

原始的跡公式の応用 (PRIMITIVE TRACE FORMULAS AND THEIR APPLICATIONS)

九大・数理学研究科 若山 正人 (MASATO WAKAYAMA)

よく知られているように, 跡公式 (Trace Formula) とは, 約 40 年前に Selberg によって発見されたものである. 非可換な調和解析を用いる数学研究において, 強力な役割を果たす道具であるばかりか, 近年では数論などの保型関数論においては, 研究の一つの里程標あるいは目標となっている重要な研究対象である.

大雑把に言えば, 代数群 G とその離散部分群 Γ に対して, Γ の有限次元ユニタリ表現の G への誘導表現を考え, そのうえで G 不変な作用素のトレースを二通りの方法で計算して得られる等式である. それは, ごく身近な例でいうと, トーラス $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ における Poisson の和公式であり, 有限群での Frobenius の相互律に他ならない. また, それぞれの身近で重要な応用としては, 前者ならテータ変換公式であったり, 後者では, 有限群で成り立つ様々な関係式などがある. さらに付け加えると, 跡公式の片方の辺はスペクトルに対する考察から得られるものであり, もう一方は共役類にわたるオービット積分 (あるいは不変積分) といった幾何学的な表示からくるものである. 結果としての等号は, 両辺が, ある意味で普遍的な不変式であることの帰結だと思える.

以下, すべて $\mathbb{C}$ 上で考える.

§1. 原始的跡公式

まず始め有限群の場合に, ここでいう“原始的跡公式”, それは言葉どおり通常の跡公式をよりプリミティブな形で具現したものである, とは何か? という説明をする.

まず G を有限群, V を G -加群とし, V の G -不変元の全体を $V^G = \{v \in V; gv = v \forall g \in G\}$ とする. $L \in \text{End}_G(V)$ とすると $L \in \text{End}(V^G)$ と考えられるが, このとき次の原始的跡公式 (Primitive Trace Formula, 以後 PTF という) が成り立つ.

$$\text{Tr } L|_{V^G} = \sum_{[\gamma] \in [G]} |G_\gamma|^{-1} \text{Tr}(\gamma L) = \frac{1}{|G|} \sum_{[\gamma] \in [G]} |G/G_\gamma| \text{Tr}(\gamma L)$$

ただし, $G_\gamma = \{g \in G; g^{-1}\gamma g = \gamma\}$ は γ の G における centralizer であり, $[\gamma]$ は $\gamma \in G$ が代表する G における共役類を, さらに $[G]$ はその全体を表している. また, 一般に有限集合 S の個数を $|S|$ で表した.

証明は何でもなくて, 次のような V から V^G への projection operator $P \in \text{End}_G(V)$ を考えればよい:

$$P(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{\gamma \in G} \gamma.v : V \rightarrow V^G.$$

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}\text{-}\mathcal{T}\mathcal{E}\mathcal{X}$

実際

$$\mathrm{Tr} L|_{V^G} = \mathrm{Tr}(LP) = \frac{1}{|G|} \sum_{\gamma \in G} \mathrm{Tr}(L\gamma)$$

であり, ここで G にわたる和を, その共役類とオービットにわたる二重和に書き改めると

$$\mathrm{Tr} L|_{V^G} = \frac{1}{|G|} \sum_{[\gamma] \in [G]} \sum_{\mu \in G/G_\gamma} \mathrm{Tr}(L\mu^{-1}\gamma\mu)$$

となる. ここで $L \in \mathrm{End}_G(V)$ に注意すると Tr の不変性から直ちに結論を得る.

簡単な応用を二三述べて, その後この, PTF を重みを付けた形に拡張する.

