

ある概均質ベクトル空間の不変式論

立教大 理 落合啓之 (Hiroyuki Ochiai)

Abstract: $(G \times H, \rho, V)$ のように群が直積の形をしている概均質ベクトル空間の「部分商」 $(H, \bar{\rho}, V//G)$ を考える. 少しの一般論の後, 従来から比較的難しいと思われている概均質ベクトル空間 $(SL(5) \times GL(3), \Lambda_2 \otimes \Lambda_1)$ と $(Spin(10) \times GL(3), \text{half} \otimes \Lambda_1)$ の相対不変式の構成を行う. 最後に部分商のいくつかの応用を述べる.

§1. Introduction.

1.1. 3つ組 (G, ρ, V) を (複素数体 $\mathbb{C}$ 上の) 代数群 G , 線形空間 V , および G の V 上の表現 $\rho: G \rightarrow GL(V)$ とする. V に G -開軌道 Ω が存在するとき (G, ρ, V) を 概均質ベクトル空間 という (Zariski 位相でも通常の位相でもどちらでも良い).

一般に代数群 G が線形空間 V に作用しているとき多項式環 $\mathbb{C}[V]$ の G -不変式全体 $\mathbb{C}[V]^G$ を関数環に持つ variety を V の G による商といい $V//G$ と記す [Mu]:

$$V//G = \text{Spec } \mathbb{C}[V]^G.$$

G の V への作用が概均質である場合は (絶対) 不変式は定数関数しかないので商 $V//G = \text{Spec } \mathbb{C} = \{\text{一点}\}$ になる. また G の導来群 $[G, G]$ に関する不変式環 $\mathbb{C}[V]^{[G, G]}$ は相対不変式によって生成され, G の指標 (1次元表現) によって階数づけられた graded algebra になる. 特に作用が概均質のときは $\mathbb{C}[V]^{[G, G]}$ は既約な相対不変式 $p_1, \dots, p_l$ の生成する多項式環と $\mathbb{C}$ -algebra として同型になる. 従って $V//[G, G] \cong \mathbb{C}^l$ となる. さらに V が (G の表現として) 既約のときは “rank” $l = 1$ である [SS], [G2].

一般論としてはそうなのであるが, この既約な相対不変式を具体的に構成するのは難しい場合もあった. 多くの場合は行列式 $\det$ や簡単な不変式から概均質ベクトル空間の相対不変式が具体的に構成できたが, いくつかの場合が残されてそれは木村, 行者らによって構成された [K], [G1].

以下でみるように「部分商」という考え方を導入すれば, これらの ‘難しい’ 不変式を簡単な不変式から構成することができる. そしてこの考え方は不変式を構成できるというよりむしろ考えている空間の性質が分かりやすくなることが大切なのである.

1.2. 部分商. G の正規部分群 N があるとしよう. この時 N による商 $V//N$ には自然に商群 G/N が作用する. (G, V) が概均質ベクトル空間ならば G/N の $V//N$ への作用も概均質である. ただし一般には商 $V//N$ は affine space とは限らない.

この特殊な場合として G が二つの群の直積になっている場合を考える. 記号を変えて $(G \times H, \rho, V)$ を概均質ベクトル空間とする. 今の考察によって作用 $(H, \bar{\rho}, V//G)$ は概均質である. H が reductive のときは §6 に見るようにこの商空間 $V//G$ が affine space ならば (即ち不変式環 $\mathbb{C}[V]^G$ が多項式環と同型ならば) $(H, \bar{\rho}, V//G)$ は再び概均質ベクトル空間になる. この概均質ベクトル空間が元の概均質ベクトル空間よりも簡単であるとき元の空間に対するいくつかの問題を「割った空間」の問題に帰着して解くことができる (§5). 例えば元の空間の相対不変式は「割った空間への自然な商写像」と「割った空間の相対不変式」の合成関数で書ける. 昔はこれをいきなり元の変数で書き下そうとしていたので難しく思えたのである.

1.3. この予稿の構成を少し詳しく述べよう. §2 では, はじめに部分商の構成のための一般的な定理を述べた後, 古典的不変式論を用いてその定理の意味を説明する. §3, §4 では 2 つの “sporadic な” 概均質ベクトル空間に対してやはり同じ定理が適用できることを述べる. §5 では部分商の考え方が応用できる問題を紹介する.

ここまでの本論でありそれ以降は関連する事柄を便利のためにまとめてみた. §6 では簡単なことだが代数多様体として商が affine space となるならば表現込みで商が存在することを注意しておいた. §7 の例は概均質ベクトル空間ではないが関連する表現であり, この部分商は比較的変わっている. §8 では部分商がこのままではうまく機能しない (ある意味で唯一の) 概均質ベクトル空間を取り上げた. この空間をどんな方法でもよいから調べることは今後の課題である. §9 では, 昔に得られている既約被約概均質ベクトル空間の分類 [SK] を例外型代数群の立場から見直してみた (c.f. [G2]).

1.4. Added in proof. 夕食後のプログラムですのでリラックスしてお聞き下さい.

§2. 一般論.

2.1. はじめに主定理を述べるための用語を準備する.

概均質ベクトル空間 (G, ρ, V) に対して V の開 G -軌道を $\Omega = \Omega_V$ と記しその補集合を $S = S_V$ と記す. 開軌道 Ω 上の点は generic point と呼ばれ generic point $v \in \Omega$ での isotropy G_v を generic isotropy という.

$\pi_H : G \times H \rightarrow H$ を第2成分への射影 $\pi_H((g, h)) = h$ とする.

Lemma. 二つの概均質ベクトル空間 $(G \times H, \rho, V)$, $(H, \bar{\rho}, W)$ とその間の全射 $\psi : V \rightarrow W$ が与えられていて

$$\psi(\rho(g, h)v) = \bar{\rho}(h)(\psi(v)) \quad \text{for all } g \in G, h \in H, v \in V$$

を満たす (すなわち $G \times H$ -共変である) とする. generic point $v \in \Omega_V$ に対して次のような条件を考える.

- (a) $\pi_H((G \times H)_v) = H_{\psi(v)}$ for a $v \in \Omega_V$.
- (a1) $H_{\psi(v)}$ の各連結成分は $\pi_H((G \times H)_v)$ の元を含む.
- (a2) $\dim \pi_H((\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h})_v) = \dim \mathfrak{h}_{\psi(v)}$.
- (a2') $\dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}_v = \dim V - \dim W$.

この時

$$(a) \Leftrightarrow [(a1) \text{ かつ } (a2)] \Leftrightarrow [(a1) \text{ かつ } (a2)'].$$

以上の準備の下で一般的な定理を述べる.

