

Chiral Potts 模型に付随した代数と量子群

福島 延久 (Nobuhisa Fukushima)

早稲田大学大学院理工学研究科

1994 年 11 月 17 日

概要

Chiral Potts 模型のボルツマンウェイトを成分とする R -matrix を構成し、関係式 $RLL = LLR$ によりある $\mathbb{C}$ 代数 A を定義する。そして、この A の性質・量子群 $U_q(sl_2)$ ($q^4 = 1$ case) との関連について論じる。

1 Introduction

R.Baxter により, Yang-Baxter 方程式,

$$(1) \quad R_{12}(u-v)R_{13}(u)R_{23}(v) = R_{23}(v)R_{13}(u)R_{12}(u-v) \quad (u, v \in \mathbb{C})$$

の楕円関数解 (すなわち, elliptic R -matrix) が, 8-vertex 模型のボルツマンウェイトを用いて求められた (1972)。これは, 次の式で与えられる:

$$(2) \quad R(u) = \sigma_0 \otimes \sigma_0 + \sum_{\alpha=1}^3 w_{\alpha}(u) \sigma_{\alpha} \otimes \sigma_{\alpha},$$

ただし, σ_{α} は Pauli 行列であり, $w_{\alpha}(u)$ は, 楕円 theta 関数,

$$\vartheta(u; \tau) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{4n})(1 + xq^{4n-2})(1 + x^{-1}q^{4n-2}),$$

$$(\operatorname{Im} \tau > 0, \quad q = e^{\frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}\tau}, \quad x = e^{2\pi\sqrt{-1}u})$$

を使って表示できる。

E.K.Sklyanin は, [6] において, 量子逆散乱法 (quantum inverse scattering method), または ' RLL formalism' と呼ばれる手法を用いて, ある $\mathbb{C}$ 代数 (いわゆる Sklyanin 代数, S) を定義した (1983)。その手法を以下説明しよう。ただし, ここで代数とは, 1 を持つ結合代数とする。 S_{α} ($0 \leq \alpha \leq 4$) を S の生成元, L -operator $L(u) \in \operatorname{End}(\mathbb{C}^2) \otimes S$ が次の形をしているとする:

$$(3) \quad L(u) = \sigma_0 S_0 + \sum_{\alpha=1}^3 w_{\alpha}(u) \sigma_{\alpha} S_{\alpha}.$$

そして, (2), (3) の間に関係式,

$$(4) \quad R(u-v)L_1(u)L_2(v) = L_2(v)L_1(u)R(u-v) \quad \text{for all } u, v$$

を要請する。この時, (4) を代数 S の定義関係式とするのである。実際に (4) 式を書き下すと,

$$(5) \quad \begin{cases} [S_0, S_\alpha]_- = \sqrt{-1} J_{\beta\gamma} [S_\beta, S_\gamma]_+, \\ [S_\alpha, S_\beta]_- = \sqrt{-1} [S_0, S_\gamma]_+ \end{cases}$$

となる。ただし, $J_{\alpha\beta}$ は u, v に依らない定数であり, (α, β, γ) は $(1, 2, 3)$ の cyclic permutation である。このように定義された Sklyanin 代数 S と 量子群 $U_q(sl_2)$ との間には密接な関係がある (cf. [10])。

この, elliptic R -matrix と L -operator から RLL formalism により構成される quantum algebra の研究が進んでいる: Belavin 模型の R -matrix については [9]; R -matrix の無限次元化については [7], [8]; 代数の無限次元表現については [11], [12]。いずれの場合も, 楕円関数の性質と深く関連している。

それならば, ‘elliptic R -matrix 以外の R -matrix を作り, 量子逆散乱法により代数 A を構成できれば, それもまた興味深い研究対象になるのではないか’ という発想が, この研究の出発点となった。そして, Chiral Potts 模型がその答を与えてくれるのである。なぜなら, この模型のボルツマンウェイトは, 高種数の代数曲線を用いて表示されるからである (Au-Yang, Perk [1])。そして, そのボルツマンウェイトの間に Star-Triangle 関係式が成立することが重要なポイントとなる。