応用 1. PTF で $L = 1$ とすると, V^G の次元について

$$\dim V^G = \frac{1}{|G|} \sum_{[\gamma] \in [G]} |G/G_\gamma| \chi_V(\gamma),$$

がわかる. ここで $\chi_V(\gamma) = \mathrm{Tr} \gamma$ は V の指標である. さらに特に $V = \mathbb{C}$ ならば, いわゆる類公式 (the class equation) を得る:

$$|G| = \sum_{[\gamma] \in [G]} |G/G_\gamma|.$$

応用 2. G の既約表現 V_1, V_2 の指標をそれぞれ χ_1, χ_2 とする. そこで $L = 1, V = V_1 \otimes V_2^* = \mathrm{Hom}(V_2, V_1)$ (V_2^* は V_2 の dual space) として PTF に適用すると, Schur の補題: $V^G = \mathrm{Hom}_G(V_2, V_1) = \delta_{\chi_1 \chi_2} \mathrm{End}_G(V_1) = \mathbb{C} \delta_{\chi_1 \chi_2}$, によって, 指標の (第一) 直交関係式

$$\sum_{[\gamma] \in [G]} |G_\gamma|^{-1} \chi_1(\gamma) \overline{\chi_2(\gamma)} = \delta_{\chi_1 \chi_2}$$

を得る. ただし, G 上の類関数 φ, ψ に対し, その内積は $(\varphi, \psi) = \sum_{[\gamma] \in [G]} |G_\gamma|^{-1} \varphi(\gamma) \overline{\psi(\gamma)}$ で定めたものである.

さて, G の各既約表現 (ρ, V_ρ) に対し, その指標を簡単に χ_ρ と記す. また $\hat{G}$ で G の既約表現の同値類の全体を表すものとする. 上で得られた指標の直交性を用いれば, 有限群の表現は完全可約だから, 任意の G -加群 V を $V = \sum_{\rho \in \hat{G}} V_\rho^{\oplus m_\rho}$ ($m_\rho = (\chi_V, \chi_\rho)$ は重複度) のように等質成分へ直和分解してみると, 作用素 $P_\rho = \frac{\dim V_\rho}{|G|} \sum_{\gamma \in G} \overline{\chi_\rho(\gamma)} \gamma$ が V から V の等質成分 $V_\rho^{\oplus m_\rho}$ への projection を与えていることが判る. 従って, 先と同様の手続きにより重み付きの PTF (これも以後 PTF という) が得られる. すなわち, $L \in \mathrm{End}_G(V)$ に対して次が成立する:

$$\mathrm{Tr} L|_{V_\rho^{\oplus m_\rho}} = \dim V_\rho \sum_{[\gamma] \in [G]} |G_\gamma|^{-1} \overline{\chi_\rho(\gamma)} \mathrm{Tr}(\gamma L).$$

さらにまた、指標の第二直交関係式

$$\sum_{\rho \in \widehat{G}} \overline{\chi_{\rho}(\sigma)} \chi_{\rho}(\gamma) = |G_{\gamma}| \delta_{[\sigma][\gamma]}$$

を用いると、容易にその反転公式も得られる:

$$\mathrm{Tr}(\gamma L) = \sum_{\rho \in \widehat{G}} \frac{\mathrm{Tr} L|_{V_{\rho}^{\oplus m_{\rho}}}}{\dim V_{\rho}} \chi_{\rho}(\gamma).$$

Remark. 以上のような公式は、コンパクト群に対しても同様に考えられる。また、通常の跡公式は自然なベクトル束を考えることによって、この PTF から導くことができる。

ところで、正則表現 $(R, A(G))$ に対しては、 $A(G) = \sum_{\rho \in \widehat{G}} V_{\rho}^{\oplus \dim V_{\rho}}$ 、すなわち、すべての既約表現が自分自身の次元の重複度を持って正則表現の中に現れるという事実がある。そこで特に、 $V = A(G)$ とすると、PTF から即座に判ることとして次がある:

$$\frac{1}{\dim V_{\rho}} \mathrm{Tr} L|_{V_{\rho}^{\oplus \dim V_{\rho}}} = \sum_{[\gamma] \in [G]} |G_{\gamma}|^{-1} \overline{\chi_{\rho}(\gamma)} \mathrm{Tr}(\gamma L).$$