Theorem. 上の補題の仮定とその同値な条件が成立すると仮定する. この時誘導される写像 $\bar{\psi} : V//G \xrightarrow{\sim} W$ は同型で H の作用と可換である.

最後の主張は写像 $\psi : V \rightarrow W$ が $\mathbb{C}$ -algebra としてかつ H -加群としての同型

$$\psi^* : \mathbb{C}[W] \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[V]^G$$

を誘導することを意味する.

次の §2.2 と §3, §4 でこの定理の適用できる例を挙げる.

2.2. 古典的不変式論からの例.

前節の考え方が適用できる典型的な概均質ベクトル空間は

$$(SO(m, \mathbb{C}) \times GL(n, \mathbb{C}), M(m, n, \mathbb{C})) \quad (m > n)$$

である. そこでこの場合を例にとって上の定理の説明をする.

m 行 n 列の行列全体 $M(m, n)$ には直交群 $SO(m)$ が左から, 一般線形群 $GL(n)$ が右から自然に作用する:

$$\rho(g, h)v = gv^th.$$

定理の設定でいうと $G = SO(m)$, $H = GL(n)$, $V = M(m, n)$ である. そしてこの時 $W = \text{Sym}(n) = \{n \text{ 次対称行列全体}\}$ とし H の W への作用を $\bar{\rho}(h)x = hx^th$ で定めておく.

Proposition. $m > n$ のとき写像

$$M(m, n) // SO(m) \ni X \mapsto {}^tXX \in \text{Sym}(n)$$

は $GL(n)$ -共変な同型を与える.

この結果はすでに古典的不変式論でよく知られている [W], [H]. ここでは上の定理をどのように適用するかをみてみよう.

Proof. $\psi : M(m, n) \rightarrow \text{Sym}(n)$ を $\psi(X) = {}^tXX$ で定める. ψ の共変性と全射性は易しい. $v = \begin{pmatrix} I_n \\ 0 \end{pmatrix} \in V$ とすれば $\psi(v) = I_n \in \Omega_W$ であり, 条件 (a2) も簡単に見て取れる. そこで以下条件 (a1) を確かめることにしよう.

isotropy $H_{\psi(v)} = O(n)$ は 2 つの連結成分を持つ. そこで $\text{diag}(-1, 1, \dots, 1) \in O(n)$ が $(G \times H)_v$ のある元の第 2 成分として現れることを確かめればよい. 実際

$$(\text{diag}(-1, 1, \dots, 1, -1), \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)) \in (SO(m) \times GL(n))_v$$

であるからこれは正しい. $\square$

§3. 概均質ベクトル空間 $(SL(5) \times GL(3), \Lambda_2 \otimes \Lambda_1, M(10, 3))$ の部分商.

§3 及び §4 の空間の相対不変式の構成は既に [G1] に与えられている. ここではそれを部分商の考え方をを用いて幾何的に再構成する. §2.1 の主定理を適用する際に必要なことの中で非自明なのは ψ を構成することと仮定 (a1) を確かめることである. そのためこの空間についてやや詳しい情報が必要になる.

3.1. $\text{Alt}(5) = \{5 \text{ 次交代行列全体}\}$ とする. 作用 $gA^t g$ によって $\text{Alt}(5)$ は $SL(5)$ の 10 次元既約表現となる. この表現は基本ウェイト Λ_2 に対応するので Λ_2 とも記すことにする. この表現と $GL(3)$ のベクトル表現 C^3 との外部テンソル積表現が考える表現である. これは既約正則概均質ベクトル空間であることが知られている. しばしば $\text{Alt}(5)$ の 3 つの元の組 (x, y, z) で $V = \text{Alt}(5) \otimes C^3$ の元を表す. また $\text{Alt}(5) \cong C^{10}$ と同一視して $V = M(10, 3)$ と行列で表すこともある.

主定理の記号では $G = SL(5)$, $H = GL(3)$, $V = \Lambda^2 C^5 \otimes C^3 = M(10, 3)$ である. 念のために表現を書いておくと

$$\rho(g, h)(x, y, z) = (gx, gy, gz)^t h \quad (g \in SL(5), h \in GL(3))$$

ここで g の作用は Λ_2 に従うもの.

天下りではあるが $W = \text{Sym}(3)$ とし, $H = GL(3)$ の W への作用を

$$(3.1) \quad \bar{\rho}(h)A = \det(h)hA^t h$$

で定める.

3.2. 次に $\psi: V \rightarrow W$ を構成するための準備をする.

$SL(5)$ の表現として $(C^5)^* \cong \Lambda^4(C^5)$ は $\Lambda^2(C^2) \otimes \Lambda^2(C^2)$ に重複度 1 で現れる. この既約成分への射影を

$$\beta: \text{Alt}(5) \times \text{Alt}(5) \rightarrow (C^5)^*$$

とする. β は双線型, 対称で $SL(5)$ -共変である.

ここで β の具体形にふれておこう. 式で書けば β の第 i 成分 β_i は

$$\begin{aligned} \beta_i(x, y) &:= x_{i+1}y_{i+2}y_{i+3}y_{i+4} - x_{i+1}y_{i+3}y_{i+2}y_{i+4} + x_{i+1}y_{i+4}y_{i+2}y_{i+3} \\ &\quad + y_{i+1}y_{i+2}x_{i+3}y_{i+4} - y_{i+1}y_{i+3}x_{i+2}y_{i+4} + y_{i+1}y_{i+4}x_{i+2}y_{i+3} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_4} (\text{sgn } \sigma) x_{i+\sigma(1), i+\sigma(2)} y_{i+\sigma(3), i+\sigma(4)} \quad (i = 1, \dots, 5) \end{aligned}$$

となる. ここで添え字は modulo 5 で考えている. この表示で想像がつくように β は Pfaffian と関係している. $x \in \text{Alt}(5)$ の第 i 行 i 列を消去して得られる 4 次交代行列を $x^{(i)} \in \text{Alt}(4)$ と記すことにする. このとき $\beta_i(x, x) = 2(-1)^{i-1} \text{Pf}(x^{(i)})$ でありその 2 次形式に対応する対称双 1 次形式が β_i である:

$$(-1)^{i-1} \beta_i(x, y) = \text{Pf}((x + y)^{(i)}) - \text{Pf}(x^{(i)}) - \text{Pf}(y^{(i)}).$$

本論に戻って $SL(5)$ -共変な trilinear な関数

$$\langle \cdot | \cdot | \cdot \rangle : (\mathbb{C}^5)^* \times \text{Alt}(5) \times (\mathbb{C}^5)^* \rightarrow \mathbb{C}$$

を $(\xi, u, \eta) \mapsto \langle \xi | u | \eta \rangle := \sum_{i,j=1}^5 \xi_i u_{ij} \eta_j$ で定義する.

