

リー超代数 $\mathfrak{sl}(2,1)$ の既約表現のコホモロジー

田中順子 (京大理)

リー環 $\mathfrak{g}$ の表現空間 V に値を取るコホモロジーの理論を用いて「誘導表現」という側面からのものの類似を追究したものがリー環における **cohomological induction** の理論である。それはかなり精密な結果が得られているが、半単純リー環の代わりにリー超代数をとってその理論がどこまでうまくいくか調べようとしたのが今回のコホモロジーの計算の動機である。

リー超代数のコホモロジーについては、例えば Leites ([9]) 等がリー超代数上の外微分形式を研究しているが、有限次元リー超代数の持つ、有限次元リー環にはない性質のうちでコホモロジーに関係する最も顕著なものの一つに、外積代数が有限次元にならないということが挙げられる。このため、リー環の圏における自明な加群 $\mathbb{C}$ の分解が有限次元で止まるものとして構成できたが、リー超代数の場合にはこのようなものが作れない。これは、**cohomological induction** の理論のために非常に重要な定理であるポアンカレの双対性が、リー環の場合と同様には証明できないということを示している。リー超代数のポアンカレの双対性は表現空間の射影次元が有限であるという仮定のもとに Chemla が証明した ([2])。しかしその仮定が本当に必要なのか、また、その仮定はどの範囲で成り立つものなのかを調べたい。そのためにも一例として比較的簡単な構造を持つ A 型のリー超代数 $\mathfrak{sl}(2,1)$ を選んだのである。 $\mathfrak{gl}(1,1)$ の場合は、射影次元有限にならない表現があることが分かっている (寺田 [11])。この報告集を書く段階では計算が完全には終了していないのだが、興味ある結果が得られている。

§1. 序

1.1. 定義と記号. $V = V_0 \oplus V_1$ を $\mathbb{C}$ 上の $\mathbb{Z}_2$ - 次数つきベクトル空間とする。代数 $\text{End } V$ は、次の定義により次数つき超代数になる:

$$\text{End}_i V = \{a \in \text{End } V \mid aV_k \subset V_{i+k}, k \in \mathbb{Z}_2\}, \quad i \in \mathbb{Z}_2.$$

斉次の元 X, Y に対してかっこ積を定義する:

$$[X, Y] = XY - (-1)^{|X||Y|} YX.$$

ここで $|X|$ は X の次数を表している. 今後特に断らない限り $|X|$ と書くと, X は斉次元であるとする. これにより, $\text{End } V$ はリー超代数となる. $\dim V_0 = m$, $\dim V_1 = n$ の時, これを $\mathfrak{gl}(m, n)$ と書く. V の自然な基底をとったとき, $\mathfrak{gl}(m, n)$ の元は $\alpha \in \mathcal{M}(m, m)$, $\beta \in \mathcal{M}(n, m)$, $\gamma \in \mathcal{M}(m, n)$, $\delta \in \mathcal{M}(n, n)$ によって $X = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ と表され,

$$\mathfrak{gl}(m, n)_{\bar{0}} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathfrak{gl}(m, n)_{\bar{1}} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \gamma & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

となる. $\mathfrak{gl}(m, n)$ に対して supertrace $\text{str} : \mathfrak{gl}(m, n) \rightarrow \mathbb{C}$ を $\text{str} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \text{tr } \alpha - \text{tr } \delta$ とし, 部分代数 $\mathfrak{sl}(m, n)$ すなわち $\mathfrak{sl}(m, n) = \{X \in \mathfrak{gl}(m, n) \mid \text{str } X = 0\}$ を定義する. また, $\mathfrak{sl}(m, 1)$ のカルタン部分代数を固定し, その基底を

$$H_i = E_{i, i} - E_{i+1, i+1} \quad (1 \leq i \leq m-1), \quad C = \sum_{j=1}^m E_{j, j} + m E_{m+1, m+1}$$

と定める. 奇部の基底も

$$X_i = E_{i, m+1}, \quad Y_i = E_{m+1, i}, \quad (1 \leq i \leq m)$$

と定める. E_{ij} は (i, j) -成分が 1 で, 他が 0 であるような $\mathfrak{gl}(m, n)$ の行列を表している.

リー超代数 $\mathfrak{gl}(m, 1)$ はまた $\mathbb{Z}$ -次数も持つ:

$$\begin{aligned} \mathfrak{sl}(m, 1) &= \mathfrak{sl}(m, 1)_{-1} \oplus \mathfrak{sl}(m, 1)_0 \oplus \mathfrak{sl}(m, 1)_1, \\ \mathfrak{sl}(m, 1)_{-1} &= \langle Y_i \mid i = 1, \dots, m \rangle_{\mathbb{C}}, \quad \mathfrak{sl}(m, 1)_0 = \mathfrak{sl}(m, 1)_{\bar{0}}, \\ \mathfrak{sl}(m, 1)_1 &= \langle X_i \mid i = 1, \dots, m \rangle_{\mathbb{C}}. \end{aligned}$$

ここで $\langle \cdot \rangle_{\mathbb{C}}$ は, $\mathbb{C}$ で張られる空間を表している. 特に $\mathfrak{sl}(2, 1)$ の場合は, 偶部はカルタン部分代数 $\langle H, C \rangle_{\mathbb{C}}$ ($H = H_1$) と, 2 元 $Z_+ = E_{12}$, $Z_- = E_{21}$ によって生成される.

1.2. 最高ウェイト Λ を持つ加群 $V(\Lambda)$. 今, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, 1)$ について考える. $\mathfrak{g}_{\bar{0}} \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathbb{C} \cdot C$. V_{λ} を最高ウェイト $\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を持つ $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ の最高ウェイト表現と

する.

$$Hv_i = (\lambda - 2i)v_i, Z_+v_i = i(\lambda + 1 - i)v_{i-1}, Z_-v_i = v_{i+1},$$

$$(i = 0, 1, \dots, \lambda, v_{-1} = v_{\lambda+1} = 0)$$

として V_λ の基底 $\{v_0, v_1, \dots, v_\lambda\}$ を決める. $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ を $\mathbb{Z}_2$ -次数を持つ部分代数とし,

$$Cv = cv, Xv = 0 \quad (v \in V_\lambda, X \in \mathfrak{g}_1)$$

なる作用によって $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ -加群 V_λ を $\mathfrak{p}$ -加群 $L(\Lambda)$ に拡張する. ここで $\Lambda = (\lambda, c)$ はウェイト λ と定数 $c \in \mathbb{C}$ の組を表す. 更に, 加群 $\bar{V}(\Lambda) = \text{Ind}_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{g}} L(\Lambda) := \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathfrak{p}} L(\Lambda)$ を,

$$X(u \otimes v) = (Xu) \otimes v \quad (X \in \mathfrak{g}, u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}), v \in L(\Lambda))$$

で定義し, $\bar{V}(\Lambda)$ の極大部分加群 $I(\Lambda)$ を用いて

$$V(\Lambda) = \bar{V}(\Lambda)/I(\Lambda)$$

を定義すると, 商加群 $V(\Lambda)$ は $\mathfrak{sl}(2, 1)$ の既約加群になる. この加群を取り扱うことにする.

