

LITTLEWOOD-RICHARDSON RINGS

名大・理 岡田 聡一 (Soichi Okada)

§1. Introduction.

n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の指標環を $R(\mathfrak{S}_n)$ とする. つまり, $R(\mathfrak{S}_n)$ は $\mathfrak{S}_n$ の既約指標 χ^λ (λ は n の分割) を基底とする自由 $\mathbb{Z}$ 加群である. これらの直和

$$R(\mathfrak{S}) = \bigoplus_{n \geq 0} R(\mathfrak{S}_n)$$

は, $\chi \in R(\mathfrak{S}_m), \eta \in R(\mathfrak{S}_n)$ の積を

$$\chi \cdot \eta = \text{Ind}_{\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_n}^{\mathfrak{S}_{m+n}} (\chi \times \eta)$$

と定義することによって graded ring となる. $\chi \in R(\mathfrak{S}_n)$ に対して,

$$\text{ch}(\chi) = \frac{1}{n!} \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} \chi(w) p_{\rho(w)}$$

と定義する. ここで, $\rho(w)$ は w の cycle type を表わす分割であり, $p_{\rho(w)}$ は対応する巾和対称式である. すると,

$$\chi : R(\mathfrak{S}) \longrightarrow \Lambda$$

は $R(\mathfrak{S})$ と対称関数のなす環 Λ の間の環の同型であり,

$$\text{ch}(\chi^\lambda) = s_\lambda \quad (\text{Schur 関数}).$$

ここでは, $\mathfrak{S}_n$ を Hecke 環, Brauer algebra, Birman-Murakami-Wenzl algebra などにかえたときに得られる環 R の構造を, 対称関数環 Λ を用いて記述する.

§1. Littlewood-Richardson ring.

まず、一般的な状況で考える。基礎体 K を固定し、 K 上の半単純環というときは、 K 上の行列環の直和になっているもののみを考える。

定義 1.1. I を加法的半群とする。 A_i ($i \in I$) を体 K 上の有限次元半単純環とし、 $\alpha_{ij} : A_i \otimes A_j \rightarrow A_{i+j}$ ($i, j \in I$) を K -algebra homomorphism とする。 $\mathcal{A} = (\{A_i\}_{i \in I}, \{\alpha_{ij}\}_{i, j \in I})$ は次の条件を満たすとき、 **I -graded tower** であるという。

(1) $A_0 = K$ であり、 $\alpha_{i0} = \alpha_{0i} = \text{Id}_{A_i}$ である。

(2) A_{i+j+k} における共役を除いて、図式

$$\begin{array}{ccc} A_i \otimes A_j \otimes A_k & \xrightarrow{\alpha_{ij} \otimes \text{Id}_{A_k}} & A_{i+j} \otimes A_k \\ \text{Id}_{A_i} \otimes \alpha_{jk} \downarrow & & \downarrow \alpha_{i+j, k} \\ A_i \otimes A_{j+k} & \xrightarrow{\alpha_{i, j+k}} & A_{i+j+k} \end{array}$$

が可換になる。つまり、 $\tau_{ijk} \in A_{i+j+k}^\times$ が存在して、 $a \in A_i, b \in A_j, c \in A_k$ に対して、

$$\alpha_{i, j+k}(a \otimes \alpha_{jk}(b \otimes c)) = \tau_{ijk} \alpha_{i+j, k}(\alpha_{ij}(a \otimes b) \otimes c) \tau_{ijk}^{-1}.$$

以下、 $\mathcal{A}$ を I -graded tower とする。 $\text{Irr}(A_i)$ を既約 A_i -加群の同型類全体の集合とし、 $R(A_i)$ を $\text{Irr}(A_i)$ を基底とする自由 $\mathbb{Z}$ 加群とする。そして、

$$R(\mathcal{A}) = \bigoplus_{i \in I} R(A_i)$$

とおく。 A_i -加群 V 、 A_j -加群 W の同型類 $[V] \in R(A_i)$ 、 $[W] \in R(A_j)$ の積を

$$[V] \cdot [W] = [A_{i+j} \otimes_{A_i \otimes A_j} (V \otimes W)] \in R(A_{i+j})$$

によって定義し、この積を $R(\mathcal{A})$ 全体に双線型に拡張する。

命題 1.2. $\mathcal{A}$ が I -graded tower ならば、 $R(\mathcal{A})$ は I -graded ring となる。

このようにしてできる graded ring $R(\mathcal{A})$ を $\mathcal{A}$ の **Littlewood-Richardson ring** (LR-ring) と呼ぶ。

命題 1.3. すべての $i, j \in I$ に対して, $\sigma_{ij} \in A_{i+j}^\times$ が存在して,

$$\alpha_{ji}(b \otimes a) = \sigma_{ij} \alpha_{ij}(a \otimes b) \sigma_{ij}^{-1} \quad (a \in A_i, b \in A_j)$$

を満たすならば, $R(\mathcal{A})$ は可換である.