Lemma. $x, y, z, u \in \text{Alt}(5)$, $\xi, \eta \in (\mathbb{C}^5)^*$ に対し次の関係式が成り立つ.

$$\begin{cases} (a) & \langle \eta | u | \xi \rangle = -\langle \xi | u | \eta \rangle, & (b) & \langle \xi | u | \xi \rangle = 0, \\ (c) & \langle \beta(y, y) | y | \eta \rangle = 0, & (d) & \langle \beta(y, y) | x | \eta \rangle + 2 \langle \beta(x, y) | y | \eta \rangle = 0, \\ (e) & \langle \beta(y, y) | x | \beta(x, y) \rangle = 0, & (f) & \langle \beta(y, y) | z | \beta(x, y) \rangle + \langle \beta(y, y) | x | \beta(z, y) \rangle = 0, \\ (g) & \langle \beta(x, y) | z | \eta \rangle + \langle \beta(y, z) | x | \eta \rangle + \langle \beta(z, x) | y | \eta \rangle = 0. \end{cases}$$

3.3. ψ を定義し, 定理の仮定が満たされることを確かめよう.

ψ の定義: 写像 $\psi : M(10, 3) \rightarrow \text{Sym}(3)$ を次で定義する.

$$\psi((x, y, z)) := \begin{pmatrix} 2 \langle \beta(x, x) | z | \beta(x, y) \rangle & \langle \beta(x, x) | z | \beta(y, y) \rangle & \langle \beta(z, z) | y | \beta(x, x) \rangle \\ \langle \beta(x, x) | z | \beta(y, y) \rangle & 2 \langle \beta(y, y) | x | \beta(y, z) \rangle & \langle \beta(y, y) | x | \beta(z, z) \rangle \\ \langle \beta(z, z) | y | \beta(x, x) \rangle & \langle \beta(y, y) | x | \beta(z, z) \rangle & 2 \langle \beta(z, z) | y | \beta(z, x) \rangle \end{pmatrix}.$$

ψ の共変性: $(x, y, z) \in M(10, 3)$ に対して

$$\psi(gx, gy, gz) = \psi(x, y, z) \quad (g \in SL(5)),$$

$$\psi((x, y, z)^t h) = \det(h) h \psi(x, y, z)^t h \quad (h \in GL(3))$$

が示せる. 上の式は定義から容易である. 下の式は $h \in GL(3)$ が対角行列, 置換行列および $h = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ の場合だけすれば十分である. はじめのふたつの場合は直接見て取れるから, 最後の場合を説明する. そこで $\psi((x, y, z)^t h) = \psi(x + \varepsilon y, y, z)$ の $(1, 1)$ -成分を計算してみよう. Lemma 3.2 の (a), (b), (f) を用いると

$$\begin{aligned} & 2 \langle \beta(x, x) + 2\varepsilon \beta(x, y) + \varepsilon^2 \beta(y, y) | z | \beta(x, y) \rangle \\ & + 2\varepsilon \langle \beta(x, x) + 2\varepsilon \beta(x, y) + \varepsilon^2 \beta(y, y) | z | \beta(y, y) \rangle \\ & = 2 \langle \beta(x, x) | z | \beta(x, y) \rangle + 2\varepsilon \langle \beta(x, x) | z | \beta(y, y) \rangle + 2\varepsilon^2 \langle \beta(y, y) | x | \beta(y, z) \rangle \end{aligned}$$

となることが確認できる. 同様に他の成分も Lemma 3.2 の関係式を用いると主張の共変性に従って変換されることがわかる. $\square$

ψ の全射性: ψ は $GL(3)$ -共変であり, 従って像は W の $GL(3)$ -stable な部分集合になる. ところが W は 4 つの軌道に分かれそれぞれの軌道の中に ψ の像で書ける元を構成することができる. 故に ψ は全射. $\square$

条件 (a2): これは Lie 環レベルでの isotropy の計算であり簡単である. あるいは直接 $\mathfrak{g}_v = \{0\}$ を確かめれば (a2)' が導かれる. 自ら計算しなくとも [SK, p96] に計算が載っている. $\square$

条件 (a1): $\psi(v) = I_3 \in W$ に対して (3.1) の作用の下での generic isotropy $H_{\psi(v)}$ は

$$\{th|h \in SO(3), t \in GL(1), t^5 = 1\} \cong SO(3) \times \mathbb{Z}_5$$

と同型である. $SO(3)$ は連結だから V の generic isotropy $(G \times H)_v$ の元で第 2 成分が $\mathbb{Z}_5$ の自明でない元を与えるものを見つければよい. それは簡単で 1 の原始 5 乗根を ζ と書けば (3.1) の作用の下で $(\zeta I_5, \zeta^{-2} I_3) \in G \times H$ が V 上 trivial に作用することがわかる. この元の第 2 成分が $\mathbb{Z}_5$ を生成する. $\square$

3.4. 以上の準備の下で結果は次のように述べられる.

Theorem. ψ は $GL(3)$ -共変な algebra 同型

$$\psi^* : \mathbb{C}[\text{Sym}(3)] \rightarrow \mathbb{C}[M(10, 3)]^{SL(5)}$$

を引き起こす. すなわち

$$M(10, 3) // SL(5) \xrightarrow{\sim} \text{Sym}(3).$$

Corollary. $F(x, y, z) = \det(\psi(x, y, z))$ とすると F は V 上の 15 次斉次な既約多項式で $G \times H$ -相対不変である.

§4. 概均質ベクトル空間 : $(Spin(10) \times GL(3), half \otimes \Lambda_1, M(16, 3))$.

この節では概均質ベクトル空間 $(Spin(10) \times GL(3), half \otimes \Lambda_1, M(16, 3))$ 及びその系として概均質ベクトル空間 $(Spin(10) \times GL(2), half \otimes \Lambda_1, M(16, 2))$ を扱いその部分商を構成する. 議論は §3 と並行している.

4.1. 最初にスピン表現を復習する. 直交群 $SO(n)$ の基本群は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ であり二重被覆をスピノル群 $Spin(n)$ という. 代数群 $Spin(n)$ は Clifford 代数を用いて実現できその実現から自然に $2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ 次元の表現 (スピン表現) を持つ. n が奇のときはスピン表現は既約である. 一方 $n = 2m$ が偶のときはスピン表現は2つの 2^{m-1} 次元表現 (偶半スピン表現と奇半スピン表現) の直和となる. 以下の議論ではどちらの半スピン表現を用いても同じなので単に半スピン表現 $half$ ということにする.

