-1} \mathcal{R}_i^+$ のように次数 0 の係数体と p 個のイデアルに分解される. ただし, $\mathcal{R}_i^+$ は, $\{\Delta[\lambda]_{(p-l)/d[\lambda]} ; d[\lambda] | (p, l)\}$ を $\mathbb{C}$ -basis にもつ.

(2) $\mathbb{C}$ 線形写像 $ch_l : \mathcal{R}_l^+ \rightarrow \Lambda_{\mathbb{C}}^{\otimes d(p,l)}$ を

$$ch_l(\Delta[\lambda]_{(p-l)/d[\lambda]}) = \frac{p}{d[\lambda]} \sum_{\mu \in [(\lambda^0, \dots, \lambda^{d(p,l)-1})]} s_{\mu}(X)$$

で定義する. ここで, $s_{\lambda}(X) := s_{\lambda^0}(X^{(1)}) \otimes \dots \otimes s_{\lambda^{t-1}}(X^{(t-1)})$. そのとき, ch_l は, $(\Lambda_{d(p,l)}^+)_C^{s_{h_{d(p,l)}}}$ の上への $\mathbb{C}$ 線形同型であり, $\mathcal{R}_i^+$ の積と次数を保つ. ただし, $\deg X^{(j)} = p/(p, l)$.

(3) $\mathbb{C}$ 線形写像 $\overline{ch}_l : \mathcal{R}_l^+ \rightarrow (\Lambda_{d(p,l)})_{\mathbb{C}}$ を

$$\overline{ch}_l(\Delta[\lambda]_{(p-l)/d[\lambda]}) = \frac{p}{d[\lambda]} \sum_{\mu \in [(\lambda^0, \dots, \lambda^{d(p,l)-1})]} \overline{s}_{\mu}(X).$$

で定義する. ここで,

$$\overline{s}_{\lambda}(X) := \prod_{i=0}^{m-1} s_{\lambda^i}(X^{(0)}, \dots, X^{(m-1)})^{s_{h^i}}$$

そのとき $\overline{ch}_l$ は, $(\Lambda_{d(p,l)}^+)_C^{s_{h_{d(p,l)}}}$ の上への $\mathbb{C}$ 線形同型であり, $\mathcal{R}_i^+$ の積と次数を保つ. ただし, $\deg X^{(j)} = p/(p, l)$.

上の Theorem 2.1 より, $\mathcal{R} \cong \mathbb{C} \oplus \oplus_{i=0}^{p-1} \Lambda_{d(p,l)}^+ (\cong \oplus_{i=0}^{p-1} \Lambda_{d(p,l)})$ が得られる. $\Lambda_{\mathbb{C}}^{\otimes d(p,l)}$ に対する 2 つの $\mathbb{C}$ -basis $\{s_{\lambda}(X_l)\}_{\lambda \in \mathcal{P}_{d(p,l)}}, \{\overline{s}_{\lambda}(X_l)\}_{\lambda \in \mathcal{P}_{d(p,l)}}$ がある. $\oplus_{i=0}^{p-1} \Lambda_{\mathbb{C}}^{\otimes d(p,l)}$ 上に 2 つの inner product $\langle, \rangle_{m,p}$ and $[\ , \]_{m,p}$ を次のように導入する.

$$\langle s_{\lambda}(X_l), s_{\mu}(X_{l'}) \rangle_{m,p} = \delta_{l,p-l'} \delta_{\lambda\mu} / p$$

$$[\overline{s}_{\lambda}(X_l), \overline{s}_{\mu}(X_{l'})]_{m,p} = \delta_{l,p-l'} \delta_{\lambda\mu} / p.$$

Collorary 2.2 $\mathbb{C}$ -linear map ch (resp. $\overline{ch}$): $\mathcal{R} \rightarrow \Lambda_{m,p}$ を $ch|_{\mathcal{R}_i^+} = ch_l$ (resp. $\overline{ch}|_{\mathcal{R}_i^+} = \overline{ch}_l$) と定義する. そのとき ch (resp. $\overline{ch}$) は isomorphism であり, かつ $\langle, \rangle_{m,p}$ (resp. $[\ , \]_{m,p}$) に関して isometric.

ch や $\overline{ch}$ を $\mathcal{R}$ の characteristic maps と呼ぶ.