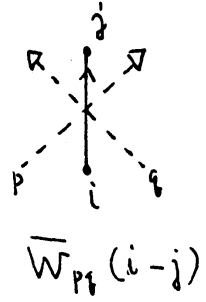
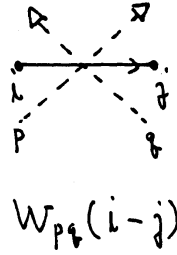
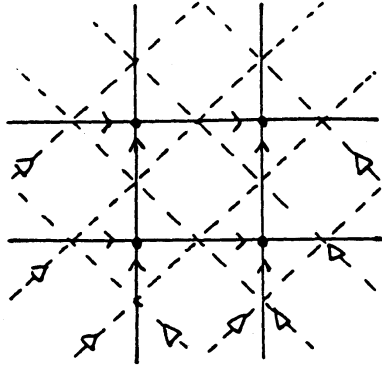
この報告は次の構成で書かれている。section 2 では, Chiral Potts 模型について [1] の結果を述べる。section 3 で新しい R -matrix を構成し, section 4 では, $N = 2$ & self-dual Chiral Potts 模型の場合に RLL formalism により代数 A を定義し, その性質を述べる。そして section 5 において, A と 量子群 $U_q(sl_2)$ との対応を考察する。

2 Chiral Potts 模型

p, q, r : ある代数曲線上の点,
 $(a, b, c, d) = (a_p, b_p, c_p, d_p)$ etc. : パラメータ (p, q, r に依存する),
 (混乱の恐れのない限り, 添字 p, q, r は省略する)
 $N \in \mathbb{N}, i, j, k, l, n \in \mathbb{Z}_N,$
 $\omega := e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N}}$

とする。

Chiral Potts 模型とは, 周期 N の正方格子上に定義される統計物理の模型のひとつである。そしてこの模型には, 下図のように 2 種類のボルツマンウェイト $W_{pq}(n)$, $\overline{W}_{pq}(n)$ を edge 上に定めることができる:



また、そのパラメータ表示は次式で与えられる:

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{W_{pq}(n)}{W_{pq}(0)} = \prod_{j=1}^n \left(\frac{d_p b_q - a_p c_q \omega^j}{b_p d_q - c_p a_q \omega^j} \right), \\ \frac{\overline{W}_{pq}(n)}{\overline{W}_{pq}(0)} = \prod_{j=1}^n \left(\frac{\omega a_p d_q - d_p a_q \omega^j}{c_p b_q - b_p c_q \omega^j} \right). \end{cases}$$

ただし、 k, k' を $k^2 + k'^2 = 1$ なる p, q に依らない定数として、パラメータ (a, b, c, d) は次式を満たす:

$$(7) \quad \begin{cases} a^N + k' b^N = k d^N, \\ k' a^N + b^N = k c^N. \end{cases}$$

(7) 式が表す曲線の genus g は,

$$g = N^2(N-2) + 1$$

であることがわかっている。よって、このボルツマンウェイトを用いて、‘高種数の代数曲線に関連した R -matrix’ を定めることができるのである。

Remark 1 (7) 式において、*self-dual limit* と呼ばれる極限を取ると、

$$(8) \quad \begin{cases} a^N + b^N = 1, \\ c = d = 1 \end{cases}$$

となる ($g = \frac{(N-1)(N-2)}{2}$)。この時、(6) 式は、

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{W_{pq}(n)}{W_{pq}(0)} = \prod_{j=1}^n \left(\frac{b_q - a_p \omega^j}{b_p - a_q \omega^j} \right), \\ \frac{\overline{W}_{pq}(n)}{\overline{W}_{pq}(0)} = \prod_{j=1}^n \left(\frac{\omega a_p - a_q \omega^j}{b_q - b_p \omega^j} \right) \end{cases}$$

となるが, 実は, $\mathbb{Z}_N$ 上の Fourier 変換,

$$\hat{f}(m) := \sum_{k \in \mathbb{Z}_N} \omega^{mk} f(k)$$

により, (9) の 2 式の間には,

$$\widehat{W}_{pq}(n) = W_{pq}(n)$$

なる関係式が成立することがわかる。この意味で *self-dual* というのである。

Chiral Potts 模型のボルツマンウェイト (6) を用いて新しい R -matrix をつくる時, $W_{pq}(n)$, $\overline{W}_{pq}(n)$ の間に Star-Triangle 関係式と呼ばれる関係式が成立することが, 本質的な役割を果たす。それをまとめておこう:

Theorem 1 (*Au-Yang and Perk [1]*) ボルツマンウェイト $W_{pq}(n)$, $\overline{W}_{pq}(n)$ は, (6), (7) 式を満たすとする。この時,

$$W_{pq}(n+N) = W_{pq}(n), \quad \overline{W}_{pq}(n+N) = \overline{W}_{pq}(n)$$

であり, *Star-Triangle* 関係式 (*STR*),

$$(10) \quad \sum_{l=1}^N \overline{W}_{pq}(l-k) W_{pr}(i-l) \overline{W}_{qr}(j-l) = R_{pqr} W_{pq}(i-j) \overline{W}_{pr}(j-k) W_{qr}(i-k)$$

が成立する。ただし, R_{pqr} は i, j, k には依らない数である。

3 高種数の代数曲線に関連した R -matrix

$W_{pq}(n)$, $\overline{W}_{pq}(n)$ を行列成分とする新しい R -matrix の定義に入ろう。

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i \equiv j \pmod{N}, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

とする。 $V = \mathbb{C}^N$ として, 行列 $R \in \text{End}(V^{\otimes 2})$ を次で定義する:

$$(11) \quad R(p, q) := \sum_{i, j, k, l \in \mathbb{Z}_N} R_{ij}^{kl}(p, q) E_{ik} \otimes E_{jl}.$$

ただし,

$$\begin{cases} R_{ij}^{kl}(p, q) := \overline{W}_{pq}(j-k) W_{pq}(i+j) \delta_{i+j, k+l}, \\ E_{ij} \text{ は行列単位} \end{cases}$$

である。

Proposition 1 *STR (10) が成立しているとする。この時, (11) は, Yang-Baxter 方程式 (YBE) を満たす。すなわち,*

$$(12) \quad R_{12}(p, q)R_{13}(p, r)R_{23}(q, r) = R_{23}(q, r)R_{13}(p, r)R_{12}(p, q) \quad \text{on } \text{End}(V^{\otimes 3})$$

が成立する。ただし, $R = \sum R_{ij}^{kl} E_{ik} \otimes E_{jl}$ の時, I を単位行列として,

$$\begin{cases} R_{12} = \sum R_{ij}^{kl} E_{ik} \otimes E_{jl} \otimes I, \\ R_{13} = \sum R_{ij}^{kl} E_{ik} \otimes I \otimes E_{jl}, \\ R_{23} = \sum R_{ij}^{kl} I \otimes E_{ik} \otimes E_{jl} \end{cases}$$

である。

また, $X, Y \in \text{End}(V)$ を次のように取る:

$$X := \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \omega & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega^{N-1} \end{pmatrix}, \quad Y := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix},$$

$$(YX = \omega XY, X^N = Y^N = I).$$

Proposition 2 *R-matrix (11) は, 次のように書き換えることができる:*

$$(13) \quad R(p, q) = \frac{1}{N} \sum_{\alpha, \alpha', \beta, \beta' \in \mathbb{Z}_N} \left\{ \omega^{(\alpha+\beta)(\alpha'-\beta')} \widehat{W}_{pq}(\beta) \overline{W}_{pq}(\beta') \right. \\ \left. \times (X^{-\alpha-2\beta} Y^{-\alpha'} \otimes X^{\alpha} Y^{\alpha'}) \right\}.$$

ただし, $\widehat{W}_{pq}$ は Fourier 変換,

$$\widehat{W}_{pq}(m) = \frac{1}{N} \sum_{k \in \mathbb{Z}_N} \omega^{mk} W_{pq}(k)$$

である。

Remark 2 *R-matrix (13) のスペクトルパラメータ p, q, r の間には, 「差法性」(すなわち, R がパラメータの差の関数になる) は成立しない。この点で, elliptic R-matrix の場合とは異なっている。*