$Spin(10)$ の 16 次元の半スピン表現 $half$ と $GL(3)$ の自然表現 (3 次元のベクトル表現) との外部テンソル積表現が考える表現である. これは既約正則概均質ベクトル空間であることが知られている.

4.2. $Spin(10)$ の (同じ) 半スピン表現の2つのテンソル積 $half \otimes half$ は $SO(10)$ のベクトル表現 C^{10} を重複度 1 で含む. この成分への射影を

$$\beta : C^{16} \otimes C^{16} \rightarrow C^{10}$$

と表すことにする. 対応する対称双線型写像も

$$\beta : C^{16} \times C^{16} \rightarrow C^{10}$$

で表す. β の式による具体形は [Ch], [G1, p442] に与えられている.

また $SO(10)$ のベクトル表現 C^{10} 上の不変内積を

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : C^{10} \times C^{10} \rightarrow \mathbb{C}$$

と記す. これは $SO(10)$ -共変な対称双一次形式である.

4.3. 定理の記号では $G = Spin(10)$, $H = GL(3)$, $V = M(16, 3)$ である. 念のために表現を書いておくと

$$\rho(g, h)(x, y, z) = (gx, gy, gz)^th \quad (g \in Spin(10), h \in GL(3))$$

ここで g の作用は半スピン表現 $half$ に従うもの.

天下りではあるが $W = \text{Sym}(3)$ とし H の W への作用を

$$(4.3) \quad \bar{\rho}(h)A = (\det h)^2 h^{-1} A h^{-1}$$

で定める. これは $SL(3)$ の表現としては (3.1) の反傾表現である. さらに $\psi: V \rightarrow W$ を

$$\psi((x, y, z)) = \begin{pmatrix} \langle \beta(y, z) | \beta(y, z) \rangle & -\langle \beta(y, z) | \beta(z, x) \rangle & -\langle \beta(y, z) | \beta(x, y) \rangle \\ -\langle \beta(z, x) | \beta(y, z) \rangle & \langle \beta(z, x) | \beta(z, x) \rangle & -\langle \beta(z, x) | \beta(x, y) \rangle \\ -\langle \beta(x, y) | \beta(y, z) \rangle & -\langle \beta(x, y) | \beta(z, x) \rangle & \langle \beta(x, y) | \beta(x, y) \rangle \end{pmatrix}$$

で定める. このとき ψ の共変性, 全射性, および条件 (a2), (a1) の成立は §3.3 と並行した議論から従う [SK, p125].

以下条件 (a1) の成立をみよう. $\psi(v) = I_3 \in \Omega_W$ に対して (4.3) の作用の下で

$$H_{\psi(v)} = \{th | h \in SO(3), t \in GL(1), t^4 = 1\} \cong SO(3) \times \mathbf{Z}_4$$

である.

$$\mathbf{Z}_4 = \{tI_3 | t \in GL(1), t^4 = 1\}$$

の元が $(G \times H)_v$ の第2成分に現れることを示せばよい. H の中心は

$$Z_H = \{tI_3 | t \in GL(1)\} \cong GL(1)$$

であり G の中心は $Z_G \cong \mathbf{Z}_4$ であることに注目しよう.

半スピン表現 $G \rightarrow GL(16)$ は既約なので Schur の補題より中心 Z_G はスカラー $\lambda: Z_G \rightarrow GL(1)$ で作用する.

$$\{(g, \lambda(g)^{-1}I_3) \in G \times H | g \in Z_G\} \subset (Z_G \times Z_H) \cap \ker \rho \subset \ker \rho \subset (G \times H)_v$$

であるから $\lambda(Z_G) = \mathbf{Z}_4$ をいえば十分である. ところで半スピン表現は忠実なので λ は単射である. ゆえに $\lambda(Z_G) = \{t \in GL(1) | t^4 = 1\} = \mathbf{Z}_4$ となる. $\square$

4.4. 以上まとめると

Theorem. ψ は $GL(3)$ -共変な algebra 同型

$$\psi^*: \mathbf{C}[\text{Sym}(3)] \rightarrow \mathbf{C}[M(16, 3)]^{\text{Spin}(10)}$$

を誘導する.

Corollary. $\det(\psi(x, y, z))$ は既約な 12 次斉次多項式であり, 概均質ベクトル空間 $(Spin(10) \times GL(3), M(16, 3))$ の相対不変式である.

一つサイズを減らした $(Spin(10) \times GL(2), \text{half} \otimes \Lambda_1, M(16, 2))$ は 4 次の既約相対不変式を持つ概均質ベクトル空間であることが知られている. 実際

$$M(16, 2) = \{(x, y, z) \in M(16, 3) | x = 0\}$$

とみなせば

$$\psi_{11}(y, z) = \langle \beta(y, z) | \beta(y, z) \rangle$$

がその相対不変式に他ならない.

§5. 応用. 上の部分商の考え方ははじめの概均質ベクトル空間の相対不変式の記述以外の応用を持つ. はじめに §2.2 の例でこのことを説明しよう.

5.1. まず概均質ベクトル空間 $(GL(n), \text{Sym}(n))$ について復習する. この概均質ベクトル空間の開軌道は対称空間 $GL(n)/O(n)$ に同型だから同時にその作用は spherical である. 即ち $GL(n)$ の Borel 部分群も $\text{Sym}(n)$ に開軌道を持つ. 一つの Borel 部分群を

$$B(n) = \{g \in GL(n) | \text{下三角行列}\}$$

と取る. この時 i -次主小行列式 d_i は概均質ベクトル空間 $(B(n), \text{Sym}(n))$ の相対不変式であり $d_1, \dots, d_n$ が相対不変式の乗法的な基底となる. 特に $d_n = \det$ は $(GL(n), \text{Sym}(n))$ の相対不変式でもあるが他のものは $GL(n)$ の 1 次元表現には従わない ($\text{Sym}(n)$ に実現される表現の最高ウェイト). そして $\text{Sym}(n)$ の $B(n)$ -開軌道は

$$\{A \in \text{Sym}(n) | d_1(A) \neq 0, \dots, d_n(A) \neq 0\}$$

である.

Proposition. 作用 $(SO(m) \times B(n), M(m, n))$ は概均質である. $\bar{d}_i(v) = d_i(\psi(v))$ は相対不変式であり $\bar{d}_1, \dots, \bar{d}_n$ が相対不変式の基底となる. そして $M(m, n)$ の $SO(m) \times B(n)$ -開軌道は $\text{Sym}(n)$ の $B(n)$ -開軌道の ψ による引き戻し

$$\{v \in M(m, n) | \bar{d}_1(v) \neq 0, \dots, \bar{d}_n(v) \neq 0\}$$

で与えられる.