以下, $R(\mathcal{A})$ が可換になるような I -graded tower $\mathcal{A}$ を考える. そして,

$$R_K(A_i) = K \otimes_{\mathbb{Z}} R(A_i), \quad R_K(\mathcal{A}) = K \otimes_{\mathbb{Z}} R(\mathcal{A})$$

とおく.

定義 1.4. $a \in A_i$ に対して,

$$p(a) = \sum_{[V] \in \text{Irr}(A_i)} \text{tr}(a|V) [V] \in R_K(A_i)$$

とおく.

命題 1.5. $a \in A_i, b \in A_j$ に対して, $R(\mathcal{A})$ において

$$p(\alpha_{ij}(a \otimes b)) = p(a)p(b).$$

この p を用いて, “Markov trace” が定義できる.

定義 1.6. $\tilde{K}$ を K -algebra とする. K -線型写像 $\tau_i : A_i \rightarrow \tilde{K}$ ($i \in I$) が

- (1) $\tau_i(1) = 1$,
- (2) $\tau_i(aa') = \tau_i(a'a)$ ($a, a' \in A_i$),
- (3) $\tau_{i+j}(\alpha_{ij}(a \otimes b)) = \tau_i(a)\tau_j(b)$ ($a \in A_i, b \in A_j$)

を満たすとき, **pre-Markov trace** であるという. このとき, (2) によって

$$\tau_i(a) = \sum_{[V] \in \text{Irr}(A_i)} \alpha_{[V]} \text{tr}(a|V) \quad (a \in A_i)$$

となる $\alpha_{[V]} \in \tilde{K}$ が存在する. この $\alpha_{[V]}$ を τ_i の **weight** と呼ぶ.

命題 1.7. $R(\mathcal{A})$ において, $p(1_{A_i})$ ($i \in I$) が零因子でないと仮定し, $\tilde{R}_K(\mathcal{A}) = R_K(\mathcal{A})[1/p(1_{A_i}) : i \in I]$ とおく. $\tilde{\tau}_i : A_i \rightarrow \tilde{R}(\mathcal{A})$ を

$$\tilde{\tau}_i(a) = p(a)/p(1_{A_i})$$

によって定義する. このとき, $\tilde{\tau}_i$ は pre-Markov trace であり, その weight は

$$\alpha_{[V]} = [V]/p(1_{A_i})$$

で与えられる. 特に, $\pi : \tilde{R}_K(\mathcal{A}) \rightarrow K$ を K -algebra homomorphism とするとき,

$$\tau_i(a) = \pi(p(a)/p(1_{A_i}))$$

で定義される τ_i も pre-Markov trace である.

逆に,

命題 1.8. $\tau_i : A_i \rightarrow K$ ($i \in I$) を pre-Markov trace とする. $[V] \in R(A_i)$ に τ_i の weight $\alpha_{[V]}$ を対応させる写像は $R(\mathcal{A})$ から K への algebra homomorphism である.

次に, 2 つの graded tower の間の関係を考える.

定義 1.9. $\mathcal{A} = (\{A_i\}_{i \in I}, \{\alpha_{ij}\}_{i,j \in I})$ を I -graded tower, $\mathcal{B} = (\{B_j\}_{j \in J}, \{\beta_{jk}\}_{j,k \in J})$ を J -graded tower とする. このとき, $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ への準同型 f とは, 可換半群の準同型 $f : I \rightarrow J$ と K -algebra homomorphism $f_i : A_i \rightarrow B_{f(i)}$ ($i \in I$) であって, $B_{f(i+j)}$ における共役を除いて図式

$$\begin{array}{ccc} A_i \otimes A_j & \xrightarrow{\alpha_{ij}} & A_{i+j} \\ f_i \otimes f_j \downarrow & & \downarrow f_{i+j} \\ B_{f(i)} \otimes B_{f(j)} & \xrightarrow{\beta_{f(i)f(j)}} & B_{f(i+j)} \end{array}$$

を可換にする, つまり, $\rho_{ij} \in B_{f(i+j)}$ が存在して,

$$\beta_{f(i),f(j)}(f_i(a) \otimes f_j(b)) = \rho_{ij} f_{i+j}(\alpha_{ij}(a \otimes b)) \rho_{ij}^{-1} \quad (a \in A_i, b \in A_j)$$

を満たすもののことである.