Corollary 2.3 次の図式は可換.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}_l^+ & \xrightarrow{ch_l} & \Lambda_{\mathbb{C}}^{\otimes d(p,l)} \\ \parallel & & \downarrow f_l \\ \mathcal{R}_l^+ & \xrightarrow{\overline{ch}_l} & \Lambda_{\mathbb{C}}^{\otimes d(p,l)} \end{array}$$

, ここで f_l は次で定義される $\Lambda_{\mathbb{C}}^{\otimes d(p,l)}$ 上の $\mathbb{C}$ -algebra automorphism:

$$f_l(p_r(X^{(i)})) := \sum_{j=0}^{d(p,l)-1} \zeta^{-ij} p_r(X^{(j)})$$

Corollary 2.4 $\deg X = p/(p, l)$, $\deg Y = 1$ として, 次の図式は可換となる.

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{R}_l^+ & \xrightarrow{I_l} & R_{\mathbb{C}}(\mathcal{G}_{d(p,l),(p,l)})_0^+ & \xrightarrow{\text{Ind}_{\mathcal{G}_{d(p,l),(p,l)}}^{\mathcal{G}_{d(p,l)}}} & R(\mathcal{G}_{d(p,l)}) \\ \downarrow \begin{pmatrix} (ch_{\mathcal{G}_{m,p}})_l \\ (\overline{ch}_{\mathcal{G}_{m,p}})_l \end{pmatrix} & & \downarrow \begin{pmatrix} (ch_{\mathcal{G}_{d(p,l),(p,l)}})_0 \\ (\overline{ch}_{\mathcal{G}_{d(p,l),(p,l)}})_0 \end{pmatrix} & & \cong \downarrow \begin{pmatrix} ch_{\mathcal{G}_{d(p,l)}} \\ (\overline{ch}_{\mathcal{G}_{d(p,l)}}) \end{pmatrix} \\ (\Lambda_{X_l}^{\otimes d(p,l)})_{\mathbb{C}} & \xrightarrow{\tilde{I}_l} & (\Lambda_{Y_l}^{\otimes d(p,l)})_{\mathbb{C}} & = & (\Lambda_{Y_l}^{\otimes d(p,l)})_{\mathbb{C}} \end{array}$$

, ここで $I_l, \tilde{I}_l, \text{Ind}_{\mathcal{G}_{m,p}}^{\mathcal{G}_{m,p}}$ は $I_l(\Delta[\lambda]_{(p-l)/d[\lambda]}) = \frac{p}{(p,l)} \Delta[\lambda(l)]_0$, $\tilde{I}_l(X^{(j)}) = Y^{(j)}$, $\text{Ind}_{\mathcal{G}_{m,p}}^{\mathcal{G}_{m,p}}(\varphi) = \text{Ind}_{G_{m,p,n}}^{G_{m,n}}(\varphi)$ で定義される.

m -tuple λ, μ, ν に対して, $LR_{\lambda\mu}^{\nu} := \prod_{j=0}^{m-1} LR_{\lambda_j, \mu_j}^{\nu_j}$ とおく.

Corollary 2.5 $[\lambda] \in \mathcal{P}_{m,n_1}/\sim$, $[\mu] \in \mathcal{P}_{m,n_2}/\sim$ ($n_1, n_2 \in \mathbb{N}$), $0 \leq \alpha \leq p/d[\lambda] - 1$, $0 \leq \beta \leq p/d[\mu] - 1$ に対して次が成り立つ.

$$\langle \chi_{\alpha}^{[\lambda]} \chi_{\beta}^{[\mu]}, \chi_{\gamma}^{[\nu]} \rangle = \frac{d[\nu]}{p} \sum e^{(2\pi i/p) \cdot l \cdot (\alpha + \beta - \gamma)} \sum_{\substack{\lambda' \in [(\lambda^0, \dots, \lambda^{d(p,l)-1})] \\ \mu' \in [(\mu^0, \dots, \mu^{d(p,l)-1})]}} LR_{\lambda'\mu'}^{(\nu^0, \dots, \nu^{d(p,l)-1})}$$

, ここで, 最初の和は $d[\lambda], d[\mu], d[\nu] \mid (p, l)$ となる l 全体をとる.