1.3. キリング形式. リー超代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ 上の双線形形式

$$B(X, Y) := \text{str}(\text{ad } X \text{ ad } Y), \quad X, Y \in \mathfrak{g},$$

を $\mathfrak{g}$ 上のキリング形式と呼ぶ. $\mathfrak{g}$ のカシミール元 $\Omega \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ を

$$\Omega = \sum_{1 \leq i_1, i_2 \leq d} B(E_{i_1}, E_{i_2}) F_{i_2} \cdot F_{i_1}$$

とする. ここで d は $\mathfrak{g}$ の次元, $(E_i)_{1 \leq i \leq d}, (F_i)_{1 \leq i \leq d}$ は $B(E_i, F_j) = \delta_{ij}$ ($1 \leq i, j \leq d$) なる $\mathfrak{g}$ の双対基底である. $\mathfrak{sl}(2, 1)$ の場合, カシミール元 Ω は,

$$\Omega = -\frac{1}{4}C^2 + \frac{1}{4}H^2 + Z_-Z_+ + \frac{1}{2}H - \frac{1}{2}C + X_1Y_1 + X_2Y_2.$$

となり, $\bar{V}(\Lambda)$ には スカラ $-\frac{1}{4}(\lambda - c)(\lambda + c + 2)$ 倍で作用する.

1.4. Koszul の分解. ここで, 表現論のホモロジー理論についての基本的な結果をまとめておく. $\mathfrak{g}$ をリー超代数, V を $\mathfrak{g}$ -加群 とする. V の射影分解:

$$0 \longleftarrow V \longleftarrow P_0 \longleftarrow P_1 \longleftarrow P_2 \longleftarrow P_3 \longleftarrow \dots$$

がある時, ホモロジー $H_n(\mathfrak{g}, V)$ は 関手 $(\cdot) \otimes_{\mathfrak{g}} \mathbb{C}$ の導来関手として得られる. ここで $\mathbb{C}$ は 自明な $\mathfrak{g}$ -加群である. $\mathfrak{g}$ のグラスマン代数 $\wedge \mathfrak{g}$ は $\mathfrak{g}$ のテンソル代数を

$$\{X \otimes Y + (-1)^{|X||Y|} Y \otimes X \mid X, Y \in \mathfrak{g}, \text{ は斉次} \}$$

から生成される両側イデアルで割ったものとして得られる. $\wedge \mathfrak{g}$ は

$$X(X_1 \wedge \dots \wedge X_n) = \sum_i (-1)^{|X|(|X_1| + \dots + |X_{i-1}|)} X_1 \wedge \dots \wedge [X, X_i] \wedge \dots \wedge X_n$$

で $\mathfrak{g}$ -加群になる.

リー環における Koszul の分解 はよく知られているが, これをリー超代数の圏に拡張することが出来る ([10]).

定理 1.1 (Koszul の分解). $\mathfrak{g}$ をリー超代数とする. 次の式で表される系列 (A, ∂) は, $\mathfrak{g}$ -加群 の圏における自明な加群 $\mathbb{C}$ の射影分解になる.

$$0 \longleftarrow \mathbb{C} \xleftarrow{\partial_{-1}} A_0 \xleftarrow{\partial_0} A_1 \xleftarrow{\partial_1} A_2 \xleftarrow{\partial_2} \dots$$

ただし, $A_n := \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{C}} \wedge^n \mathfrak{g}$, $\partial_{-1}(u) := (u \text{ の定数項 })$,

$$\begin{aligned} \partial_{n-1}(u \otimes X_1 \wedge \dots \wedge X_n) &= \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1+\eta_i} u X_i \otimes X_1 \wedge \dots \wedge \widehat{X_i} \wedge \dots \wedge X_n \\ &\quad + \sum_{h < l} (-1)^{h+l+\eta_h+\eta_l+\xi_h \xi_l} u \otimes [X_h, X_l] \wedge X_1 \wedge \dots \wedge \widehat{X_h} \wedge \dots \wedge \widehat{X_l} \wedge \dots \wedge X_n \end{aligned}$$

($n \geq 1$).

ここで $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$, $X_i \in \mathfrak{g}$, $\xi_i = |X_i|$, $\eta_i = \xi_i(\xi_1 + \dots + \xi_{i-1})$, $\widehat{i}$ は, その添字の文字を抜かすことを意味する. また $\wedge \mathfrak{g}$ を自明な $\mathfrak{g}$ -加群として, A_n に $\mathfrak{g}$ -加群の構造を入れる.

$\mathfrak{g}$ -加群 V が与えられた時, 定理 1.1 の分解に関手 $(\cdot) \otimes V$ を施したものは V の射影分解となる. さらに $(\cdot) \otimes_{\mathfrak{g}} \mathbb{C}$ を行なって, 複体 (B, ∂) :

$$0 \longleftarrow B_0 \xleftarrow{\partial_0} B_1 \xleftarrow{\partial_1} B_2 \xleftarrow{\partial_2} B_3 \xleftarrow{\partial_3} \dots, \quad (1.1)$$

$$B_n = \wedge^n g \otimes V \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \partial_{n-1}(X_1 \wedge \cdots \wedge X_n \otimes v) \\ = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+\eta'_i} X_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{X_i} \wedge \cdots \wedge X_n \otimes X_i v \\ + \sum_{h < l} (-1)^{h+l+\eta_h+\eta_l+\xi_h \xi_l} [X_h, X_l] \wedge X_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{X_h} \wedge \cdots \wedge \widehat{X_l} \wedge \cdots \wedge X_n \otimes v \end{aligned} \quad (1.3)$$

を得る. ここで $u \in \mathcal{U}(g)$, $X_i \in g$, $\xi_i = |X_i|$, $\eta_i = \xi_i(\xi_1 + \cdots + \xi_{i-1})$, $\eta'_i = \xi_i(\xi_{i+1} + \cdots + \xi_n)$ である. V のホモロジー群 $H_n(g, V)$ は, $\text{Ker } \partial_n / \text{Im } \partial_{n+1}$ として定義される.