いってみれば $(SO(m) \times GL(n), M(m, n))$ は第 2 成分 $GL(n)$ に関して spherical である. このようないわゆる commutative parabolic type の概均質ベクトル空間に対する Borel 相対不変式は [MRS] に扱われている.

5.2. 上の考え方を §3, §4 の例にも適用することができる. $GL(3)$ の下三角行列全体を $B(3)$ と記す.

Theorem. (i) 概均質ベクトル空間 $(SL(5) \times GL(3), M(10, 3))$ の部分群の表現 $(SL(5) \times B(3), M(10, 3))$ も開軌道を持つ, すなわち概均質ベクトル空間になる.
(ii) $Sym(3)$ の左上 i 次の主小行列式を d_i とすると (i) の概均質ベクトル空間の相対不変式の基底は $d_1 \circ \psi, d_2 \circ \psi, d_3 \circ \psi$ で与えられる. 開軌道は

$$\{v \in M(10, 3) | d_1(\psi(v)) \neq 0, d_2(\psi(v)) \neq 0, d_3(\psi(v)) \neq 0\}.$$

Theorem'. (i)' 概均質ベクトル空間 $(Spin(10) \times GL(3), M(16, 3))$ の部分群の表現 $(Spin(10) \times B(3), M(16, 3))$ も開軌道を持つ, すなわち概均質ベクトル空間になる.
(ii)' $Sym(3)$ の右下 i 次の主小行列式を d'_i とすると (i)' の概均質ベクトル空間の相対不変式の基底は $d'_1 \circ \psi, d'_2 \circ \psi, d'_3 \circ \psi$ で与えられる. 開軌道は $\{v \in M(10, 3) | d'_1(\psi(v)) \neq 0, d'_2(\psi(v)) \neq 0, d'_3(\psi(v)) \neq 0\}$

佐藤文広はこのような概均質ベクトル空間の有用性を指摘し, 概均質ベクトル空間の多変数の zeta 関数を用いて 1 変数の zeta 関数の関数等式を導くひとつの一般的枠組みを提唱した [Sa1]. 上の定理にあるふたつの空間の場合に対する関数等式の具体形の決定もほぼできているようである.

5.3. 標準的な議論で上の定理を Grassmann の言葉を用いて言い換えることができる. $GL(m)$ の standard parabolic で Levi part が $GL(1)^3 \times GL(m-3)$ のものを $P_{1,1,1,m-3}$ と記す.

Corollary. (i) $SL(5) \times P_{1,1,1,7}$ は $GL(10)$ 上に開軌道を持つ. それは $v = \begin{pmatrix} I_3 \\ 0 \end{pmatrix} \in M(10, 3)$ として

$$\{g \in GL(10) | d_1(\psi(gv)) \neq 0, d_2(\psi(gv)) \neq 0, d_3(\psi(gv)) \neq 0\}.$$

(ii) $Spin(10) \times P_{1,1,1,13}$ は $GL(16)$ 上に開軌道を持つ. それは $v = \begin{pmatrix} I_3 \\ 0 \end{pmatrix} \in M(16, 3)$ として

$$\{g \in GL(16) | d_1(\psi(gv)) \neq 0, d_2(\psi(gv)) \neq 0, d_3(\psi(gv)) \neq 0\}.$$

5.4. ここではすべて複素数体 (標数 0 の代数閉体) で議論しているが他の体 (例えば実数体などの局所体) で類似の問題を考えることができる. このような体では開軌道は一般には複数個になる. この開軌道の個数を勘定する時にも部分商の考え方を応用することができる. 例えば井草 [I] の「下からの評価」を簡単に復元することができる [Sa2].

§6. 商の存在. 一般に代数群 G の表現 V の不変式環 $\mathbb{C}[V]^G$ が多項式環と同型るときその表現を coregular であるという.

Proposition. V を線形代数群 $G \times H$ の (有限次元) 表現とする. H は reductive で G の V への作用が coregular であると仮定する. この時 H の (線形) 表現 W で H -加群として $\mathbb{C}[V]^G$ が $\mathbb{C}[W] = S(W^*)$ と同型になるようなものが存在する. 即ち H -空間として $V//G \cong W$ となる.

Proof. 不変式環 $\mathbb{C}[V]^G$ の d 次斉次元全体を $\mathbb{C}[V]_{(d)}^G$ と記し $d' < d$ である様な $\mathbb{C}[V]_{(d')}^G$ で生成された algebra を J_d と記す. H -加群として $\mathbb{C}[V]_{(d)}^G$ は完全可約なのである H -部分加群 $W_{(d)}$ を用いて

$$\mathbb{C}[V]_{(d)}^G = (\mathbb{C}[V]_{(d)}^G \cap J_d) \oplus W_{(d)}$$

と書ける. $W := \bigoplus_{d=0}^{\infty} W_{(d)}$ と定義すれば W は $\mathbb{C}[V]^G$ を生成する. ここで作用が coregular であることから W の任意の基底は代数的に独立であることがわかる. $\square$

Remark. 単純代数群 G に対して coregular な表現は (既約な表現は Kac-Popov-Vinberg によって分類された後), G. Schwartz [Sc1] によって分類表が与えられている. 彼の表によれば $(SL(5), \bigoplus^3 \Lambda^2(\mathbb{C}^5))$ および $(Spin(10), \bigoplus^3 \text{half})$ が coregular であることはあらかじめわかっている. 上の命題によれば $GL(3)$ -共変な商の存在はあらかじめわかっていることになる.

§7. $(SL(6) \times GL(3), \Lambda_2 \otimes \Lambda_1, M(15, 3))$.

この空間の元も 3 つの 6 次交代行列の組 (A, B, C) と思う. 若干の記号の準備をする. $2m$ 次交代行列 $A \in \text{Alt}(2m)$ の Pfaffian $\text{pf}(A)$ を

$$\text{pf}(A) := \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}'_{2m}} (-1)^{l(\sigma)} a_{\sigma(1)\sigma(2)} \cdots a_{\sigma(2m-1)\sigma(2m)}$$

で定める. ここで

$$\mathfrak{S}'_{2m} := \{\sigma \in \mathfrak{S}_{2m} \mid \sigma(1) < \sigma(2), \dots, \sigma(2m-1) < \sigma(2m)\}$$

とした. 行列 $J \in \text{Alt}(2m)$ を $J_{2i-1, 2i} = -J_{2i, 2i-1} = 1$, 他の成分は 0 と定めると $\text{pf}(J) = 1$ となるように定数倍が正規化されている. いつものように $\text{pf}(A)^2 = \det(A)$.