§2. Tr oika の御者 PTF

ここでは PTF が、以下の三つの事実を三頭立ての馬車になぞらえたときに、その御者の役割を果たしていることを説明する。

- (1) 対称群 $\mathfrak{S}_m$ に対する Frobenius の指標公式、
- (2) ユニタリ群 $U(n)$ に対する Weyl の指標公式、
- (3) $GL(n, \mathbb{C})$ の自然表現の m 個のテンソル積表現の分解に関する (Weyl-)Schur の双対性。

ここで、よく知られているように Frobenius の指標公式とは、べき和の積を Schur 多項式 $s_{\lambda}(t)$ で展開したときの係数として対称群の指標の共役類での値が取り出せるという関係式である。すなわち、 m の (広義) 分割 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ に対応する $\mathfrak{S}_m$ の (既約表現 V_{λ} の) 指標 χ_{λ} の cycle type $(1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots m^{\alpha_m})$ がであるような元 σ の代表する共役類での値 $\chi_{\lambda}(\sigma)$ は以下で与えられる:

$$p_1(t)^{\alpha_1} p_2(t)^{\alpha_2} \dots p_m(t)^{\alpha_m} = \sum_{\lambda} \chi_{\lambda}(\sigma) s_{\lambda}(t),$$

ただし

$$p_i(t) = t_1^i + t_2^i + \dots + t_n^i, \quad s_{\lambda}(t) = \det(t_j^{\lambda_i + n - i}) / \det(t_j^{n - i})$$

であり、右辺は深さが n 以下の m の分割 λ のすべての和をわたる。

これは普通、Young subgroup $\mathfrak{S}_{\lambda_1} \times \mathfrak{S}_{\lambda_2} \times \dots \times \mathfrak{S}_{\lambda_m}$ から $\mathfrak{S}_m$ への誘導表現に関する Frobenius の相互律と指標の直交関係式を用いて証明される。またユニタリ群 $U(n)(GL(n, \mathbb{C})$ の有限次元) の表現の指標が Schur 多項式で与えられるというのが Weyl の指標公式であ

る. これもたとえば, Weyl の積分公式 (これはまさしくコンパクト群に対する PTF に他ならない)

$$\int_G f(g) dg = \frac{1}{|W|} \int_T \int_{G/T} f(gt g^{-1}) D(t) dg T dt$$

T: 極大トーラス, $W = N(T)/T$: Weyl 群

を使って証明できる. 他方, $GL(n, \mathbb{C})$ の自然表現の m 個のテンソル積表現 $T = (\mathbb{C}^n)^{\otimes m}$ には, 自然に入れ換えとして対称群 $\mathfrak{S}_m$ が作用している. 明らかにこの $GL(n, \mathbb{C})$ と $\mathfrak{S}_m$ の作用は可換であるが, その上さらに $\text{End}(T)$ の中で, (それらの作用たちの 1 次結合が) 互いに full commutant をなすという著しい事実により (Weyl-)Schur の双対性

$$GL(n, \mathbb{C}) \times \mathfrak{S}_m \text{ の joint action に対し, 重複度 1 の直和分解; } (\mathbb{C}^n)^{\otimes m} \simeq \sum_{\lambda} U_{\lambda} \otimes V_{\lambda}$$

が成り立つ. その結果, テンソル積空間 T の無限群 $GL(n, \mathbb{C})$ による分解の様子が, 有限群 $\mathfrak{S}_m$ の既約表現の言葉によって完全に記述されていることを知る.

たとえば Schur-duality を認めた上での Frobenius と Weyl の指標公式の同値性は, 次の補題から PTF を用いてすぐに導かれる.

補題. $\tau \in \mathfrak{S}_m$ の cycle type を $(1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots m^{\alpha_m})$ とするとき, 任意の $L \in GL(n, \mathbb{C})$ に対して

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\tau L)|_{(\mathbb{C}^n)^{\otimes m}} &= \text{Tr}(L)^{\alpha_1} \text{Tr}(L^2)^{\alpha_2} \dots \text{Tr}(L^m)^{\alpha_m} \\ &= p_1(\varepsilon)^{\alpha_1} p_2(\varepsilon)^{\alpha_2} \dots p_m(\varepsilon)^{\alpha_m} \end{aligned}$$

ただし $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ は L の固有値である.