次の一般的定理は長完全系列の定理として重要である.

定理 1.2. g をリー超代数, $\mathcal{C}$ を g -加群の圏とする. $\mathcal{C}$ における短完全系列

$$0 \longleftarrow T \longleftarrow S \longleftarrow R \longleftarrow 0$$

があった時, $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ を右完全な共変関手とすると, R, S, T 上の F の導来関手は, 次の長完全系列を与える.

$$\begin{aligned} 0 \longleftarrow F(T) \longleftarrow F(S) \longleftarrow F(R) \longleftarrow F_1(T) \longleftarrow F_1(S) \longleftarrow F_1(R) \\ \longleftarrow F_2(T) \longleftarrow F_2(S) \longleftarrow F_2(R) \longleftarrow \cdots \end{aligned}$$

定理 1.3. g と p を, リー超代数とその部分代数とする. p -加群 V について次の自然な同型がある:

$$H_n(g, \text{Ind}_p^g V) \cong H_n(p, V) \quad (n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}).$$

定理 1.4. g をリー超代数, V を g -加群, (B, ∂) を, 定理 1.2 の直前に考えた複体とする. q を g の部分加群とし, 自然数 n に対して写像 $\rho_n : q \rightarrow \text{End } B_n$ を次のように定義する:

$$\rho_n(X)(X_1 \wedge \cdots \wedge X_n \otimes v) = X(X_1 \wedge \cdots \wedge X_n) \otimes v + (-1)^{(\xi_1 + \cdots + \xi_n)|X|} X_1 \wedge \cdots \wedge X_n \otimes Xv.$$

ここで $X \in \mathfrak{q}$, $X_i \in \mathfrak{g}$ は斉次元, $v \in V$, $\xi_i = |X_i|$ である. ρ_n は B_n 上の $\mathfrak{q}$ の表現となり, $\{\rho_n\}$ は $\{\partial_n\}$ と可換, すなわち $\partial_n \circ \rho_{n+1} = \rho_n \circ \partial_n$ が言える.

表現 ρ_n がすべて半単純ならば, ホモロジー $H_n(\mathfrak{g}, V)$ は部分系列 $(B^q, \partial|_{B^q})$ のホモロジー $\text{Ker}(\partial_{n-1}|_{B^q}) / \text{Im}(\partial_n|_{B^q})$:

$$0 \longleftarrow B_0^q \xleftarrow{\partial_0} B_1^q \xleftarrow{\partial_1} B_2^q \xleftarrow{\partial_2} B_3^q \xleftarrow{\partial_3} \dots$$

として得られる. ただし, B_n^q は B_n の $\rho_n(\mathfrak{q})$ -不変な部分空間であり, $\partial_n|_{B^q}$ は略して ∂_n と書くことにする.

証明. $\{\rho_n\}$ と $\{\partial_n\}$ の可換性は, 計算によって示される. 表現 ρ_n は半単純だから, $B_n = B_n^q + B_n'$ (直和), $\partial_n B_{n+1}' \subset B_n'$ となるように $\rho_n(\mathfrak{q})$ -不変部分空間 B_n' をとることができ, 系列 (B, ∂) は2つの系列 $(B^q, \partial|_{B^q})$ と $(B', \partial|_{B'})$ の直和で表される.

次に,

$$s_n(X)(X_1 \wedge \dots \wedge X_n \otimes v) = X \wedge X_1 \wedge \dots \wedge X_n \otimes v$$

で与えられる写像 $s_n(X): B_n \rightarrow B_{n+1}$ を考える. 計算によって $s_{n-1}(X) \circ \partial_{n-1} + \partial_n \circ s_n(X) = \rho_n(X)$ が分かり, $\rho_n(X)$ はホモトピー $s_n(X)$ によって0とホモトープ, つまりホモロジー $H_n(\mathfrak{g}, V)$ 上の0-写像を誘導する. すなわち $X \in \mathfrak{q}$ に対して $\rho_n(X)(\text{Ker } \partial_{n-1}) \subset \text{Im } \partial_n$ である. $\text{Ker } \partial_{n-1}$ の中に ρ_n -不変な $\text{Im } \partial_n$ 加群の補空間 T_n をとる. $\rho_n(X)T_n \subset T_n$ と $\rho_n(X)T_n \subset \text{Im } \partial_n$ より, $\rho_n(X)T_n = (0)$ が言える. よって $T_n \subset B_n^q$. 0でないホモロジーはすべて T_n に代表元を取ることが出来, それは $(B^q, \partial|_{B^q})$ の中に入っている. Q.E.D.

§2. $\mathfrak{sl}(m, n)$ の有限次元既約表現

Kac の一般的定理から次が得られる (古津 [5] 参照).

定理 2.1. $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ -加群 $\overline{V}(\Lambda)$ は,

$$\prod_{1 \leq k \leq n} (\Lambda(H_k) + n - k) \neq 0$$

の時, また, この時のみ既約となる.

系 2.2. $\mathfrak{sl}(2, 1)$ に関しては, $\Lambda = (\lambda, c)$ をウェイトに持つ誘導加群 $\overline{V}(\Lambda)$ が既約になるのは,

$$(\lambda - c)(\lambda + c + 2) \neq 0$$

の時である.

§3. 誘導加群 $\overline{V}(\Lambda)$ を係数に持つホモロジーの計算.

$(\lambda - c)(\lambda + c + 2) = 0$, すなわち $\lambda - c = 0$ または $\lambda + c + 2 = 0$ の時を考えれば十分である. なぜなら, $\neq 0$ の時はカシミール元が $\overline{V}(\Lambda)$ 上自明でない作用をするので, 定理 1.4. により $H_n(\mathfrak{g}, \overline{V}(\Lambda)) = 0$ となるのである.

まず, 定理 1.3 により, §1 で定義した $L(\Lambda)$ について次に同型が成り立つ.

$$H_n(\mathfrak{g}, \overline{V}(\Lambda)) = H_n(\mathfrak{g}, \text{Ind}_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{g}} L(\Lambda)) \cong H_n(\mathfrak{p}, L(\Lambda)) \quad (3.1)$$

ホモロジー $H_n(\mathfrak{p}, L(\Lambda))$ は次の $\mathfrak{p}$ -加群の複体から得られる.

$$0 \longleftarrow B_0 \xleftarrow{\partial_0} B_1 \xleftarrow{\partial_1} B_2 \xleftarrow{\partial_2} B_3 \xleftarrow{\partial_3} \dots \quad (3.2)$$

$B_n = \wedge^n \mathfrak{p} \otimes L(\Lambda)$ である. ただし, 1.1 におけるごとく, $\wedge^n \mathfrak{p}$ は自明な $\mathfrak{p}$ -加群である.

