

p -進体上の GL_n の既約 SUPERCUSPIDAL 表現とその指標

大阪府立大・総合科学 高橋 哲也 (TETSUYA TAKAHASHI)

この講演は2年前の表現論シンポジウムでの池田氏の講演の続編で主に $GL_l(l: \text{素数})$ の supercuspidal 表現について解説する。

1. SUPERCUSPIDAL 表現の定義と性質

$\underline{G}$ を p -進体 F 上の連結な reductive 代数群とし、 $\underline{G}$ の F -valued points のなす群 $\underline{G}(F)$ を G で表す。このとき、 G は TDLC (totally disconnected locally compact) 群である。即ち、 G は locally compact group で G の単位元の任意の近傍が compact open subgroup を含む。以下、TDLC 群の表現論の基本的な用語について復習する。

G の表現とは、 $\mathbb{C}$ 上の vector space V と、準同型 $\pi: G \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{C}}(V)$ の組 (π, V) のこととする。

Definition 1.1. (admissible 表現) G の表現 (π, V) が、以下の条件を満たすとき admissible であるという。

- (1) 任意の V の元 v に対して、

$$G_v = \{g \in G \mid \pi(g)v = v\}$$

が G の open subgroup.

- (2) 任意の G の compact open subgroup K に対し

$$V^K = \{v \in V \mid \pi(k)v = v \text{ for all } k \in K\}$$

が、有限次元ベクトル空間になる。

$\underline{P}$ を $\underline{G}$ の F -上定義された parabolic subgroup, $\underline{P} = \underline{M}\underline{N}$ をその Levi 分解とすると、 $\underline{M}$ は、連結な reductive 代数群になる。 $P = \underline{P}(F)$, $M = \underline{M}(F)$, $N = \underline{N}(F)$ と置き 以下単に P を G の parabolic subgroup, $P = MN$ をその Levi 分解と呼ぶ。

G の admissible 表現 (π, V) に対し $V(N)$ を $\{\pi(n)v - v \mid n \in N, v \in V\}$ で生成される V の部分空間と定義する。 $V(N)$ は V の M -invariant subspace である。

Definition 1.2. (Jacquet-module & Jacquet-functor) $V_N = V/V(N), v \in V$ の V_N における image を $\bar{v}$ とおく。 M の表現 (π_N, V_N) を

$$\pi_N(m)\bar{v} = \delta_P(m)^{-\frac{1}{2}} \overline{\pi(m)v}$$

で定義する。 (π_N, V_N) を (π, V) の P に関する Jacquet module という。

次の Proposition は、 p -進体上の reductive 代数群の表現論において基本的なものである。

Proposition 1.3 (Jacquet[10]). (π, V) が *admissible* $\implies (\pi_N, V_N)$ が *admissible*

Definition 1.4. (supercuspidal 表現) G の *admissible representation* (π, V) が任意の G の parabolic subgroup $P = MN \neq G$ に対して $V_N = (0)$ となるときの supercuspidal 表現という。

Proposition 1.5 (Jacquet[10]). (π, V) が *supercuspidal* $\iff (\pi, V)$ の任意の *matrix coefficient* $f_{v, \tilde{v}} (v \in V, \tilde{v} \in \tilde{V})$ が *compactly supported modulo center* Z of G

ここで、 $(\tilde{\pi}, \tilde{V})$ は、 (π, V) の *contragredient representation*, (π, V) の *matrix coefficient* $f_{v, \tilde{v}}$ は、 $f_{v, \tilde{v}}(g) = \langle \pi(g)v, \tilde{v} \rangle$ で定義される G の関数である。

Theorem 1.6 (Jacquet[10]). (π, V) を G の既約 *admissible* 表現とする。このとき、 G の parabolic subgroup $P = MN$ と M の既約 supercuspidal 表現 (σ, U) で、 (π, V) が $\text{Ind}_P^G(\sigma)$ の *subrepresentation* となるものが存在する。但し

$$\text{Ind}_P^G(\sigma) = \{f : G \rightarrow U \mid f \text{ smooth on } G \text{ and } f(nmg) = \delta_P^{\frac{1}{2}}(m)\sigma(m)f(g)\}.$$

(G は、 *right translation* で作用)

この定理により、 G の既約 *admissible* 表現 の分類は、 G の 既約 supercuspidal 表現 の分類と、 G の parabolic subgroup $P = MN$ に対し、 M の 既約 supercuspidal 表現 σ の G への parabolic induction の既約成分を求めることに、還元される。一般の reductive 代数群に対しては、どちらも判っていないが、 $G = GL_n(F)$ の時は、どちらもわかっている。