4 Chiral Potts 模型に付随した代数 $\mathcal{A}$ の構成

$\{S_{\alpha\alpha'}\}_{0 \leq \alpha, \alpha' \leq N-1}$ を, ある $\mathbb{C}$ 代数 $\mathcal{A}$ の生成元とする。次に, R -matrix (13) に対して, L -operator $L(p, q) (\in \text{End}(V) \otimes \mathcal{A})$ が, Sklyanin 代数 ([6]) の場合と同様に, 次の形をしていると仮定しよう:

$$(14) \quad L(p, q) := \frac{1}{N} \sum_{\alpha, \alpha', \beta, \beta' \in \mathbb{Z}_N} \left\{ \omega^{(\alpha+\beta)(\alpha'-\beta')} \widehat{W}_{pq}(\beta) \overline{W}_{pq}(\beta') X^{-\alpha-2\beta} Y^{-\alpha'} S_{\alpha\alpha'} \right\}.$$

そして, R -matrix (13) と L -operator (14) の間に, 次の 2 次の関係式を課す:

$$(15) \quad R(p, q) L_1(p, r) L_2(q, r) = L_2(q, r) L_1(p, r) R(p, q) \quad \text{for all } p, q, r.$$

ただし, $L_1 = L \otimes I$, $L_2 = I \otimes L$ ($L_1, L_2 \in \text{End}(V^{\otimes 2}) \otimes \mathcal{A}$) である。

以下, 話を $N = 2$ の場合に限定する (すなわち, $\omega = -1$)。

さらに, self-dual の場合, (8), (9) 式から,

$$\begin{cases} \frac{W_{pq}(1)}{W_{pq}(0)} = \frac{\cos \theta_p + \sin \theta_q}{\sin \theta_p + \cos \theta_q}, \\ \frac{\overline{W}_{pq}(1)}{\overline{W}_{pq}(0)} = \frac{-\cos \theta_p + \cos \theta_q}{\sin \theta_p + \sin \theta_q} \end{cases}$$

とパラメータ表示できることがわかる。STR (10) を用いて explicit な計算を実行することにより, 次の定理が得られる:

Theorem 2 $N = 2$, かつ self-dual の時, (15) は次と同値:

$$\begin{aligned} (16) \quad & [S_{00}, S_{01}]_- = [S_{10}, S_{11}]_+, \\ (17) \quad & [S_{00}, S_{01}]_+ = [S_{10}, S_{11}]_-, \\ (18) \quad & [S_{00}, S_{10}]_- = -[S_{01}, S_{11}]_+, \\ (19) \quad & [S_{00}, S_{10}]_+ = -[S_{01}, S_{11}]_-, \\ (20) \quad & [S_{00}, S_{11}]_- = 0, \\ (21) \quad & [S_{00}, S_{11}]_+ = -[S_{01}, S_{10}]_-. \end{aligned}$$

ただし, $[A, B]_{\pm} = AB \pm BA$ である。

Remark 3 上記 (16) ~ (21) 式のうち, (16), (20) 以外は, non self-dual case でも成立している。

そして, $\mathbb{C}$ 代数 $\mathcal{A}$ を,

- 生成元: $\{S_{\alpha\alpha'}\}_{0 \leq \alpha, \alpha' \leq 1}$
- 関係式: (16) ~ (21)

として定義する。

Remark 4 *self-dual case* では, 定義関係式がパラメータ p, q, r には依存していない。

次に, この代数 $\mathcal{A}$ の性質について考察しよう。

まず, 関係式 (16) ~ (21) は, S_{00} と S_{11} を入れ換えても変わらない。また, (16) ~ (21) を簡単のため次のように書き換えておこう:

$$(22) \quad \begin{cases} S_{00}S_{01} = S_{10}S_{11}, \\ S_{01}S_{00} = -S_{11}S_{10}, \\ S_{00}S_{10} = -S_{01}S_{11}, \\ S_{10}S_{00} = S_{11}S_{01}, \\ S_{00}S_{11} = S_{11}S_{00}, \\ 2S_{00}S_{11} = -[S_{01}, S_{10}]. \end{cases}$$