ここで定理 1.4 を $\mathfrak{p} = \mathfrak{g} + \mathfrak{g}_1$ に対して用いる. ただし, $\mathfrak{p}$ の部分代数 $\mathfrak{q}$ は $\mathfrak{g}_0 = \mathbb{C} \cdot C \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ である. $\rho(\mathfrak{q})$ -加群として B_n は

$$B_n = \wedge^n \mathfrak{p} \otimes L(\Lambda) \cong \bigoplus_{a+b=n} \wedge^a \mathfrak{g}_0 \otimes \wedge^b \mathfrak{g}_1 \otimes L(\Lambda) \quad (a = 0, 1, 2, 3, 4, b \in \mathbb{N} \cup \{0\}).$$

なる同型を持つ. $\wedge^a \mathfrak{g}_0 \otimes \wedge^b \mathfrak{g}_1 \otimes L(\Lambda)$ 上の $\rho_n(C)$ の固有値は $-b + c$ となり, $\mathfrak{g}_0$ -不変な元からなる空間 $B_n^{\mathfrak{g}_0}$ は, $-b + c = 0$ を満たす部分空間の直和となる. $\lambda + c + 2 = 0$ の時, $-b + c \neq 0$ であるから, $\lambda - c = 0$ 且つ $-b + c = 0$ の場合のみを考えれば十分である.

B_n 中の $\rho_n(C)$ -不変な元からなる空間 B_n^C より (3.2) の部分複体を構成する.

$$0 \longleftarrow B_{\lambda}^C \xleftarrow{\partial_{\lambda}} B_{\lambda+1}^C \xleftarrow{\partial_{\lambda+1}} B_{\lambda+2}^C \xleftarrow{\partial_{\lambda+2}} B_{\lambda+3}^C \xleftarrow{\partial_{\lambda+3}} B_{\lambda+4}^C \longleftarrow 0. \quad (3.3)$$

$-b + c = 0$ より,

$$B_{\lambda+a}^C = (\wedge^a \mathfrak{g}_0 \otimes \wedge^{\lambda} \mathfrak{g}_1) \otimes L(\Lambda)$$

となる。次に部分代数 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \subset \mathfrak{q} = \mathfrak{g}_0$ の $\wedge^n \mathfrak{p}$ 上の作用を考えると次の $\mathfrak{sl}(2, 1)$ -同型が得られる。

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_0 &\cong \mathbb{C} \oplus V_2, \quad \wedge^2 \mathfrak{g}_0 \cong [2]V_2, \quad \wedge^3 \mathfrak{g}_0 \cong \mathbb{C} \oplus V_2, \quad \wedge^4 \mathfrak{g}_0 \cong \mathbb{C}, \\ \wedge^\lambda \mathfrak{g}_1 &\cong V_\lambda \end{aligned} \quad (3.4)$$

ここに, $[\cdot]$ は重複度を表し, $\mathbb{C}$ は $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ の自明な加群である ($= V_0$)。 $\wedge \mathfrak{g}_0$ の部分空間として,

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}^S(1)_2 &= \langle Z_+, -H, -2Z_- \rangle_{\mathbb{C}}, & \mathcal{Z}^S(0)_0 &= \mathbb{C}, \\ \mathcal{Z}^S(2)_2 &= \langle H \wedge Z_+, -2Z_+ \wedge Z_-, 2H \wedge Z_- \rangle_{\mathbb{C}}, & \mathcal{Z}^C(1)_0 &= \mathbb{C} \cdot C, \\ \mathcal{Z}^C(2)_2 &= \langle C \wedge Z_+, -C \wedge H, -2C \wedge Z_- \rangle_{\mathbb{C}}, & \mathcal{Z}^S(3)_0 &= \langle H \wedge Z_+ \wedge Z_- \rangle_{\mathbb{C}}, \\ \mathcal{Z}^C(3)_2 &= \langle C \wedge H \wedge Z_+, -2C \wedge Z_+ \wedge Z_-, 2C \wedge H \wedge Z_- \rangle_{\mathbb{C}}, & \mathcal{Z}^C(4)_0 &= \langle C \wedge H \wedge Z_+ \wedge Z_- \rangle_{\mathbb{C}} \end{aligned}$$

を与える。これらは 3 次元または自明な $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ -加群で, 生成元はここにあげた通りである。さらに

$$\mathcal{X}_\lambda := \wedge^\lambda \mathfrak{g}_1 = \langle x_i = \frac{1}{(\lambda-i)!} \cdot X_1^{(\lambda-i)} \wedge X_2^{(i)} \mid 0 \leq i \leq \lambda \rangle, \quad (3.5)$$

とすると, これは $\lambda+1$ 次元の $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ -加群となる。複体 (3.3) は $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ -加群の複体として次のように書き直すことが出来る。

$$\begin{aligned} 0 &\longleftarrow \mathcal{X}_\lambda \otimes V_\lambda \longleftarrow \{\mathcal{Z}^C(1)_0 \oplus \mathcal{Z}^S(1)_2\} \otimes \mathcal{X}_\lambda \otimes V_\lambda \\ &\longleftarrow \{\mathcal{Z}^S(2)_2 \oplus \mathcal{Z}^C(2)_2\} \otimes \mathcal{X}_\lambda \otimes V_\lambda \longleftarrow \{\mathcal{Z}^S(3)_0 \oplus \mathcal{Z}^C(3)_2\} \otimes \mathcal{X}_\lambda \otimes V_\lambda \\ &\longleftarrow \mathcal{Z}^S(4)_0 \otimes \mathcal{X}_\lambda \otimes V_\lambda \longleftarrow 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

3.3. テンソル積の中の $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ -不変なベクトルの構成。