次に、 (π, V) の character を定義する。 G の Hecke 環 $\mathcal{H}(G)$ を

$$\mathcal{H}(G) = \{f : G \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ locally constant, compactly supported}\}$$

$\mathcal{H}(G)$ の V への作用を

$$(\pi(f)v = \int_G f(g)\pi(g)v dg$$

と定義する。 G の compact open subgroup K に対し、

$$\mathcal{H}(G, K) = \{f \in \mathcal{H}(G) \mid f(k_1 g k_2) = f(g) \text{ for all } k_1, k_2 \in K\}$$

と置く。この時、

$$\mathcal{H}(G) = \bigcup_K \mathcal{H}(G, K)$$

が成り立つ。 $f \in \mathcal{H}(G)$ とすると、 G の compact open subgroup K で、 $f \in \mathcal{H}(G, K)$ となるものが存在する。このとき、 $\pi(f)V \subset V^K$ で、 $\dim V^K < \infty$ 。よって、 $\text{tr } \pi(f)$ が定義できる。 G 上の distribution

$$f \mapsto \text{tr } \pi(f)$$

を π の character という。

Proposition 1.7 (Harish-Chandra[7]). (π, V) を G の既約 *admissible* 表現、 G' を G の *regular semisimple element* の成す G の部分集合とする。 $f \in \mathcal{H}(G), \text{Supp}(f) \subset G'$ に対して、

$$\text{tr } \pi(f) = \int_G \chi_\pi(g) f(g) dg$$

を満たす G' 上の *locally constant function* χ_π が存在する。

(π, V) の character と Jacquet-module の character の間には次の関係が知られている。

Proposition 1.8 (Casselman[4]). (π, V) が既約 *admissible* 表現の時、 $g \in G'$ に対して g をその *Levi part* に含む G の *parabolic subgroup* $P=MN$ の中で、 *minimal* なもののうちで、

$$\chi_\pi(g) = \delta_P^{\frac{1}{2}}(g) \chi_{\pi_N}(g)$$

となるものが存在する。実際、 P は g によって *explicit* に書ける。

(π, V) が *supercuspidal* ならば、 $V_N = (0)$ だから、

Corollary 1.9. (π, V) が既約 *supercuspidal* 表現のとき、 χ_π の support は G の *elliptic regular element* の成す集合に含まれる。

2. 既約 SUPERCUSPIDAL 表現の構成

G の既約 supercuspidal 表現については、次の予想が広く信じられている。

Conjecture 2.1. G の既約 supercuspidal 表現 (π, V) に対し、 G の compact modulo center subgroup K と K の既約 admissible 表現 σ で

$$\pi = \text{ind}_K^G \sigma$$

となるものが存在する。但し、 $\text{ind}_K^G \sigma$ は、 $\text{Supp}(f)$ が、 $H \backslash G$ において、compact となる f のなす $\text{Ind}_K^G(\sigma)$ の subrepresentaion

近年、Bushnell-Kutzko[2] によって、この予想は、 $G = GL_n(F)$ の時、成り立つことが証明された。ここでは、 n が素数 l に等しい時に、その構成について述べる。まず、記号を準備する。

F の maximal order を $\mathcal{O}_F$, $\mathcal{O}_F$ の maximal ideal を P_F , ϖ_F を $\mathcal{O}_F$ の素元, k_F を F の剰余体, q をその位数, v_F を $v_F(\varpi_F) = 1$ と正規化された F の valuation, ψ を F の additive character で、 $\psi(\mathcal{O}_F) \neq \{1\}$, $\psi(P_F) = \{1\}$ となるものとする。

$G = GL_l(F)$, $K = GL_l(\mathcal{O}_F)$ (maximal compact subgroup), $R_i = M_l(P_F^i)$ ($i \in \mathbb{Z}$), $K_i = 1 + R_i$ ($i \geq 1$) と置く。この時、 $F^\times K$ は、 G の maximal compact modulo center subgroup で、 K_i は、 $F^\times K$ の正規部分群。また、

$$A = \{(a_{ij}) \in M_l(\mathcal{O}_F) \mid a_{ij} \in \mathcal{O}_F (i \leq j), a_{ij} \in P_F (i > j)\},$$

$$B = A^\times \text{ (Iwahori subgroup),}$$

$$z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ \varpi_F & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (z^l = \varpi_F),$$