Theorem 2.1 の証明の鍵となるのは, DFT の値を, $C_m \wr \mathfrak{S}_n$ の指標表を用いて表す次の結果である.

Proposition 2.6 任意の $[\lambda] \in \mathcal{P}_{m,n}/\sim$ と $0 \leq \alpha \leq p/d[\lambda] - 1$ に対して, $p_0 := p/(p, d[\lambda]\alpha)$, $m_0 := m/p_0$, $n_0 := n/p_0$ とおく.

(1) 型が $\mu = (\mu^0, \dots, \mu^{m-1})$ の $x \in G_{m,p,n}$ に対し $\Delta[\lambda]_{\alpha} |_{\langle x \rangle} \neq 0$ となるならば, μ は, 次の条件 (*) を満たす.

(*) 全ての $0 \leq j \leq m-1$, $1 \leq s \leq l(\mu^j)$ に対して, μ_s^j は p_0 の倍数であり, かつ $\{\zeta^j\}_{\mu^j \neq \emptyset} \subseteq \{\zeta^{q^0}\}_{0 \leq q \leq m_0-1}$.

(2) 任意の $\mu \in \mathcal{P}_{m_0,n_0}$ に対して,

$$\Delta[\lambda]_{\alpha}(\sigma(p_0 * \mu)) = p_0^l \psi_{C_{m_0} \wr \mathfrak{S}_{n_0}}^{\lambda(\alpha)}(\sigma(\mu))$$

, ここで $\lambda(\alpha) := (\lambda^0, \dots, \lambda^{m_0-1})$

Proposition 2.6 (1) は Proposition 1.13 により示される. (2) は実際に associator を構成してトレースの値を計算する. $\mathbb{C}$ -linear map $S_{\lambda} : V_{G_{m,n}}^{\lambda} \rightarrow V_{G_{m,n}}^{\lambda}$ を次のように定義する.

$$\begin{aligned} S_{\lambda}(x \otimes u_0 \otimes v^{(0)} \otimes \dots \otimes u_{m-1} \otimes v^{(m-1)}) \\ := x\tau(\lambda) \otimes u_0 \otimes v^{d[\lambda]} \otimes \dots \otimes u_{m-d[\lambda]-1} \otimes v^{(m-1)} \otimes u_{m-d[\lambda]} \otimes v^{(0)} \otimes \dots \otimes u_{m-1} \otimes v^{(d[\lambda]-1)}. \end{aligned}$$

, ここで $x \in G_{m,n}$, $v^{(j)} \in V_{\mathfrak{S}_{|\lambda^j|}}^{\lambda^j}$, $u_j := \overbrace{u_j \otimes \cdots \otimes u_j}^{|\lambda^j| \text{-times}}$; ただし, Cu_j は C_m -module で, $\zeta^k \cdot u_j = \zeta^{kj} u_j$ となるもの. そして, $\tau(\lambda) \in \mathfrak{S}_n \subseteq G_{m,n}$ は次のもの

$$\tau(\lambda) := \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n' & n'+1 & \cdots & 2n' & \cdots & (p/d[\lambda]-2)n'+1 & \cdots & (p/d[\lambda]-1)n' & (p/d[\lambda]-1)n'+1 & \cdots & n \\ n'+1 & n'+2 & \cdots & 2n' & 2n'+1 & \cdots & 3n' & \cdots & (p/d[\lambda]-1)n'+1 & \cdots & n & 1 & \cdots & n' \end{pmatrix}$$

ただし, $n' := |\lambda^0| + \cdots + |\lambda^{d[\lambda]-1}| = nd[\lambda]/p$.