§3. 応用

$V = \text{End}((\mathbb{C}^n)^{\otimes m})$ に対して, 対称群 $\mathfrak{S}_m$, あるいはユニタリ群 $U(n)$ に関する PTF を適用すると, 以下の直交関係式が得られる.

定理. $g, h \in GL(n, \mathbb{C})$ とし, $\mu, \mu' \in \mathfrak{S}_m$ の cycle type をそれぞれ

$$(1^{\mu_1} 2^{\mu_2} \dots m^{\mu_m}), \quad (1^{\mu'_1} 2^{\mu'_2} \dots m^{\mu'_m})$$

(ここで $\mu_1 + 2\mu_2 + \dots + m\mu_m = \mu'_1 + 2\mu'_2 + \dots + m\mu'_m = m$)

とする. このとき $U(n)$ の正規化された Haar 測度 du に対して

$$\int_{U(n)} \prod_{j=1}^m \{\text{Tr}(gu)^j\}^{\mu_j} \prod_{j=1}^m \{\overline{\text{Tr}(hu)^j}\}^{\mu'_j} du = \sum_{\lambda} \frac{\chi_{\lambda}(\mu) \overline{\chi_{\lambda}(\mu')}}{\dim U_{\lambda}} s_{\lambda}(gh^*)$$

ただし右辺の和は, 深さが n 以下の m の分割 λ のすべてをわたる. また U_{λ} は $U(n)$ の最高ウェイト λ が定める既約表現である.

証明は先に述べた Schur duality, (もしくは Frobenius の指標公式) と $U(n)$ の既約表現の行列要素に関する Schur の直交関係式を使えばできる. なおこの結果は, 非常に特別な場

合が Helgason の本 Groups and Geometric Analysis の 5 章にあり, それを一般化した形で $m = n, \mu = \mu'$ の場合に D. Richards : Analogue and extensions of Selberg's integral (1989, IMA series, q -Series and partitions.) によって知られている. (後者の文献情報は三町氏から入手した. 感謝したい.)

また, 定理において $g = h = I$ として, $\mathfrak{S}_m$ の指標の第二直交関係式を用いると系. $m \leq n$ とするとき, 次が成り立つ.

$$\int_{U(n)} \prod_{j=1}^m \{\mathrm{Tr}(u)^j\}^{\mu_j} \prod_{j=1}^m \{\overline{\mathrm{Tr}(u)^j}\}^{\mu'_j} du = \delta_{[\mu][\mu']} \mu_1! \mu_2! \cdots \mu_m! 1^{\mu_1} 2^{\mu_2} \cdots m^{\mu_m}.$$

換言すれば

$$\underbrace{\int_0^1 \cdots \int_0^1}_{n \text{ times}} \prod_{j=1}^m \left\{ \sum_{k=1}^n e^{2\pi\sqrt{-1}jt_k} \right\}^{\mu_j} \prod_{j=1}^m \left\{ \sum_{\ell=1}^n e^{-2\pi\sqrt{-1}j t_\ell} \right\}^{\mu'_j} \\ \times \prod_{1 \leq k < \ell \leq n} |e^{2\pi\sqrt{-1}t_k} - e^{2\pi\sqrt{-1}t_\ell}| dt_1 dt_2 \cdots dt_n \\ = \delta_{[\mu][\mu']} \mu_1! \mu_2! \cdots \mu_m! 1^{\mu_1} 2^{\mu_2} \cdots m^{\mu_m} n!.$$

後半は前半の式を単に Weyl の積分公式で書き改めたものである.

以上本稿では, Dual Pair と跡公式の考え方が融合した一例の観察と Selberg, Dyson 型積分への応用の試みを行った. またここで述べた事実はもちろんよく知られたものであり, 多少とも新しい結果は最後の定理のみであることをお断りしておく.

なお文献については ここでは省略する. (1994/10/23)