次に m 次形式 $\text{pf}(\cdot)$ に対応した m 重線型形式を $\text{pf}(A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(m)})$ とする.
具体的には

$$\text{pf}(A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(m)}) = \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2m}} (-1)^{l(\sigma)} A_{\sigma(1)\sigma(2)}^{(1)} A_{\sigma(3)\sigma(4)}^{(2)} \cdots A_{\sigma(2m-1)\sigma(2m)}^{(m)}.$$

最後に (余因子行列に当たる) “copfaffian” 行列を $\hat{A}$ と記す. $A\hat{A} = -\text{pf}(A)I_m$ の関係にある. 以上の準備の下で不変式的具体表示を与える.

Proposition. $V = M(15, 3)$ 上の 6 次斉次多項式を

$$\begin{aligned} f(A, B, C) := & \text{pf}(A, A, C) \text{pf}(B, B, C) + \text{pf}(B, B, A) \text{pf}(C, C, A) \\ & + \text{pf}(C, C, B) \text{pf}(A, A, B) - \text{pf}(A, B, C)^2 - 2 \text{pf}(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}) \end{aligned}$$

で定める. このとき f は $SL(3)$ -不変である. 別の言い方をすれば $T = (t_{ij}) \in GL(3)$ に対して

$$f(t_{11}A + t_{12}B + t_{13}C, t_{21}A + t_{22}B + t_{23}C, t_{31}A + t_{32}B + t_{33}C) = \det(T)^2 f(A, B, C).$$

Theorem. 写像 $\psi : M(15, 3) \rightarrow S^3(\mathbb{C}^3) \oplus \mathbb{C}$ を

$$\psi(A, B, C) = (\text{pf}(u_1 A + u_2 B + u_3 C), f(A, B, C))$$

で定めると, これは $GL(3)$ -共変な同型

$$(\mathbb{C}^3 \otimes \Lambda^2(\mathbb{C}^6))/SL(6) \xrightarrow{\sim} S^3(\mathbb{C}^3) \oplus \mathbb{C}$$

を誘導する. ここで $S^3(\mathbb{C}^3)$ はウェイト $3\Lambda_1$ に対応した 3 階対称テンソル表現で 3 変数 (u_1, u_2, u_3) の 3 次多項式 (3 元 3 次形式) の空間と同一視される. また $GL(3)$ は乗法的指標 $\det^2$ でここでの 1 次元表現 $\mathbb{C}$ へ作用するものとする. (スカラー倍の作用は weighted homogeneous である)

Remark. G を E_7 型の単純 Lie 群, θ を G の位数 3 の自己同型, K を θ の固定部分群 G^θ の単位元連結成分とする. このとき G/K はある例外型 *twister space* の複素化で $E_7/(SL(6) \times SL(3))$ と同型. G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の θ に付随した ($\mathbb{Z}_3$ -graded な) 固有空間分解を

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}_+ \oplus \mathfrak{p}_-.$$

とする. このとき K の *isotropy* 表現は二つの既約表現 $(K, \mathfrak{p}_\pm)$ の直和になる. この二つの表現は互いに双対で, 今考えている $(SL(6) \times SL(3), \Lambda_2 \otimes \Lambda_1, M(15, 3))$ に同型である.

§8. 概均質ベクトル空間 $(SL(5) \times GL(4), M(10, 4))$. §3 の $GL(3)$ を $GL(4)$ にした表現である. この空間は「いちばん難しい概均質ベクトル空間」といわれている. 群も表現空間も共に 40 次元で generic isotropy は有限群 (実は 5 次対称群) となる. この空間に対しては部分商はベクトル空間にはならないことがわかる. §3 と同じ記号を用い, $V = M(10, 4)$ の元を $\text{Alt}(5)$ の 4 つの元の組 (x, y, z, w) で表す.

8.1. $G = SL(5)$, $H = GL(4)$, $V = M(10, 4)$ である. W を $a_1, \dots, a_5$ が x, y, z, w を動いたときに関数

$$\langle \beta(a_1, a_2) | a_3 | \beta(a_4, a_5) \rangle$$

が張るベクトル空間 ($M(10, 4)$ 上の 5 次斉次多項式のなす空間の部分線型空間) とする. 今度は W は部分商ではないことに注意してほしい.

Lemma. W は 36 次元である. $GL(4)$ の多項式表現として W は既約でありその最高ウェイトは $(3, 1, 1, 0)$ である.

Proof. まず §3.2 の関係式から上の形の元のうち 1 次独立なものは 36 個以下であることがわかる. 一方 $\langle \beta(x, x) | y | \beta(x, z) \rangle$ は最高ウェイトベクトルすなわち $x\partial_y, y\partial_z, z\partial_w$ で annihilate される関数である. この式のウェイトは $(3, 1, 1, 0)$ でありこの元の生成する $GL(4)$ の表現の次元は 36 である. $\square$

次元を数えれば $M(10, 4) // SL(5)$ は 16 次元であり affine ではありえない (W が既約であるから).

8.2. この空間を含むいくつかの概均質ベクトル空間に対する幾何学的不変式論は [WY] によってもなされている. この場合の彼らの記述は興味深いので紹介してみよう. $i = 1, \dots, 5$ に対して

$$(\beta_i(a, b))_{a, b=x, y, z, w}$$

は $\text{Sym}(4)$ の元を与える. これを並べることで $SL(5) \times GL(4)$ 共変な写像

$$M(10, 4) \cong \Lambda^2(\mathbb{C}^5) \otimes \mathbb{C}^4 \rightarrow \Lambda^4(\mathbb{C}^5) \otimes \text{Sym}(4)$$

を得る. $\text{Sym}(4)$ の 5 つの元の組は 3 次元射影空間 $\mathbb{P}^3$ 内の 5 枚の 2 次曲面を表していると考えられる. その共通零点は $SL(5)$ の作用で不変である.

Theorem [WY]. “一般の位置”にある V の元に対し共通零点は相異なる 5 点になる. つまり open dense な部分集合 $M(10, 4)^{\text{ss}} \subset M(10, 4)$ が存在して

$$M(10, 4)^{\text{ss}} / GL(5) \rightarrow \{\mathbb{P}^3 \text{ の相異なる 5 点} \}$$

は単射である. 像は $\{P^3$ の一般の位置にある 5 点 $\}$ である.

この記述は対称性が高く幾何的に分かりやすいが与えられた $M(10, 4)$ の元に対し具体的にその 5 点を決定するのはそう直接的ではない. 我々の記述とは一種の “根と係数の関係” にある.