Proposition 2.7 S^λ は $V_{G_{m,n}}^\lambda$ の associator.

3. $G_{m,p,n}$ の Markov trace

上で求めた characteristic map を用いて、 $G_{m,p,n}$ の pre-Markov trace が以下のように作れる.

Theorem 3.1 (1) 次の性質を満たす $\mathbb{C}$ -linear function $\tau_n : \mathbb{C}[G_{m,p,n}] \rightarrow \mathbb{C}(x_0, \dots, x_{m-1})$ ($n \in \mathbb{N}$) がただ一つ存在する.

- (a) $\tau_n(1) = 1$
- (b) $\tau_n|_{\mathbb{C}G_{m,p,n-1}} = \tau_{n-1}$
- (c) $\tau_n(ab) = \tau_n(ba)$ ($a, b \in \mathbb{C}G_{m,p,n}$)
- (d) $ba \in G_{m,p,n-1}$ の中の $n-1$ を含む cycle の C_m -class が ζ^{j_0} であるとき,

$$\tau_n(a(1, \dots, 1, \zeta^i, \zeta^{-i}; 1)b) = \frac{(\sum_{j=0}^{m-1} \zeta^{(j_0+i)j} x_j) \cdot (\sum_{j=0}^{m-1} \zeta^{ij} x_j)}{(\sum_{j=0}^{m-1} x_j) \cdot (\sum_{j=0}^{m-1} \zeta^{j_0 j} x_j)} \tau_{n-1}(ab)$$

$$(a, b \in G_{m,p,n-1}, 0 \leq i \leq m-1 \ (p \nmid i))$$

$$\tau_n(a(1, \dots, 1, \zeta^{pi}; 1)) = \frac{(\sum_{j=0}^{m-1} \zeta^{pij} x_j)}{(\sum_{j=0}^{m-1} x_j)} \tau_{n-1}(a) \quad (a \in G_{m,p,n-1}, 0 \leq i \leq d-1)$$

$$\tau_2(a(\zeta^i, \zeta^{-i}; s_1)b) = \frac{1}{(\sum_{j=0}^{m-1} x_j)} \tau_1(ab) \quad (a, b \in G_{m,p,1}, 0 \leq i \leq p-1)$$

$$\tau_n(as_{n-1}b) = \frac{1}{(\sum_{j=0}^{m-1} x_j)} \tau_{n-1}(ab) \quad (x, y \in G_{m,p,n-1}).$$

- (2) $\tau_n = \sum_{[\lambda] \in \mathcal{R}_m / \sim, \alpha \in \mathbb{Z}_p / d[\lambda]} c_\alpha^{[\lambda]} \chi_\alpha^{[\lambda]} \quad (c_\alpha^{[\lambda]} \in \mathbb{C}(x_0, \dots, x_{m-1}))$ と書くとき,

$$c_\alpha^{[\lambda]} = \frac{1}{(\sum_{j=0}^{m-1} x_j)^n} \sum_{i=0}^{d[\lambda]-1} \prod_{k=0}^{m-1} \prod_{(s,t) \in \lambda^k} \frac{(x_{\bar{k}+di} + c_{\lambda^k}(s,t))}{h_{\lambda^k}(s,t)}$$

, ここで $\bar{k} \in \mathbb{Z}_m = \{0, \dots, m-1\}$.

Theorem 3.2 (1) 次の性質を満たす $\mathbb{C}$ -linear function $\bar{\tau}_n : \mathbb{C}[G_{m,p,n}] \rightarrow \mathbb{C}(x_0, \dots, x_{m-1})$ ($n \in \mathbb{N}$) がただ一つ存在する.