次に, 構成から明らかなように, この代数 $\mathcal{A}$ には fundamental 表現 $S_{\alpha\alpha'} \mapsto X^\alpha Y^{\alpha'}$, すなわち,

$$(23) \quad \begin{cases} S_{00} \mapsto X^0 Y^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & S_{01} \mapsto X^0 Y^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ S_{10} \mapsto X^1 Y^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, & S_{11} \mapsto X^1 Y^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

が必ず存在する。よって,

$$(24) \quad \begin{cases} S_{00} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, & S_{01} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ S_{10} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, & S_{11} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

もまた, (23) とは非同値な 2 次元表現となる。これ以外の有限次元表現はまだ見つからない。

そして, Jacobi identity と mixed Jacobi identity を使うと,

$$S_{00}^2 - S_{11}^2, \quad S_{01}^2 + S_{10}^2$$

が $\mathcal{A}$ の center に属することがわかる。また, (22) から,

$$S_{\alpha\alpha'}^2 \quad (\alpha, \alpha' = 0, 1)$$

が可換であることもわかる。

5 $\mathcal{A}$ と量子群 $U_q(sl_2)$

(22) 式において,

$$(25) \quad E_{\pm} := \frac{1}{\sqrt{2}}(S_{01} \pm S_{10}), \quad S_{\pm} := \frac{1}{\sqrt{2}}(S_{00} \pm S_{11})$$

とおく。(22) を用いて $E_{\pm}$, $S_{\pm}$ の間に成り立つ関係式を求めると, $\varepsilon, \varepsilon' = \pm$ として,

$$(26) \quad S_{\varepsilon'} E_{\varepsilon} = -\varepsilon \varepsilon' E_{-\varepsilon} S_{\varepsilon'},$$

$$(27) \quad [E_+, E_-]_- = S_+^2 - S_-^2$$

が得られる。また, (26) 式から,

$$(28) \quad S_{\varepsilon'}^2 E_{\varepsilon} = -E_{\varepsilon} S_{\varepsilon'}^2,$$

も導ける。ここで, S_{00} と S_{11} が可換であることから, S_+ と S_- も可換である。そこで,

$$(29) \quad (S_+ S_-)^2 = 1$$

と仮定しよう。 $K := S_+^2$ と置き換えると, (27), (28), (29) 式は,

$$(30) \quad \begin{cases} K E_{\pm} K^{-1} = -E_{\pm}, \\ [E_+, E_-]_- = K - K^{-1}, \\ K K^{-1} = K^{-1} K = 1 \end{cases}$$

となる。よって, $q := \sqrt{-1}$ とし,

$$E_+ \mapsto z_1 E_+, \quad E_- \mapsto z_2 E_-, \quad (z_1 z_2 = 2\sqrt{-1} = q - q^{-1})$$

と scaling すれば (30) は,

$$(31) \quad \begin{cases} K E_{\pm} K^{-1} = q^{\pm 2} E_{\pm}, \\ [E_+, E_-]_- = \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}}, \\ K K^{-1} = K^{-1} K = 1 \end{cases}$$

となり, $U_q(sl_2)$ の定義関係式に一致する。したがって, $\mathcal{A}$ と, q が 1 の 4 乗根の場合の $U_q(sl_2)$ の間に関連があることがわかった。

次に, $\mathcal{A}$ の fundamental 表現 (23) から得られる表現について考察しよう。(23) と (25) から,

$$E_+ \mapsto \frac{z'_1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad E_- \mapsto \frac{z'_2}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad K \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

(ただし, $z'_1 z'_2 = \frac{1}{2\sqrt{-1}}$)

が得られるが, K を対角化すれば,

(32)

$$E_+ \mapsto \frac{z'_1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 - q^{-1} \\ 1 - q & 0 \end{pmatrix}, \quad E_- \mapsto \frac{z'_2}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 - q \\ 1 - q^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad K \mapsto \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q^{-1} \end{pmatrix}$$