補題 3.1. V_n ($n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) を $n+1$ 次元の既約 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ -加群とする。 $k, l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ のとき, 2 つの加群 V_k と V_l のテンソル積は, $\min(k, l)+1$ 個の $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ -加群の直和となる:

$$V_k \otimes V_l = \bigoplus_{0 \leq r \leq \min(k, l)} V_{k+l-2r}.$$

3.4. さて, θ を詳しく見てみることにしよう。

補題 3.2. $Z_i \in \mathfrak{g}_{\bar{0}} (1 \leq i \leq a)$, $\alpha \in \mathcal{X}_\lambda \otimes V(\Lambda)$, とすると

$$\begin{aligned} \partial_{a+\lambda+1}(Z_1 \wedge \cdots \wedge Z_a \otimes \alpha) &= \sum_{1 \leq i \leq a} (-1)^i Z_1 \wedge \cdots \hat{i} \cdots \wedge Z_a \otimes Z_i \alpha \\ &+ \sum_{1 \leq j < k \leq a} (-1)^{j+k} [Z_j, Z_k] \wedge Z_1 \wedge \cdots \hat{j} \cdots \hat{k} \cdots \wedge Z_a \otimes \alpha. \end{aligned} \quad (3.6)$$

詳しい計算は省略するが, $\text{Ker } \partial_{n-1}$ と $\text{Im } \partial_n$ の次元は次のようになる.

n	0	1	2	3	4
$B_{\lambda+n}^{\mathfrak{g}_{\bar{0}}}$	1	2	2	2	1
$\text{Ker } \partial_{\lambda+n-1}$	1	2	1	1	1
$\text{Im } \partial_{\lambda+n}$	0	1	1	0	0

これより次の結果が得られる.

定理 3.3. $\lambda = c$ の時,

$$\dim H_i(\mathfrak{g}, \bar{V}(\Lambda)) = 1 \quad (i = \lambda, \lambda+1, \lambda+3, \lambda+4)$$

$$H_i(\mathfrak{g}, \bar{V}(\Lambda)) = 0 \quad (\text{その他の場合}).$$

となる.

§4. 部分加群 $I(\Lambda)$ を係数に持つホモロジーの計算.

$\bar{V}(\Lambda)$ の極大部分加群 $I(\Lambda)$ のホモロジー $H_n(\mathfrak{g}, I(\Lambda))$ を具体的に計算する. $\bar{V}(\Lambda)$ は $\lambda = c \geq 0$ 或いは $\lambda = -c-2 \geq 0$ のときのみ可約になる.

4.1. 場合 1: $\lambda = c \geq 1$.

$H_n(\mathfrak{g}, I(\Lambda))$ の計算のため, 次の複体を考える.

$$0 \leftarrow I(\Lambda) \leftarrow \mathfrak{g} \otimes I(\Lambda) \leftarrow \wedge^2 \mathfrak{g} \otimes I(\Lambda) \leftarrow \wedge^3 \mathfrak{g} \otimes I(\Lambda) \leftarrow \wedge^4 \mathfrak{g} \otimes I(\Lambda) \leftarrow \cdots.$$

$\mathfrak{g}$ に対して定理 1.4 を使うため, $\mathfrak{q} = \mathfrak{g}_{\bar{0}}$ とし, $\mathfrak{g}$ -加群 $\wedge^n \mathfrak{g} \otimes I(\Lambda)$ の中の $\rho(\mathfrak{g}_{\bar{0}})$ -不変なベクトルを取り出す. ここで注意すべきは, 定理 1.4 においては $\wedge^n \mathfrak{g}$ を自然な $\mathfrak{g}$ -加

群と思っている.

$$\begin{aligned}
V'_{\lambda+1} &:= \langle v'_i := -i(Y_1 \otimes v_{i-1}) + Y_2 \otimes v_i \mid 0 \leq i \leq \lambda+1 \rangle_{\mathbb{C}}, \\
V''_{\lambda} &:= Y_1 Y_2 \otimes L(\Lambda) = \langle v''_i := Y_1 Y_2 \otimes v_i \mid 0 \leq i \leq \lambda \rangle_{\mathbb{C}}, \\
\mathcal{Y}_l &:= \wedge^l \mathfrak{g}_{-1} = \langle y_i := \frac{(-1)^i}{(l-i)!} Y_1^{(i)} \wedge Y_2^{(l-i)} \mid 0 \leq i \leq l \rangle_{\mathbb{C}}, \quad (4.1)
\end{aligned}$$

とおく. これらの空間の $\mathfrak{g}_{\overline{0}}$ -加群としての構造はそれぞれ $L(\lambda+1, 1)$, $L(\lambda, 2)$, $L(l, l)$ となり, また, $I(\Lambda) = V'_{\lambda+1} + V''_{\lambda}$ (直和) である. $\wedge \mathfrak{g}_{\overline{0}} \otimes \mathcal{X}_k \otimes \mathcal{Y}_l \otimes V$ 上の $\rho_n(C)$ の固有値は $V = V'_{\lambda+1}$ の時 $\varepsilon = 1$, $V = V''_{\lambda}$ の時 $\varepsilon = 2$ とすると $-k+l+\varepsilon+\lambda$ であり, これらが $\rho(\mathfrak{g}_{\overline{0}})$ -不変であるためには $-k+l+\varepsilon+\lambda = 0$ でなければならない. そこで,

$$\wedge \mathfrak{g}_{\overline{0}} \otimes \mathcal{X}_{\lambda+l+1} \otimes \mathcal{Y}_l \otimes V'_{\lambda+1} + \wedge \mathfrak{g}_{\overline{0}} \otimes \mathcal{X}_{\lambda+l+2} \otimes \mathcal{Y}_l \otimes V''_{\lambda}.$$

の中で $\rho(\mathfrak{g}_{\overline{0}})$ -不変元を探すことにする.

第一段階. 補題 3.1 及び 同型 (3.4) を考える. $\mathcal{Z}_0$ と $\mathcal{Z}_2$ をそれぞれ 1 次元と 3 次元の $\wedge \mathfrak{g}_{\overline{0}}$ の中の既約 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ -加群とすると, 加群 $\mathcal{Z}_0 \otimes \mathcal{X}_{\lambda+l+1} \otimes \mathcal{Y}_l \otimes V'_{\lambda+1}$ と $\mathcal{Z}_2 \otimes \mathcal{X}_{\lambda+l+2} \otimes \mathcal{Y}_l \otimes V''_{\lambda}$ は $\rho(\mathfrak{g}_{\overline{0}})$ -不変なベクトルを, 定数倍を除いてちょうど 1 本, $\mathcal{Z}_2 \otimes \mathcal{X}_{\lambda+l+1} \otimes \mathcal{Y}_l \otimes V'_{\lambda+1}$ は 2 本持ち, $\mathcal{Z}_0 \otimes \mathcal{X}_{\lambda+l+1} \otimes \mathcal{Y}_l \otimes V''_{\lambda}$ は 1 本も持たないことがいえる.

$$D_n := (\wedge^{\lambda+n} \mathfrak{g} \otimes I(\Lambda))^{\mathfrak{g}_{\overline{0}}}$$

とおくと, 定理 1.4 により, 考慮すべき複体は次のものである.

$$0 \longleftarrow D_1 \xleftarrow{\partial_{\lambda+1}} D_2 \xleftarrow{\partial_{\lambda+2}} D_3 \longleftarrow \dots$$

加群 D_{2l+2} は次の表の 2 列目に挙げる空間の $\mathfrak{sl}(2, 1)$ -不変元である $w(1)$, $w(2)$, $\dots$, $w(8)$ によって張られる.