命題 1.10. $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ を準同型とする. このとき,

(1) $[V] \in R(\mathcal{A}_i)$ に対して, $\tilde{f}([V]) = [B_{f(i)} \otimes_{\mathcal{A}_i} V] \in R(\mathcal{B}_{f(i)})$ と定義すると,

$$\tilde{f}: R(\mathcal{A}) \longrightarrow R(\mathcal{B})$$

は環の準同型である.

(2) $a \in \mathcal{A}_i$ に対して,

$$\tilde{f}(p(a)) = p(f_i(a)).$$

§2. 対称関数.

$\Lambda = \Lambda_X$ を $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ に関する対称関数のなす環とする. (詳しくは [Mac] を参照されたい.) つまり, Λ は $\mathbb{N}$ -graded ring $\Lambda = \bigoplus_{d \geq 0} \Lambda_d$ であり, 各斉次成分は

$$\Lambda_d = \varprojlim_n (\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]^{\mathfrak{S}_n})_d$$

で与えられる. ここで, $(\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]^{\mathfrak{S}_n})_d$ は n 変数 d 次の対称式全体である. $e_n(X)$, $h_n(X) \in \Lambda_n$ をそれぞれ n 次の基本対称式, 完全対称式とする:

$$\sum_{n \geq 0} h_n(X) t^n = \prod_i (1 + x_i t), \quad \sum_{n \geq 0} e_n(X) t^n = \prod_i (1 - x_i t)^{-1}.$$

このとき,

$$\Lambda = \mathbb{Z}[e_1, e_2, \dots] = \mathbb{Z}[h_1, h_2, \dots]$$

であり, Λ の $\mathbb{Z}$ -基底として, Schur 関数

$$s_\lambda = \det(h_{\lambda_i - i + j})$$

がとれる. この基底 $\{s_\lambda\}$ に関する構造定数 $LR_{\mu\nu}^\lambda$ を Littlewood-Richardson 係数という:

$$s_\mu s_\nu = \sum_\lambda LR_{\mu\nu}^\lambda s_\lambda.$$

$\Lambda_X[z]$ を Λ_X 上の 1 変数多項式環とし, $\deg z = 2$ と定めることによって, $\Lambda_X[z]$ を $\mathbb{N}$ -graded ring と見なす. よって, その n 次斉次成分は

$$(\Lambda_X[z])_n = \bigoplus_{d+2k=n} \Lambda_{X,d} z^k$$

で与えられる.

定義 2.1. $B_\lambda(X; z), C_\lambda(X; z) \in \Lambda_X[z]$ を

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda} B_{\lambda}(X; z) s_{\lambda}(U) &= \frac{\prod_{k \leq l} (1 - zu_k u_l)}{\prod_{i, j} (1 - x_i u_j)} \\ \sum_{\lambda} C_{\lambda}(X; z) s_{\lambda}(U) &= \frac{\prod_{k \leq l} (1 - zu_k u_l)}{\prod_{i, j} (1 - x_i u_j)} \end{aligned}$$

によって定義する.

分割 λ に対して, その Young 図形を主対角線に関して折り返してできる Young 図形に対応する分割を ${}^t\lambda$ とする. そして, $p(\lambda) = \#\{i : \lambda_i \geq i\}$ とおき,

$$\alpha_i = \lambda_i - i, \quad \beta_i = {}^t\lambda_i - i \quad (1 \leq i \leq p(\lambda))$$

とおく. このとき, $\lambda = (\alpha|\beta)$ と表わす (Frobenius notation). 特に, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ ($\alpha_1 > \dots > \alpha_p \geq 0$) に対して, $(\alpha_1 + 1, \dots, \alpha_p + 1 | \alpha_1, \dots, \alpha_p)$ なる分割を $(\alpha + 1|\alpha)$ と略記する. また, $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \dots)$ に対して, $2\kappa = (2\kappa_1, 2\kappa_2, \dots)$ とおく. このとき,

命題 2.2.