§9. 概均質ベクトル空間の分類から. 概均質ベクトル空間の分類はいろいろな仮定の下で成されているが, 数論や表現論と大きな overlap のある分類表は比較的早い時期に得られた. 例えば「既約 (irreducible), 被約 (reduced), 相対不変式を持つ」という仮定の下では $29 + 1 = 30$ の family からなる [SK]. 多少恣意的に 6 つに小分けしてこれらを列挙してみる.

• 無限系列.

番号	群	表現	表現空間	相対不変式
(1)	$G \times GL(m)$	$\rho \otimes \Lambda_1$	$V(m) \otimes V(m)$	$\det(X)$
(2)	$GL(n)$	$2\Lambda_1$	$V(\frac{1}{2}n(n+1))$	$\det(X)$
(15)	$SO(n) \times GL(m)$	$\Lambda_1 \otimes \Lambda_1$	$V(n) \otimes V(m)$	$\det({}^tXX)$
(3)	$GL(2m)$	Λ_2	$V(m(2m-1))$	$\text{Pf}(X)$
(13)	$Sp(n) \times GL(2m)$	$\Lambda_1 \otimes \Lambda_1$	$V(2n) \otimes V(2m)$	$\text{Pf}({}^tXJX)$
(II)	$GL(1) \times Sp(n) \times SO(3)$	$\Lambda_1 \otimes \Lambda_1$	$V(1) \otimes V(2n) \otimes V(3)$	$\text{tr}({}^tXJXK)^2$

番号は [SK] における分類の番号, 表現空間における $V(m)$ は m 次元線型空間を表す. (1) における $(G, \rho, V(m))$ は任意の m 次元既約表現でよい. (1) の型の概均質ベクトル空間を trivial という. 余談であるが可約な概均質ベクトル空間の分類ではたいていこの trivial p.v. の入っているものの扱いが面倒の原因になる.

• “隙間のある” 作用.

番号	群 G	表現	表現空間	群 G'
(25)	$G_2 \times GL(1)$	Λ_2	$V(7)$	$SO(7) \times GL(1)$
(26)	$G_2 \times GL(2)$	$\Lambda_2 \otimes \Lambda_1$	$V(7) \otimes V(2)$	$SO(7) \times GL(2)$
(16)	$\text{Spin}(7) \times GL(1)$	spin	$V(8)$	$SO(8) \times GL(1)$
(17)	$\text{Spin}(7) \times GL(2)$	spin $\otimes \Lambda_1$	$V(8) \otimes V(2)$	$SO(8) \times GL(2)$
(18)	$\text{Spin}(7) \times GL(3)$	spin $\otimes \Lambda_1$	$V(8) \otimes V(3)$	$SO(8) \times GL(3)$
(19)	$\text{Spin}(9) \times GL(1)$	spin	$V(16)$	$SO(16) \times GL(1)$
(22)	$\text{Spin}(11) \times GL(1)$	spin	$V(32)$	$\text{Spin}(12) \times GL(1)$

表現 (G', ρ', V) の $G \subset G'$ への制限が概均質ベクトル空間であり 3 両者の相対不変式が一致しているとする. この時相対不変式に関する量 (例えば, b -関数, 複素べきの Fourier 変換) は互いに等しい. 大きい群を利用するのが有利である. 今の表の場合には真に大きい群 G' が存在する. このクラスの表現はほとんどが, 対称空間でないような球等質空間に関係している.

- §3, §4, §8 で扱ったもの. 最後の列には相対不変式の次数を書いた.

番号	群	表現	表現空間	相対不変式の次数
(20)	$\text{Spin}(10) \times GL(2)$	$\text{half} \otimes \Lambda_1$	$V(16) \otimes V(2)$	$\deg = 4$
(21)	$\text{Spin}(10) \times GL(3)$	$\text{half} \otimes \Lambda_1$	$V(16) \otimes V(3)$	$\deg = 12$
(10)	$SL(5) \times GL(3)$	$\Lambda_2 \otimes \Lambda_1$	$V(10) \otimes V(3)$	$\deg = 15$
(11)	$SL(5) \times GL(4)$	$\Lambda_2 \otimes \Lambda_1$	$V(10) \otimes V(4)$	$\deg = 40$

- “Type α ”. これらの相対不変式はすべて 4 次式である.

番号	群	表現	表現空間
(4)	$GL(2)$	$3\Lambda_1$	$V(4)$
(15')	$SL(2)^3 \times GL(1)$	$\Lambda_1 \otimes \Lambda_1 \otimes \Lambda_1$	$V(8)$
(14)	$Sp(3) \times GL(1)$	Λ_3	$V(14)$
(5)	$GL(6)$	Λ_3	$V(20)$
(23)	$\text{Spin}(12) \times GL(1)$	half	$V(32)$
(29)	$E_7 \times GL(1)$	Λ_6	$V(56)$

- “Type β ”. これらの相対不変式はすべて 12 次式である.

番号	群	表現	表現空間
(8)	$GL(2) \times SL(3)$	$\Lambda_1 \otimes 2\Lambda_1$	$V(2) \otimes V(6)$
(12)	$GL(2) \times (SL(3) \times SL(3))$	$\Lambda_1 \otimes \Lambda_1 \otimes \Lambda_1$	$V(2) \otimes (V(3) \otimes V(3))$
(9)	$GL(2) \times SL(6)$	$\Lambda_1 \otimes \Lambda_2$	$V(2) \otimes V(15)$
(28)	$GL(2) \times E_6$	$\Lambda_1 \otimes \Lambda_1$	$V(2) \otimes V(27)$

Type α, β という名前は [RS] に倣った.

- 以上のリストに入らないもの. これらは群が単純因子が一つである.

番号	群	表現	表現空間	相対不変式		
(27)	$E_6 \times GL(1)$	Λ_1	$V(27)$	$\deg = 3$	E_7	1
(24)	$\text{Spin}(14) \times GL(1)$	half	$V(64)$	$\deg = 8$	E_8	2
(6)	$GL(7)$	Λ_3	$V(35)$	$\deg = 7$	E_7	2
(7)	$GL(8)$	Λ_3	$V(56)$	$\deg = 12$	E_8	3

部分商は単純因子が二つ以上ある表現に対して自明でない結論を与えるので, この場合はこのままでは部分商を使うことはできない.

9.2. Type α および β については[RS], [GW] で興味深い記述が成されている. この記述の外枠を説明する. G を例外型単純代数群とする.

群	$l = \text{rank}$	$h = \text{Coxeter 数}$	$f = \dim_k K$	体 F
G_2	2	6	$-\frac{2}{3}$	?
D_4	4	6	0	?
F_4	4	12	1	R
E_6	6	12	2	C
E_7	7	18	4	H
E_8	8	30	8	O

拡大 Dynkin 図形で $-\text{highest root}$ と結ばれている単純ルートを α と記す. さらに G_2, D_4 型以外の場合は α と結ばれている単純ルートを β と記す. どちらも一意的である. α のラベルは 2 で β のラベルは 3 である.