$w(i)$	加群	最高ウェイト
$w(1)$	$Z^C(1)_0 \wedge \mathcal{X}_{\lambda+l+1} \wedge \mathcal{Y}_l \otimes V'_{\lambda+1}$	$\lambda + 1$
$w(2)$	$Z^S(1)_2 \wedge \mathcal{X}_{\lambda+l+1} \wedge \mathcal{Y}_l \otimes V'_{\lambda+1}$	$\lambda + 1$
$w(3)$	$Z^S(1)_2 \wedge \mathcal{X}_{\lambda+l+1} \wedge \mathcal{Y}_l \otimes V'_{\lambda+1}$	$\lambda + 3$
$w(4)$	$Z^C(2)_2 \wedge \mathcal{X}_{\lambda+l+1} \wedge \mathcal{Y}_{l-1} \otimes V''_{\lambda}$	$\lambda + 2$
$w(5)$	$Z^S(2)_2 \wedge \mathcal{X}_{\lambda+l+1} \wedge \mathcal{Y}_{l-1} \otimes V''_{\lambda}$	$\lambda + 2$
$w(6)$	$Z^C(3)_2 \wedge \mathcal{X}_{\lambda+l} \wedge \mathcal{Y}_{l-1} \otimes V'_{\lambda+1}$	$\lambda + 1$
$w(7)$	$Z^C(3)_2 \wedge \mathcal{X}_{\lambda+l} \wedge \mathcal{Y}_{l-1} \otimes V'_{\lambda+1}$	$\lambda + 3$
$w(8)$	$Z^S(3)_0 \wedge \mathcal{X}_{\lambda+l} \wedge \mathcal{Y}_{l-1} \otimes V'_{\lambda+1}$	$\lambda + 1$

ここで3列目は $\rho(\mathfrak{g}_0)$ -不変部分加群 $\mathcal{X}_p \wedge \mathcal{Y}_q$ の既約部分空間のうち、どれをとって $V'_{\lambda+1}$ 或いは V''_{λ} をテンソルするかをそのウェイトによって特定している。加群 D_{2l+1} の基底も、同様に以下で表される。

$u(i)$	加群	最高ウェイト
$u(1)$	$Z^S(0)_0 \wedge \mathcal{X}_{\lambda+l+1} \wedge \mathcal{Y}_l \otimes V'_{\lambda+1}$	$\lambda + 1$
$u(2)$	$Z^S(1)_2 \wedge \mathcal{X}_{\lambda+l+1} \wedge \mathcal{Y}_{l-1} \otimes V''_{\lambda}$	$\lambda + 2$
$u(3)$	$Z^C(2)_2 \wedge \mathcal{X}_{\lambda+l} \wedge \mathcal{Y}_{l-1} \otimes V'_{\lambda+1}$	$\lambda + 1$
$u(4)$	$Z^C(2)_2 \wedge \mathcal{X}_{\lambda+l} \wedge \mathcal{Y}_{l-1} \otimes V'_{\lambda+1}$	$\lambda + 3$
$u(5)$	$Z^S(2)_2 \wedge \mathcal{X}_{\lambda+l} \wedge \mathcal{Y}_{l-1} \otimes V'_{\lambda+1}$	$\lambda + 1$
$u(6)$	$Z^S(2)_2 \wedge \mathcal{X}_{\lambda+l} \wedge \mathcal{Y}_{l-1} \otimes V'_{\lambda+1}$	$\lambda + 3$
$u(7)$	$Z^C(3)_2 \wedge \mathcal{X}_{\lambda+l} \wedge \mathcal{Y}_{l-2} \otimes V''_{\lambda}$	$\lambda + 2$
$u(8)$	$Z^C(4)_0 \wedge \mathcal{X}_{\lambda+l-1} \wedge \mathcal{Y}_{l-2} \otimes V'_{\lambda+1}$	$\lambda + 1$

今、整数 $l \geq 0$ を 1 つ固定する. D_{2l} の基底 $\{w'(j) | 1 \leq j \leq 8\}$ を, D_{2l+2} の基底 $w(j)$ と同様に定義する. 微分 $\partial_{\lambda+2l+1} : D_{2l+2} \rightarrow D_{2l+1}$ と $\partial_{\lambda+2l} : D_{2l+1} \rightarrow D_{2l}$ は (8×8) -行列で表すことが出来るが, その行列も $\partial_{\lambda+2l+1}$, $\partial_{\lambda+2l}$ と書くことにする.

$w(j) \in D_{2l+2}$ 及び $u(j) \in D_{2l+1}$ の $v'_{\lambda+1}$ や v''_{λ} とテンソルされる $\wedge g$ の元をそれぞれ $s(j)$ と $t(j)$ とすると, それらは次のようにとることが出来る.

$$s(1) = C \wedge \alpha_0$$

$$s(2) = H \wedge \alpha_0 + \frac{2}{\lambda+1} Z_+ \wedge \alpha_1$$

$$s(3) = -2Z_- \wedge \beta_0 + \frac{2}{\lambda+3} H \wedge \beta_1 + \frac{2}{(\lambda+2)(\lambda+3)} Z_+ \wedge \beta_2$$

$$s(4) = -2C \wedge Z_- \wedge \gamma_0 + \frac{2}{\lambda+2} C \wedge H \wedge \gamma_1 + \frac{2}{(\lambda+1)(\lambda+2)} C \wedge Z_+ \wedge \gamma_2$$

$$s(5) = 2H \wedge Z_- \wedge \gamma_0 + \frac{4}{\lambda+2} Z_+ \wedge Z_- \wedge \gamma_1 + \frac{2}{(\lambda+1)(\lambda+2)} H \wedge Z_+ \wedge \gamma_2$$

$$s(6) = 2C \wedge Z_+ \wedge Z_- \wedge \alpha'_0 + \frac{2}{\lambda+1} C \wedge H \wedge Z_+ \wedge \alpha'_1$$