$$\begin{aligned} B_{\lambda}(X; z) &= \sum_{\mu} \left(\sum_{\nu=(\alpha+1|\alpha)} (-z)^{|\nu|/2} LR_{\mu\nu}^{\lambda} \right) s_{\mu}(X), \\ C_{\lambda}(X; z) &= \sum_{\mu} \left(\sum_{\nu=(\alpha|\alpha+1)} (-z)^{|\nu|/2} LR_{\mu\nu}^{\lambda} \right) s_{\mu}(X), \\ s_{\lambda}(X) &= \sum_{\mu} \left(\sum_{\kappa} z^{|\kappa|} LR_{2\kappa, \mu}^{\lambda} \right) B_{\lambda}(X; z) \\ &= \sum_{\mu} \left(\sum_{\kappa} z^{|\kappa|} LR_{i(2\kappa), \mu}^{\lambda} \right) C_{\lambda}(X; z). \end{aligned}$$

系 2.3. $\{z^k B_\lambda(X; z) : |\lambda| + 2k = n\}$ は $\Lambda[z]_n$ の $\mathbb{Z}$ -基底をなす.

注意 2.4. $B_\lambda(X; 0) = C_\lambda(X; 0) = s_\lambda(X)$ である. また, $\lambda_{SO} = B_\lambda(X; 1)$, $\lambda_{Sp} = C_\lambda(X; 1)$ は [KoiT] で定義されている universal character であり,

$$B_\lambda(X; z) = z^{|\lambda|/2} \lambda_{SO}(z^{-1/2} X), \quad C_\lambda(X; z) = z^{|\lambda|/2} \lambda_{Sp}(z^{-1/2} X).$$

$\Lambda_X \otimes \Lambda_Y$ は自然に $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ -graded ring となり, $(\Lambda_X \otimes \Lambda_Y)[w]$ を $\deg w = (1, 1)$ と定めることによって, $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ -graded ring と見ることができる. よって, その (m, n) 次斉次成分は

$$((\Lambda_X \otimes \Lambda_Y)[w])_{m,n} = \bigoplus_{p+k=m, q+k=n} (\Lambda_{X,p} \otimes \Lambda_{Y,q}) w^k$$

で与えられる.

定義 2.5. $A_{\lambda,\mu}(X, Y; w) \in (\Lambda_X \otimes \Lambda_Y)[w]$ を

$$\sum_{\lambda,\mu} A_{\lambda,\mu}(X, Y; w) s_\lambda(U) s_\mu(V) = \frac{\prod_{k,l} (1 - w u_k v_l)}{\prod_{i,j} (1 - x_i u_j) (1 - y_i v_j)}$$

によって定義する.

命題 2.6.

$$A_{\lambda,\mu}(X, Y; w) = \sum_{\xi,\eta} \left(\sum_{\tau} (-w)^{|\tau|} L R_{\xi,\tau}^\lambda L R_{\eta,\tau}^\mu \right) s_\xi(X) s_\eta(Y),$$

$$s_\lambda(X) s_\mu(Y) = \sum_{\xi,\eta} \left(\sum_{\tau} w^{|\tau|} L R_{\xi,\tau}^\lambda L R_{\eta,\tau}^\mu \right) A_{\xi,\eta}(X, Y; w).$$

系 2.7. $\{w^k A_{\lambda,\mu}(X, Y; w) : |\lambda| + k = m, |\mu| + k = n\}$ は $((\Lambda_X \otimes \Lambda_Y)[w])_{m,n}$ の $\mathbb{Z}$ -基底をなす.

注意 2.8. $A_{\lambda,\mu}(X, Y; 0) = s_\lambda(X) s_\mu(Y)$ である. また, $[\lambda, \mu]_{GL} = A_{\lambda,\mu}(X, Y; 1)$ は [Koi] で導入されている GL の有理表現の universal character である.

命題 2.9. $M : \Lambda \otimes \Lambda \rightarrow \Lambda$ を積写像とし, 環準同型 $\widetilde{M} : (\Lambda_X \otimes \Lambda_Y)[w] \rightarrow \Lambda_X[z]$ を

$$\widetilde{M}|_{\Lambda \otimes \Lambda} = M, \quad \widetilde{M}(w) = z$$

によって定義する. このとき,

$$\widetilde{M}(A_{\lambda, \mu}(X, Y; w)) = \sum_{\nu} \left(\sum_{\alpha, \beta, \xi, \eta} z^{|\alpha|+|\beta|} LR_{2\alpha, \xi}^{\lambda} LR_{2\beta, \eta}^{\mu} LR_{\xi, \eta}^{\nu} \right) B_{\nu}(X; z).$$

§3. Hecke, Brauer, BMW-algebra の LR ring.