- (a) $\bar{\tau}_n(1) = 1$
- (b) $\bar{\tau}_n|_{\mathbb{C}G_{m,p,n-1}} = \bar{\tau}_{n-1}$
- (c) $\bar{\tau}_n(ab) = \bar{\tau}_n(ba)$ ($a, b \in \mathbb{C}G_{m,p,n}$)

(d) $ba \in G_{m,n-1}(p)$ の $n-1$ を含む cycle の C_m -class が ζ^{j_0} であるとき,

$$\bar{\tau}_n(a(1, \dots, 1, \zeta^i, \zeta^{-i}; 1)b) = \frac{(x_0 + x_0^{-1})}{(x_0 x_{j_0})} \bar{\tau}_{n-1}(ab) \quad (a, b \in G_{m,p,n-1}, 0 \leq i \leq m-1 (p \nmid i))$$

$$\bar{\tau}_n(a(1, \dots, 1, \zeta^{p^i}; 1)) = \frac{x_0}{x_0} \bar{\tau}_{n-1}(ab) \quad (a \in G_{m,p,n-1}, 0 \leq i \leq d-1)$$

$$\bar{\tau}_2(a(\zeta^i, \zeta^{-i}; s_1)b) = \frac{1}{mx_0} \bar{\tau}_1(ab) \quad (a, b \in G_{m,p,1}, 0 \leq i \leq p-1)$$

$$\bar{\tau}_n(as_{n-1}b) = \frac{1}{m} \cdot x_0 \bar{\tau}_{n-1}(ab) \quad (a, b \in G_{m,p,n-1}).$$

(2) $\bar{\tau}_n = \sum_{[\lambda] \in \mathcal{P}_{m,n}/\sim, \alpha \in \mathbb{Z}_{p/d}[\lambda]} \bar{c}_\alpha^{[\lambda]} \chi_\alpha^{[\lambda]} (\bar{c}_\alpha^{[\lambda]} \in \mathbb{C}(x_0, \dots, x_{m-1}))$ と書くとき,

$$\bar{c}_\alpha^{[\lambda]} = \frac{1}{(mx_0)^n} \sum_{i=0}^{d[\lambda]-1} \prod_{j=0}^{m-1} \sum_{\mu^{(j)} \in \mathcal{P}_{m,|\lambda^j|}} LR(\lambda^j, \mu^{(j)}) \prod_{k=0}^{m-1} \prod_{(s,t) \in \lambda^k} \frac{(\zeta^{-k(j+di)} x_k + c_{\mu^{(j)},k}(s,t))}{h_{\mu^{(j)},k}(s,t)}$$

REFERENCES

- [Co] A. M. Cohen, *Finite complex reflection groups*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup. 9 (1976), 379-436.
- [CR 1] C. W. Curtis and I. Reiner, *Methods of Representation Theory*, vol. I, Wiley, New York, 1981.
- [CR 2] C. W. Curtis and I. Reiner, *Methods of Representation Theory*, vol. II, Wiley, New York, 1987.
- [Go] D. G. Goldschmidt, *Group Characters, Symmetric Functions, and the Hecke Algebra*, Univ. Lecture ser., vol 4, A. M. S. 1993.
- [Mac 1] I. G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, 1st ed., Oxford Univ. Press, Oxford, 1979.
- [Mac 2] I. G. Macdonald, *Polynomial functors and wreath products*, J. Pure Appl. Algebra 18 (1980), 173-204.
- [O] S. Okada, 昨年の表現論シンポジウムの講演, November 16-19, 1994.
- [ST] G. C. Shephard and J. A. Todd, *Finite unitary reflection groups*, Canada J. Math. 16 (1954), 274-304.
- [Stem 1] J. R. Stembridge, *On the eigenvalues of representations of reflection groups and wreath products*, Pacific J. Math. 140 (1989), 353-396.
- [Stem 2] J. R. Stembridge, *The projective representations of the hyperoctahedral group*, J. Algebra 145 (1992), 396-453.
- [Stem 3] J. R. Stembridge, *Some permutation representations of Weyl groups associated with the cohomology of toric varieties*, Adv. in Math. 106 (1994), 244-301.