$$s(7) = 2C \wedge H \wedge Z_- \wedge \beta'_0 + \frac{4}{\lambda+3} C \wedge Z_+ \wedge Z_- \wedge \beta'_1 + \frac{2}{(\lambda+2)(\lambda+3)} C \wedge H \wedge Z_+ \wedge \beta'_2$$

$$s(8) = H \wedge Z_+ \wedge Z_- \wedge \alpha'_0$$

$$t(1) = \alpha_0$$

$$t(2) = -2Z_- \wedge \gamma_0 + \frac{2}{\lambda+2} H \wedge \gamma_1 + \frac{2}{(\lambda+1)(\lambda+2)} Z_+ \wedge \gamma_2$$

$$t(3) = C \wedge H \wedge \alpha'_0 + \frac{2}{\lambda+1} C \wedge Z_+ \wedge \alpha'_1$$

$$t(4) = -2C \wedge Z_- \wedge \beta'_0 + \frac{2}{\lambda+3} C \wedge H \wedge \beta'_1 + \frac{2}{(\lambda+2)(\lambda+3)} C \wedge Z_+ \wedge \beta'_2$$

$$t(5) = 2Z_+ \wedge Z_- \wedge \alpha'_0 + \frac{2}{\lambda+1} H \wedge Z_+ \wedge \alpha'_1$$

$$t(6) = 2H \wedge Z_- \wedge \beta'_0 + \frac{4}{\lambda+3} Z_+ \wedge Z_- \wedge \beta'_1 + \frac{2}{(\lambda+2)(\lambda+3)} H \wedge Z_+ \wedge \beta'_2$$

$$t(7) = 2C \wedge H \wedge Z_- \wedge \gamma'_0 + \frac{2}{\lambda+2} C \wedge Z_+ \wedge Z_- \wedge \gamma'_1 + \frac{2}{(\lambda+1)(\lambda+2)} C \wedge H \wedge Z_+ \wedge \gamma'_2$$

$$t(8) = C \wedge H \wedge Z_+ \wedge Z_- \wedge \alpha''_0,$$

ただし,

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \sum a_i x_i \wedge y_{l-i}, \quad a_i = (-1)^i \frac{(\lambda+l-i+1)!}{(l-i)!} \\
\alpha_1 &= \sum a_i^{(1)} x_i \wedge y_{l-i+1}, \quad a_i^{(1)} = (\lambda+1)(-1)^{i+1} \frac{(\lambda+l-i+1)!}{(l-i+1)!} \\
\alpha_2 &= \sum a_i^{(2)} x_i \wedge y_{l-i+2}, \quad a_i^{(2)} = \lambda(\lambda+1)(-1)^i \frac{(\lambda+l-i+1)!}{(l-i+2)!} \\
\\
\beta_0 &= \sum b_i x_i \wedge y_{l-i-1}, \quad b_i = (-1)^i \frac{(i+1)(\lambda+l-i+1)!}{(l-i-1)!} \\
\beta_1 &= \sum b_i^{(1)} x_i \wedge y_{l-i}, \quad b_i^{(1)} = (-1)^i \frac{(\lambda+l-i+1)!}{(l-i)!} \{l-i(\lambda+3)\} \\
\beta_2 &= \sum b_i^{(2)} x_i \wedge y_{l-i+1}, \quad b_i^{(2)} = (-1)^i (\lambda+2) \frac{(\lambda+l-i+1)!}{(l-i+1)!} \{i(\lambda+3) - (\lambda+2l+3)\} \\
\\
\gamma_0 &= \sum c_i x_i \wedge y_{l-i-1}, \quad c_i = (-1)^i \frac{(\lambda+l-i+1)!}{(l-i-1)!} \\
\gamma_1 &= \sum c_i^{(1)} x_i \wedge y_{l-i}, \quad c_i^{(1)} = (-1)^{i+1} (\lambda+2) \frac{(\lambda+l-i+1)!}{(l-i)!} \\
\gamma_2 &= \sum c_i^{(2)} x_i \wedge y_{l-i+1}, \quad c_i^{(2)} = (-1)^i (\lambda+1)(\lambda+2) \frac{(\lambda+l-i+1)!}{(l-i+1)!}
\end{aligned}$$

とする.

第2段階. (8×8) -行列を求める. まず, $\partial_{\lambda+2l+1}$ と $\partial_{\lambda+2l}$ のうち, いくつかの行列要素は 0 になることが分かる. それらは以下に対応するものである.

- (i) $Z(i) \wedge \cdots \longrightarrow Z(j) \wedge \cdots, \quad |i-j| > 1,$
- (ii) $Z^C(i) \wedge \cdots \longrightarrow Z^S(j) \wedge \cdots \quad \forall i, j,$
- (iii) $Z^S(1)_2 \wedge \cdots \longrightarrow Z^S(0)_0 \wedge \cdots$, または $Z^C(2)_2 \wedge \cdots \longrightarrow Z^C(1)_0 \wedge \cdots$,
- (iv) $Z^S(i) \wedge \cdots \longrightarrow Z^C(i-1) \wedge \cdots$,
- (v) $Z^S(i) \longrightarrow Z^C(i-1).$

他の行列要素は次の 6 つの場合に分けて考える.

- | | |
|---|--|
| (1) $(\wedge g_0) \wedge (\wedge g_1) \otimes V'_{\lambda+1}$ | (4) $(\wedge g_0) \wedge (\wedge g_1) \otimes V''_{\lambda}$ |
| (2) $(\wedge g_0) \wedge (\wedge g_1) \otimes V''_{\lambda}$ | (5) $(\wedge g_0) \wedge (\wedge g_1) \wedge (\wedge g_{-1}) \otimes V''_{\lambda}$ |
| (3) $(\wedge g_0) \wedge (\wedge g_1) \otimes V'_{\lambda+1}$ | (6) $(\wedge g_0) \wedge (\wedge g_1) \wedge (\wedge g_{-1}) \otimes V'_{\lambda+1}$ |