$Z = \langle z \rangle$ (z で生成される巡回群), $A_i = z^i A$ ($i \in \mathbb{Z}$), $B_i = 1 + A_i$ ($i \geq 1$) と置く。このとき、 ZB は、 G の maximal compact modulo center subgroup で、 B_i は、 ZB の正規部分群。また、 G の任意の maximal compact modulo center subgroup は $F^\times K$ か ZB に共役になる。

- (1) (ZB の既約表現) $n > 1$ を $(1 - n, l) = 1$ となる整数とする。 E を F の l 次分岐拡大体とし、 E を $M_l(F)$ に埋め込んで考える。(この埋め込みは、up to conjugate で unique.) $E^\times \subset ZB$ としてよい。 $\gamma \in E$ を、 $v_E(\gamma) = 1 - n$ となるようにとる。

$1+x \in K_{[(n+1)/2]}$ に対して、 $\psi_\gamma(1+x) = \psi(\text{tr}(\gamma x))$ (tr は普通の行列のトレース) と定義すると、 ψ_γ は、 $K_{[(n+1)/2]}$ の 1 次元表現になり、 K_n 上 trivial. ($[\]$ はガウス記号). このとき、 ψ_γ の ZB における normalizer

$$H_\gamma = \{g \in ZB \mid \psi_\gamma(g^{-1}xg) = \psi_\gamma(x) \quad x \in B_{[(n+1)/2]}\}$$

は、 $E^\times B_{[n/2]}$ に等しくなる。 $H = E^\times B_{[(n+1)/2]}$ とおき、 $E^\times$ の 1 次元表現 θ で、 $\theta(1+x) = \psi(\text{tr}_{E/F} \gamma x)$ for $x \in H \cap E^\times = 1 + P_E^{[(n+1)/2]}$ を満たすものに対して、 H の 1 次元表現 $\rho_{\theta,\gamma}$ を

$$\rho_{\theta,\gamma}(xg) = \theta(x)\psi_\gamma(g)$$

for $x \in E^\times, g \in B_{[(n+1)/2]}$ と定義する。

(a) n : 偶数の時 ($l=2$ なら $(2, 1-n) = 1$ より全てこのケース)

$n = 2m$ とおくと $B_{[(n+1)/2]} = B_{[n/2]} = B_m, H = H_\gamma$. このとき、

$$\kappa_{\theta,\gamma} = \text{Ind}_H^{ZB} \rho_{\theta,\gamma} \quad \text{and} \quad \pi_{\theta,\gamma} = \text{ind}_{ZB}^G \kappa_{\theta,\gamma}$$

と定義すると、 $\kappa_{\theta,\gamma}$ は、 ZB の既約表現、 $\pi_{\theta,\gamma}$ は、 G の既約 supercuspidal 表現になる。

(b) n : 奇数の時

$n = 2m+1$ とおくと $B_{[(n+1)/2]} = B_{m+1}, B_{[n/2]} = B_m, H \neq H_\gamma$. このとき、 $\text{Ind}_H H_\gamma \rho_{\theta,\gamma}$ の既約成分 $\rho'_{\theta,\gamma}$ で、

$$\chi_{\rho'_{\theta,\gamma}}(\gamma) = \theta(\gamma)$$

を満たすものが唯一つ存在する。この H_γ の既約表現 $\rho'_{\theta,\gamma}$ に対して、

$$\kappa_{\theta,\gamma} = \text{Ind}_{H_\gamma}^{ZB} \rho'_{\theta,\gamma} \quad \text{and} \quad \pi_{\theta,\gamma} = \text{ind}_{ZB}^G \kappa_{\theta,\gamma}$$

と定義すると、 $\kappa_{\theta,\gamma}$ は、 ZB の既約表現、 $\pi_{\theta,\gamma}$ は、 G の既約 supercuspidal 表現になる。

(2) ($F^\times K$ の既約表現) L を F の l 次不分岐拡大体とすると、 $L^\times$ は、 $F^\times K$ に埋め込める。この場合は、 $F^\times K$ の既約表現は、 $L^\times$ の regular quasi-character によって、完全に、parametrize される。 $L^\times$ の quasi-character θ が regular であるとは、

$$\theta^\sigma \neq \theta \quad \text{for all } \sigma \in \text{Gal}(L/F)$$

を満たすこと、すなわち、 $L^\times$ を G の maximal torus とみて、 $L^\times$ に関する Weyl 群の作用で、互いに異なることとする。 θ を $L^\times$ の regular quasi-character, $f(\theta)$