となり, q が 1 の巾根のときのみ現れる, 連続パラメータを含む $U_q(sl_2)$ の表現が構成される (cf. [13], [14])。

6 今後の課題

- $N = 2$ & non-self dual の場合の $\mathcal{A}$ はどのような関係式で定義されるか (パラメータ p, q, r に依存するかどうか)。 $\mathcal{A}$ の (23) 以外の表現の構成。
- $N = 2$ の場合, discrete Sine-Gordon 模型との関連はどうなるか (京大理 神保道夫先生からの御教示)。
- N 一般の場合。特に, $U_q(sl_n)$ ($q^{2N} = 1$) と, どのような関連があるか。

7 Acknowledgements

指導教官として, 数々の貴重な御助言をいただいた上野喜三雄先生, 途中の段階で話を聞いていただき, よきアドバイスをしてくれた E.K.Sklyanin 先生, A.A.Kirillov 先生, 野海正俊先生, 武部尚志氏, 杉谷哲也氏, 他の分野との関連を示唆していただいた神保道夫先生, そして, 研究集会等で私との議論につきあってくれた庵原謙治氏, に感謝の意を表します。

参考文献

- [1] H.Au-Yang and J.H.H.Perk, *Onsager's Star-Triangle Equation: Master Key to Integrability*, in *Advanced Studies in Pure Mathematics* (Academic Press, 1989), Vol.19, pp.57-94.
- [2] R.J.Baxter, J.H.H.Perk and H.Au-Yang, *New solutions of the Star-Triangle relations for the Chiral Potts model*, *Phys. Lett.*, 128A, (1988), 138-142.
- [3] V.V.Bazhanov and Yu.G.Stroganov, *Chiral Potts Model as a Descendant of the Six-Vertex Model*, *J. Stat. Phys.*, 59, (1990), 799-817.
- [4] E.Date, M.Jimbo, K.Miki and T.Miwa, *Generalized Chiral Potts Models and Minimal Cyclic Representations of $U_q(\widehat{\mathfrak{gl}}(n, \mathbb{C}))$* , *Comm. Math. Phys.*, 137, (1991), 133-147.

- [5] V.V.Bazhanov and R.J.Baxter, *New Solvable Lattice Models in Three Dimensions*, J. Stat. Phys., 69, (1992), 453–485.
- [6] E.K.Sklyanin, *Some Algebraic Structures Connected with the Yang-Baxter Equation*, Funct. Anal. Appl., 16, (1983), 267–270; 17, (1984), 273–284.
- [7] Y.Shibukawa and K.Ueno, *Completely $\mathbb{Z}$ Symmetric R Matrix*, Lett. Math. Phys., 25, (1992), 239–248.
- [8] Y.Shibukawa and K.Ueno, *Infinite-dimensional R matrix with complete $\mathbb{Z}$ symmetry*, in Quantum groups, integrable statistical models and knot theory (Singapore: World Scientific, 1993), pp.302–318.
- [9] K.Hasegawa, *L -operator for Belavin's R -matrix acting on the space of theta functions*, J. Math. Phys., 35, (1994), (to appear).
- [10] E.Vayslev, *Infinite-Dimensional $\ast$ -Representations of the Sklyanin Algebra and of the Quantum Algebra $U_q(\mathfrak{sl}(2))$* , Selecta Mathematica Sovietica, Vol.12, No.1, (1993), 57–72.
- [11] O.Foda, K.Iohara, M.Jimbo, R.Kedem, T.Miwa and H.Yan, *An Elliptic Quantum Algebra for $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$* , RIMS-974 (preprint), (1994)
- [12] O.Foda, K.Iohara, M.Jimbo, R.Kedem, T.Miwa and H.Yan, *Notes on Highest Weight Modules of the Elliptic Algebra $\mathcal{A}_{q,p}(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$* , RIMS-979 (preprint), (1994)
- [13] 神保道夫, 量子群とヤン・バクスター方程式,
シュプリンガー・フェアラーク東京 (1990)
- [14] M.Jimbo, *Topics from Representations of $U_q(\mathfrak{g})$ —An Introductory Guide to Physicists*, in Quantum group and quantum integrable systems (World Scientific, 1992), pp.1–61.
- [15] R.J.Baxter, *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics*, Academic Press, London, (1982).
- [16] D.Mumford, *Tata Lectures on Theta I*, Progress in Mathematics 28, Birkhäuser, (1983).