下線は、 ∂ の行列要素を計算するのに実際に関与する部分を表している。次に挙げる
(「場合の」) 行列は、どの行列要素がどの場合に対応するかを表す。

$\partial_{\lambda+2l+1}$

$$\begin{pmatrix} \text{ii} & \text{iii} & \text{iii} & i & i & i & i & i \\ \text{ii} & 6 & 6 & \text{ii} & 4 & i & i & i \\ 1 & 1 & 1 & 5 & \text{iv} & 3 & 3 & \text{v} \\ 1 & 1 & 1 & 5 & \text{iv} & 3 & 3 & \text{v} \\ \text{ii} & 1 & 1 & \text{ii} & 5 & \text{ii} & \text{ii} & 3 \\ \text{ii} & 1 & 1 & \text{ii} & 5 & \text{ii} & \text{ii} & 3 \\ i & i & i & 2 & 2 & 6 & 6 & \text{iv} \\ i & i & i & i & i & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\partial_{\lambda+2l}$

$$\begin{pmatrix} 1 & \text{iv} & \text{iii} & \text{iii} & \text{v} & \text{v} & i & i \\ 1 & 5 & \text{ii} & \text{ii} & 3 & 3 & i & i \\ 1 & 5 & \text{ii} & \text{ii} & 3 & 3 & i & i \\ i & 2 & 6 & 6 & \text{iv} & \text{iv} & 4 & i \\ i & 2 & \text{ii} & \text{ii} & 6 & 6 & \text{ii} & i \\ i & i & 1 & 1 & 1 & 1 & 5 & 4 \\ i & i & 1 & 1 & 1 & 1 & 5 & 4 \\ i & i & \text{ii} & \text{ii} & 1 & 1 & \text{ii} & \text{ii} \end{pmatrix}$$

ここで、少し具体的な計算例を挙げる。(1) の場合は $V'_{\lambda+1}$ の部分を考えなくていいので、 $t(1)$ に ∂ をした時の $s'(1)$, $s'(2)$, $s'(3)$ の係数がすなわち行列要素になる。ここで、「'」は、 l の関数に $l-1$ を代入したものを表している。

$$\begin{aligned} \partial t(1) &= \frac{1}{2} \sum (-1)^i \frac{(\lambda+l-i)!}{(l-i-1)!} (\lambda+l+2) C \wedge x_i \wedge y_{l-i-1} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum (-1)^i (\lambda+l-2i) \frac{(\lambda+l-i)!}{(l-i-1)!} H \wedge x_i \wedge y_{l-i-1} \\ &\quad - \sum (-1)^i (i+1) \frac{(\lambda+l-i)!}{(l-i-2)!} Z_- \wedge x_i \wedge y_{l-i-2} \\ &= \frac{1}{2} (\lambda+l+2) s'(1) + \frac{(\lambda+1)(\lambda+l+2)}{2(\lambda+3)} s'(2) + \frac{1}{2} s'(3) \end{aligned}$$

$p_1 = \frac{\lambda+1}{\lambda+3}$, $p_2 = p_2(l) = \frac{\lambda+l+2}{\lambda+3} c$, $p_3 = p_3(l) = \frac{1}{2}(\lambda+l+3)$, $\epsilon = (-1)^\lambda$ とした時、求める行列は次のようになる。

$$\partial_{\lambda+2l+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & -2\epsilon p_1 p_3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -p_1 p'_3 & p'_3 & 0 & 2\epsilon p_2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & p_3 & -\epsilon & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -p_2 & 2p_1 p_2 p_3 & 0 & 2\epsilon p_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -p_1 p_3 & 0 & -\epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p'_3 & p'_3 & \epsilon & -2\epsilon p_1 p'_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2p''_3 & 4p'_2 p'_3 & p''_3 \end{pmatrix}$$

$$\partial_{\lambda+2l} = \begin{pmatrix} p'_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_1 p'_3 & 2\epsilon p_2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \epsilon & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & p'_3 & -\epsilon & 2\epsilon p_1 p'_3 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \epsilon & 2\epsilon p_1 p'_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p'_2 & p_1 p'_2 p'_3 & p''_3 & 0 & -2\epsilon p'_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -p_1 p'_3 & 0 & p'_3 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2p''_3 & 4p'_2 p'_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

この計算は検算の途中であり、最終的なものではないことをお断りしておく。この後、階数等を計算してホモロジーの次元を求めることになる。

§5. 商加群 $V(\Lambda)$ を係数に持つホモロジーの計算。

ウェイト $\Lambda = (\lambda, c)$ を持つ誘導加群 $\bar{V}(\Lambda)$ は §3 で、その極大部分加群 $I(\Lambda)$ は §4 で、それぞれホモロジーが計算される。

そこで、 $T = V(\Lambda)$, $S = \bar{V}(\Lambda)$, $R = I(\Lambda)$ として定理 1.2 を適用する。ここでの長完全系列は、

$$\begin{aligned} 0 \leftarrow V(\Lambda) \leftarrow \bar{V}(\Lambda) \leftarrow I(\Lambda) \leftarrow H_1(\mathfrak{g}, V(\Lambda)) \leftarrow H_1(\mathfrak{g}, \bar{V}(\Lambda)) \leftarrow H_1(\mathfrak{g}, I(\Lambda)) \\ \leftarrow H_2(\mathfrak{g}, V(\Lambda)) \leftarrow H_2(\mathfrak{g}, \bar{V}(\Lambda)) \leftarrow H_2(\mathfrak{g}, I(\Lambda)) \leftarrow \dots \end{aligned}$$

である。このうち 0 でない部分を取り出して $\mathfrak{s}(2, 1)$ -既約加群 $V(\Lambda)$ のホモロジーを計算するわけであるが、現段階では §4 が完成していないので、結果は当日に述べる。

REFERENCES

1. I. N. Bernstein–I. M. Gelfand–S. I. Gelfand, *Differential operators on the base affine space and a study of $\mathfrak{g}$ -modules*, Lie groups and their representations, 1975, pp. 21–64.
2. S. Chemla, *Propriétés de dualité dans les représentations coinduites de superalgèbre de Lie*, Thèse de doctorat: Université Paris 7 (1990).
3. C. Chevalley–S. Eilenberg, *Cohomology theory of Lie groups and Lie algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **63** (1948), 85–124.
4. D. B. Fuks, *Cohomology of infinite dimensional Lie algebras*, Plenum Publishing Corporation, 1986.
5. H. Furutsu, *Representations of Lie superalgebras, II. Unitary representations of Lie superalgebras of type $A(n, 0)$* , J. Math. of Kyoto Univ. **29** (1989), 671–687.
6. V. G. Kac, *Representations of classical Lie superalgebras* (1977), 597–626.
7. V. G. Kac, *Lie superalgebras*, Advances in Math. **26** (1977), 8–96.
8. A. W. Knap, *Lie groups, Lie algebras, and cohomology*, Princeton University Press, 1988.
9. Leites, *Cohomologies of Lie superalgebras*, Funct. Anal. **9** (1975), 340–341.
10. 寺田順子, リー超代数の *cohomological induction*, 京都大学修士論文 (1992).
11. 寺田順子, *Lie superalgebra* の表現と *Cohomology*, 表現論シンポジウム 山形 (1992).