この節では, 古典群 (と対応する量子群) の centralizer algebra として現われる graded tower の LR-ring の構造を対称関数環を用いて記述する.

定義 3.1. (Iwahori-Hecke algebra) $H_n(q)$ を次の表示で定義される $\mathbb{C}(q)$ -algebra とする.

$$\text{生成元 } :T_1, \dots, T_{n-1},$$

$$\text{関係式 } :T_i T_j = T_j T_i \quad (|i - j| \geq 2),$$

$$T_i T_{i+1} T_i = T_{i+1} T_i T_{i+1},$$

$$(T_i - q)(T_i + 1) = 0.$$

このとき, $H_n(q)$ は半単純環であり, その既約表現は n の分割によってパラメトライズされる. $\lambda \vdash n$ に対応する $H_n(q)$ の既約表現を $V_{H_n(q)}^{\lambda}$ とする. $U_q(\mathfrak{gl}(N))$ の自然表現を V とすると, N が十分大きいとき,

$$H_n(q^2) \cong \text{End}_{U_q(\mathfrak{gl}(N))}(V^{\otimes n})$$

また, $\mathcal{H} = \{H_n(q)\}_{n \in \mathbb{N}}$ は

$$\begin{array}{ccccc} H_m(q) & \otimes & H_n(q) & \longrightarrow & H_{m+n}(q) \\ T_i & \otimes & 1 & \longmapsto & T_i \\ 1 & \otimes & T_i & \longmapsto & T_{m+i} \end{array}$$

に関して自然に $\mathbb{N}$ -graded tower となる.

定理 3.2. $\text{ch}([V_{H_n(q)}^\lambda]) = s_\lambda$ によって定義される写像 $\text{ch}: R(\mathcal{H}) \rightarrow \Lambda$ は環の同型である.

定義 3.3. (Brauer algebra) $D_n(x)$ を次の表示で定義される $\mathbb{C}(x)$ -algebra とする.

生成元 $: e, s_1, \dots, s_{n-1},$

関係式 $: s_i s_j = s_j s_i \quad (|i - j| \geq 2),$

$$s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1},$$

$$s_i^2 = 1,$$

$$e s_i = s_i e \quad (i \geq 3),$$

$$e s_2 e = e,$$

$$e s_1 = s_1 e,$$

$$e^2 = x e.$$

このとき, $D_n(x)$ は半単純環であり, その既約表現は

$$\widehat{B}(n) = \{(\lambda, k) : \lambda \text{ は } n - 2k \text{ の分割}, k = 0, 1, 2, \dots\}$$

によってパラメトライズされる. $(\lambda, k) \in \widehat{B}(n)$ に対応する $D_n(x)$ の既約表現を $V_{D_n(x)}^{\lambda, k}$ とする. $O(N), Sp(N)$ (N は偶数) の自然表現を V とすると, N が十分大きいとき,

$$D_n(N) \cong \text{End}_{O(N)}(V^{\otimes n}), \quad D_n(-N) \cong \text{End}_{Sp(N)}(V^{\otimes n}).$$

また, $\mathcal{D} = \{D_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ は

$$\begin{array}{ccccccc} D_m(x) & \otimes & D_n(x) & \longrightarrow & D_{m+n}(x) \\ s_i & \otimes & 1 & \longmapsto & s_i \\ e & \otimes & 1 & \longmapsto & e \\ 1 & \otimes & s_i & \longmapsto & s_{m+i} \\ 1 & \otimes & e & \longmapsto & e_{m+1} \end{array}$$

に関して自然に N -graded tower となる. ここで,

$$e_{m+1} = s_m s_{m-1} \dots s_1 e s_1 \dots s_{m-1} s_m.$$

定理 3.4. $\text{ch}([V_{D_n(x)}^{\lambda,k}]) = z^k B_\lambda(X; z)$ によって定義される写像 $\text{ch} : R(\mathcal{D}) \rightarrow \Lambda_X[z]$ は環の同型である.

定義 3.5. (Birman-Murakami-Wenzl algebra) $BMW_n(t, q)$ を次の表示で定義される $\mathbb{C}(t, q)$ -algebra とする.