$Q \subset G$ を α に対応した極大放物型部分群, $Q = LU$ をその Levi 分解とし, $L = M \times GL(1)$ を半単純部分と中心への分解とする. 更に $P \subset M$ を β に対応した極大放物型部分群とし $P = L_P U_P$ をその Levi 分解, $L_P = M_P \times GL(1)$ を半単純部分と中心への分解とする. このとき $\mathfrak{u} = \text{Lie } U$ は Heisenberg 型であって $\mathfrak{u}$ の中心は 1 次元 $[\mathfrak{u}, \mathfrak{u}]$ である. $\mathfrak{u}$ のアーベル化を $V = \mathfrak{u}/[\mathfrak{u}, \mathfrak{u}]$ と記す. 一方 U_P は可換である. これらのデータに関する対象を表にまとめると

極大放物型部分群から	ルート	automorphism から
type α の概均質ベクトル空間 (L, V)	α in G	(quaternionic) 半単純対称空間 G/K $K = M \times SL(2)$, 接空間 = $V \otimes \mathbb{C}^2$
type β の概均質ベクトル空間 ($L_P \times SL(2), U \otimes \mathbb{C}^2$)	β in G	twister space $G/(M_P \times SL(3))$ 接空間 = $(\mathfrak{u}_P \otimes \mathbb{C}^3) \oplus (\mathfrak{u}_P \otimes \mathbb{C}^3)^*$
概均質ベクトル空間 (L_P, U_P)	β in H	Hermite 対称空間 M/M_P 接空間 = $\mathfrak{u}_P \oplus \mathfrak{u}_P^*$

ここに現れる半単純対称空間 G/K の制限ルート系は F_4 で, 長いルートの重複度は 1, 短いルートの重複度は f である. この対称空間の極小放物型部分群の Levi 部分群 $L_{\min}$ は佐武図形から読み取れてその次元は $\dim G - 24(f+1)$ となっている.

G	M	V	$M_P = "SL_3(F)"$	$\mathfrak{u}_P = "Herm_3(F)"$	$L_{\min}$
G_2	$SL(2)$	$3\Lambda_1$ (4)	$\{1\}$	$\{0\}$	
D_4	$SL(2)^3$	$\Lambda_1^{\otimes 3}$ (15')	$S(GL(1)^3)$	$\square \oplus \square \oplus \square$	$GL(1)^4$
F_4	$Sp(3)$	Λ_3 (14)	$SL(3)$	$2\Lambda_1$ (8)	$GL(1)^4$
E_6	$SL(6)$	Λ_3 (5)	$SL(3) \times SL(3)$	$\Lambda_1 \otimes \Lambda_1$ (12)	$GL(1)^6$
E_7	$SO(12)$	half (23)	$SL(6)$	Λ_2 (9)	$GL(1)^4 \times SL(2)^3$
E_8	E_7	Λ_6 (29)	E_6	Λ_1 (28)	$GL(1)^4 \times SO(8)$

次元を書いておくと $\dim G = l(h+1)$, $\dim M = \dim G - (12f+19)$,
 $\dim V = 6f+8$, $\dim M_P = \dim M - (6f+7)$, $\dim U_P = 3f+3$.

REFERENCES

- [Bo] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, Chapter IV, V, VI, Hermann, Paris, 1968.
- [BLV] M. Brion, D. Luna, and T. Vust, *Espaces homogènes sphériques*, Invent. Math. **84** (1986), 617–632.
- [Ch] C. Chevalley, *The Algebraic Theory of Spinors*, Columbia University Press, 1954.
- [GW] B. H. Gross and N. R. Wallach, *A distinguished family of unitary representations for the exceptional groups of real rank = 4*, Lie Theory and geometry, in honor of Bertram Kostant, Progress in Math. **123** (1994), 289–304.
- [G1] A. Gyoja, *Construction of invariants*, Tsukuba J. Math. **14** (1990), 437–457.
- [G2] 行者明彦編, 概均質ベクトル空間の研究, 数理解析研究所講究録, 1996.
- [H] R. Howe, *Remarks on classical invariant theory*, Trans. Amer. Math. Soc. **313** (1989), 539–570.
- [HU] R. Howe and T. Umeda, *The Capelli identity, the double commutant theorem, and multiplicity-free actions*, Math. Ann. **290** (1991), 565–619.
- [I] J. Igusa, *On certain class of prehomogeneous vector spaces*, J. pure appl. Algebra **47** (1987), 265–282.
- [K] T. Kimura, *The b-functions and holonomy diagrams of irreducible regular prehomogeneous vector spaces*, Nagoya Math. J. **85** (1982), 1–80.
- [L] D. Luna, *Slices étales*, Bull. Soc. Math. France, Mémoires **33** (1973), 81–105.
- [MRS] I. Muller, H. Rubenthaler, and G. Schiffmann, *Structure des espace préhomogènes associés à certaines algèbres de Lie graduées*, Math. Ann. **274** (1986), 95–123.
- [Mu] D. Mumford, *Geometric Invariant Theory*, Springer, 1965.
- [RS] S. Rallis and G. Schiffmann, *The orbit and θ correspondence for some dual pairs*, preprint (1994).
- [Sa1] F. Sato, *Eisenstein series on weakly spherical homogeneous spaces and zeta functions of prehomogeneous vector spaces*, Comment. Math. Univ. St. Pauli, **44** (1995), 129–150.
- [Sa2] F. Sato, *Eisenstein series on $\mathrm{Spin}_{10} \backslash \mathrm{GL}(16)$* , preprint (1995).
- [SK] M. Sato and T. Kimura, *A classification of irreducible prehomogeneous vector spaces and their relative invariants*, Nagoya Math. J. **65** (1977), 1–155.
- [SS] 佐藤幹夫述, 新谷卓郎記, 概均質ベクトル空間の理論, 数学の歩み **15-1** (1970), 85–156.
- [Sc1] G. W. Schwartz, *Representations of simple Lie groups with regular rings of invariants*, Invent. Math. **49** (1978), 167–191.
- [Sc2] ———, *Representations of simple Lie groups with a free module of covariants*, Invent. Math. **50** (1978), 1–12.
- [W] H. Weyl, *Classical groups*, Princeton Univ., 1964.
- [WY] D. J. Wright and A. Yukié, *Prehomogeneous vector spaces and field extensions*, Invent. Math. **110** (1992), 283–314.