生成元 $:T_1, \dots, T_{n-1},$

関係式 $:T_i T_j = T_j T_i \quad (|i - j| \geq 2),$

$$T_i T_{i+1} T_i = T_{i+1} T_i T_{i+1},$$

$$(T_i - t^{-1})(T_i - q)(T_i + q^{-1}) = 0,$$

$$E_i T_{i-1}^{\pm 1} E_i = t^{\pm 1} E_i,$$

$$E_i T_{i+1}^{\pm 1} E_i = t^{\pm 1} E_i.$$

ここで, $E_i = 1 - (T_i - T_i^{-1})/(q - q^{-1})$ である.

このとき, $BMW_n(t, q)$ は半単純環であり, その既約表現は $\widehat{B}(n)$ によってパラメトライズされる. $(\lambda, k) \in \widehat{B}(n)$ に対応する $BMW_n(t, q)$ の既約表現を $V_{BMW_n(t, q)}^{\lambda, k}$ とする. $U_q(\mathfrak{so}(2N+1))$ の自然表現を V とすると, N が十分大きいとき,

$$BMW(q^{2N}, q) \cong \text{End}_{U_q(\mathfrak{so}(2N+1))}(V^{\otimes n})$$

また, $BMW = \{BMW_n(t, q)\}_{n \in \mathbb{N}}$ は自然に

$$\begin{array}{ccccc} BMW_m(q) & \otimes & BMW_n(q) & \longrightarrow & BMW_{m+n}(q) \\ T_i & \otimes & 1 & \longmapsto & T_i \\ 1 & \otimes & T_i & \longmapsto & T_{m+i} \end{array}$$

に関して自然に $\mathbb{N}$ -graded tower となる.

定理 3.6. $\text{ch}([V_{BMW_n(t, q)}^{\lambda, k}]) = z^k B_\lambda(X; z)$ によって定義される写像 $\text{ch} : R(BMW) \rightarrow \Lambda_X[z]$ は同型である.

定義 3.7. $B_{m,n}(x)$ を次の表示で定義される $\mathbb{C}(x)$ -algebra とする.

生成元 $:s_{-(n-1)}, \dots, s_{-1}, e, s_1, \dots, s_{m-1},$

関係式 $:s_i s_j = s_j s_i \quad (|i - j| \geq 2),$

$$s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1},$$

$$s_i^2 = 1,$$

$$e s_i = s_i e \quad (|i| \geq 2),$$

$$e s_{\pm 1} e = e,$$

$$e^2 = x e,$$

$$s_1 s_{-1} e s_1 s_{-1} e = e s_1 s_{-1} e = e s_1 s_{-1} e s_1 s_{-1}.$$

$B_{m,n}(x)$ は半単純環であり, その既約表現は

$$\hat{A}(m, n) = \{(\lambda, \mu, k) : \lambda \text{ は } m - k \text{ の分割, } \mu \text{ は } n - k \text{ の分割, } k = 0, 1, \dots\}$$

でパラメトライズされる. $(\lambda, \mu, k) \in \hat{A}(m, n)$ に対応する $B_{m,n}(x)$ の既約表現を $V_{B_{m,n}(x)}^{\lambda, \mu, k}$ とする. $GL(N)$ の自然表現を V , その反傾表現を V^* とすると, N が十分大きいとき,

$$B_{m,n}(N) \cong \text{End}_{GL(N)}(V^{\otimes m} \otimes (V^*)^{\otimes n}).$$

また, $\mathcal{B} = \{B_{m,n}(x)\}_{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ は自然に

$$\begin{array}{ccccccc} B_{k,l}(x) & \otimes & B_{m,n}(x) & \longrightarrow & B_{k+m,l+n}(x) \\ s_i & \otimes & 1 & \longmapsto & s_i \\ e & \otimes & 1 & \longmapsto & e \\ 1 & \otimes & s_i & \longmapsto & \begin{cases} s_{-l-i} & (i < 0) \\ s_{k+i} & (i > 0) \end{cases} \\ 1 & \otimes & e & \longmapsto & e_{-k-1,l+1} \end{array}$$

に関して自然に $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ -graded tower となる. ここで,

$$e_{-k-1,l+1} = s_{-k} \dots s_{-1} s_l \dots s_1 e s_1 \dots s_l s_{-1} \dots s_{-k}.$$

定理 3.8. $\text{ch}([V_{B_{m,n}(x)}^{\lambda,\mu,k}]) = z^k A_{\lambda,\mu}(X, Y; w)$ によって定義される写像 $\text{ch} : R(\mathcal{B}) \rightarrow (\Lambda_X \otimes \Lambda_Y)[w]$ は環の同型である.

定義 3.9. $A_{m,n}(t, q)$ を次の表示で定義される $\mathbb{C}(t, q)$ -algebra とする.

生成元 $:T_{-(n-1)}, \dots, T_{-1}, E, T_1, \dots, T_{m-1},$

関係式 $:T_i T_j = T_j T_i \quad (|i - j| \geq 2),$

$$T_i T_{i+1} T_i = T_{i+1} T_i T_{i+1},$$

$$T_i^2 = 1,$$

$$ET_i = T_i E \quad (|i| \geq 2),$$

$$ET_{\pm 1} E = tE,$$

$$E^2 = xE,$$

$$T_1 T_{-1}^{-1} E T_1^{-1} T_{-1} E = E T_1^{-1} T_{-1} E = E T_1 T_{-1}^{-1} E T_1^{-1} T_{-1}.$$

ここで, $x = (1 - t)/(1 - q)$ である.

$A_{m,n}(x)$ は半単純環であり, その既約表現は $\widehat{A}(m, n)$ でパラメトライズされる. $(\lambda, \mu, k) \in \widehat{A}(m, n)$ に対応する $A_{m,n}(x)$ の既約表現を $V_{A_{m,n}(x)}^{\lambda,\mu,k}$ とする. $U_q(\mathfrak{gl}(N))$ の自然表現を V , その反傾表現を V^* とすると, N が十分大きいとき,

$$A_{m,n}(q^N, q) \cong \text{End}_{U_q(\mathfrak{gl}(N))}(V^{\otimes m} \otimes (V^*)^{\otimes n}).$$

また, $\mathcal{A} = \{A_{m,n}(x)\}_{m,n \in \mathbb{N}}$ は自然に

$$\begin{array}{llll} A_{k,l}(x) \otimes A_{m,n}(x) & \longrightarrow & A_{k+m,l+n}(x) \\ T_i \otimes 1 & \longmapsto & T_i \\ E \otimes 1 & \longmapsto & E \\ 1 \otimes T_i & \longmapsto & \begin{cases} T_{-l-i} & (i < 0) \\ T_{k+i} & (i > 0) \end{cases} \\ 1 \otimes E & \longmapsto & E_{-k-1,l+1} \end{array}$$

に関して自然に $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ -graded tower となる. ここで,

$$E_{-k-1,l+1} = T_{-k} \dots T_{-1} T_l^{-1} \dots T_1^{-1} E T_1 \dots T_l T_{-1}^{-1} \dots T_{-k}^{-1}.$$

定理 3.10. $\text{ch}([V_{A_{m,n}(x)}^{\lambda,\mu,k}]) = z^k A_{\lambda,\mu}(X, Y; w)$ によって定義される写像 $\text{ch} : R(\mathcal{A}) \rightarrow (\Lambda_X \otimes \Lambda_Y)[w]$ は環の同型である.

証明はいずれの場合も

- (1) Schur-Weyl-Brauer 型の duality を用いて, 有限変数版の (Weyl 群不変式環における) Frobenius の公式を導く. (これはすでに, [H], [HR], [KiW1], [KiW2], [R1], [R2], [Ush] によってなされている.)
- (2) (1) の Frobenius の公式から無限変数版の (対称関数を用いた) Frobenius の公式を導く.
- (3) 命題 1.5 を用いて, ch が同型であることを示す.

の順序で行なわれる. また, 命題 1.7 を用いることによって, 上にあげた centralizer algebra に対する Markov trace を導くことができる.

最後に, 命題 1.10 を用いると次の定理が証明できる.

定理 3.11. (1) $B_{m,n}(x)$ から Brauer algebra $D_{m+n}(x)$ への algebra homomorphism $\iota_{m,n}$ で,

$$\begin{aligned}\iota_{m,n}(s_{-i}) &= s_{n-i} \quad (1 \leq i \leq n-1), \\ \iota_{m,n}(e) &= e_n, \\ \iota_{m,n}(s_j) &= s_{n+j} \quad (1 \leq j \leq m)\end{aligned}$$

となるものが存在する.

- (2) $(\iota_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ は $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ -graded tower $\mathcal{B}$ から $\mathbb{N}$ -graded tower $\mathcal{D}$ への準同型 ι を定める.
- (3) 次の図式は可換である.

$$\begin{array}{ccc} R(\mathcal{B}) & \xrightarrow{\quad \tilde{\iota} \quad} & R(\mathcal{D}) \\ \text{ch} \downarrow & & \downarrow \text{ch} \\ (\Lambda_X \otimes \Lambda_Y)[w] & \xrightarrow[\quad \widetilde{M} \quad]{} & \Lambda_X[z] \end{array}$$

ここで, $\widetilde{M}$ は命題 2.9 で定義した環準同型である.

References

- [BeCHLLSt] G. Benkart, M. Chakrabarti, T. Halverson, R. Leduc, C. Lee, and J. Stroomeer, *Tensor product representations of general linear groups and their connections with Brauer algebras*, J. Algebra **166** (1994), 529–567.
- [BiWe] J. Birman and H. Wenzl, *Braids, link polynomials and a new algebra*, Trans. Amer. Math. Soc **313** (1989), 249–273.
- [Br] R. Brauer, *On algebras which are connected with semisimple Lie groups*, Ann. of Math. **38** (1937), 857–872.
- [H] T. Halverson, *Characters of the centralizer algebras of mixed tensor representations of $GL(r, \mathbb{C})$ and the quantum group $U_q(gl(r, \mathbb{C}))$* , preprint.
- [HR] T. Halverson and A. Ram, *Characters of algebras containing of a Jones basic constructions: the Temperley-Lieb, Okada, Brauer, and Birman-Wenzl algebras*, preprint.
- [J] M. Jimbo, *A q -analogue of $U(gl(N+1))$, Hecke algebra and the Yang-Baxter equation*, Lett. Math. Phys. **11** (1986), 247–252.
- [Ke] S. Kerov, *Characters of Hecke and Birman-Wenzl algebras*, Quantum groups, Lect. Notes in Math. 1510, Springer Verlag, 1992, pp. 335–340.
- [KiWy1] R. King and B. Wybourne, *Representations and trace of the Hecke algebras $H_n(q)$ of type A_{n-1}* , J. Phys. A: Math. Gen. **23** (1990), L1193–1197.
- [KiWy2] ———, *Representations and trace of the Hecke algebras $H_n(q)$ of type A_{n-1}* , J. Math. Phys. **33** (1992), 4–14.
- [Koi] K. Koike, *On the decomposition of tensor products of the representations of the classical groups: by means of the universal characters*, Adv. Math. **74** (1989), 57–86.
- [KoiT] K. koike and I. Terada, *Young diagrammatic method for the representation theory of the classical groups of type B_n , C_n , D_n* , J. Algebra **107** (1987), 466–511.

- [KosMu1] M. Kosuda and J. Murakami, *The centralizer algebras of mixed tensor representations of $U_q(gl_n)$ and the HOMFLY polynomials of links*, Proc. Japan Acad. **68** (1992), 148–151.
- [KosMu2] ———, *Centralizer algebras of the mixed tensor representations of quantum group of $U_q(gl(n, \mathbb{C}))$* , Osaka J. Math. **30** (1993), 475–507.
- [L] R. Leduc, *A two parameter version of the centralizer algebra of mixed tensor representations of $GL(r, \mathbb{C})$ and $U_q(gl(r, \mathbb{C}))$* , preprint.
- [Mac] I.G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, Oxford Univ. Press, 1979.
- [Mu] J. Murakami, *The representations of the q -analogue of Brauer's centralizer algebras and the Kauffman polynomial of links*, Publ. RIMS **26** (1990), 935–945.
- [R1] A. Ram, *A Frobenius formula for the characters of the Hecke algebras*, Invent. Math. **106** (1991), 461–488.
- [R2] ———, *Characters of Brauer's centralizer algebras*, Pacific J. Math. (to appear).
- [Sp] T. Springer, *Jones' trace function on the Hecke algebra of symmetric groups*, Topics in Algebra, Banach Center Publications, Vol.26, Part 2, PWN-Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1990.
- [USh] K. Ueno and Y. Shibukawa, *Character table of Hecke algebras of type A_{N-1} and representations of the quantum group $U_q(gl_{n+1})$* , Infinite Analysis, Proceedings of the RIMS Project 1991, World Scientific, 1992, pp. 977–984.
- [We1] H. Wenzl, *Hecke algebras of type A_n and subfactors*, Invent. Math. **92** (1988), 349–383.
- [We2] ———, *On the structure of Brauer's centralizer algebras*, Ann. Math. **128** (1988), 173–193.
- [We3] ———, *Quantum groups and subfactors of type B, C, D* , Comm. Math. Phys. **133** (1990), 383–432.
- [Z] A. Zelevinsky, *Representations of Finite Classical Groups*, Lect. Notes in Math. 869, Springer Verlag, 1981.