を θ が $1 + P_L^n$ 上 trivial となる最小の自然数とする。 θ が次のいずれかの条件を満たす時 *generic* という。

- (a) $f(\theta) = 1$ で、 θ は L から F への ノルムを factor しない。
- (b) $f(\theta) > 1$ で、 $\theta(1+x) = \psi(\text{tr}_{L/F} \gamma_\theta x)$ for $x \in P_L^{f(\theta)-1}$ となるように $\gamma_\theta \in P_L^{1-f(\theta)} - P_L^{2-f(\theta)}$ をとるとき、 $\gamma_\theta \notin P_F^{1-f(\theta)} + P_L^{2-f(\theta)}$ となる。

$L^\times$ の regular quasi-character は $(\eta \circ N_{L/F}) \otimes \theta, \eta \in \widehat{F^\times}, \theta$ は generic quasi-character の形に書けることに注意する。

まず、 θ を generic とする。

- (a) $f(\theta) = 1$ のとき K の既約表現 κ'_θ で次の条件を満たすものが存在する。
 - (i) κ'_θ は、 K_1 上 trivial.
 - (ii) $K/K_1 \simeq \text{GL}_l(k_F)$ の Steinberg representaion の K への pull-back と κ'_θ との tensor が、

$$\text{Ind}_{\mathcal{O}_L^\times K_1}^K (tx \mapsto \theta(x)) \quad (t \in \mathcal{O}_L^\times, x \in K_1)$$

に等しい。

$F^\times K$ の表現 κ_θ を $tx \mapsto \theta(t)\kappa'_\theta(x)$ と定義すると、 κ_θ は $F^\times K$ の既約表現で

$$\pi_\theta = \text{ind}_{F^\times K}^G \kappa_\theta$$

は、 G の既約 supercuspidal 表現

- (b) $f(\theta) = n > 1$ のとき ほぼ ZB の既約表現の構成と同様。 $\psi_\theta(1+x) = \psi(\text{tr} \gamma_\theta x)$ for $x \in 1+x \in K_{[(n+1)/2]}$ と $K_{[(n+1)/2]}$ の 1次元表現を定義する。この場合、右辺は、 γ_θ のとり方によらないことに注意。 $H = L^\times K_{[(n+1)/2]}$, $H_\theta = L^\times K_{[n/2]}(\psi_\theta \text{ の normalizer})$ とおく。 H の 1次元表現 ρ_θ を

$$\rho_\theta(xg) = \theta(x)\psi_\gamma(g)$$

for $x \in L^\times, g \in K_{[(n+1)/2]}$ と定義する。

- (i) n : 偶数の時
 $n = 2m$ とおく。

$$\kappa_\theta = \text{Ind}_H^{F^\times K} \rho_\theta \quad \text{and} \quad \pi_\theta = \text{ind}_{F^\times K}^G \kappa_\theta$$

と定義すると、 κ_θ は、 $F^\times K$ の既約表現、 π_θ は、 G の既約 supercuspidal 表現になる。

(ii) n : 奇数の時

$n = 2m + 1$ とおくと $\text{Ind}_H H_\theta \rho_\theta$ の既約成分 ρ'_θ で、

$$\chi_{\rho'_\theta}(\gamma) = \theta(\gamma)$$

を満たすものが唯一つ存在する。この H_θ の既約表現 ρ'_θ に対して、

$$\kappa_\theta = \text{Ind}_{H_\theta}^{F^\times K} \rho'_\theta \quad \text{and} \quad \pi_\theta = \text{ind}_{F^\times K}^G \kappa_{\theta, \gamma}$$

と定義すると、 κ_θ は、 $F^\times K$ の既約表現、 π_θ は、 G の既約 supercuspidal 表現になる。

θ が regular なときは、 $\theta = (\eta \circ N_{L/F}) \otimes \theta' (\widehat{\eta F^\times}, \theta' \text{ generic})$ の形に書けることより、

$$\kappa_\theta = \kappa'_\theta \otimes (\eta \circ \det), \quad \pi_\theta = \pi'_\theta \otimes (\eta \circ \det)$$

とおけば、 κ_θ は、 $F^\times$ の既約表現、 π_θ は、 G の既約 supercuspidal 表現になる。この $L^\times$ の regular quasi-character で、parametrize される G の既約 supercuspidal 表現の系列を、cuspidal unramified series と呼ぶ。これは、一般の GL_n に対して、定義される。(See [6]).

Theorem 2.2. 任意の G の既約 supercuspidal 表現は、上記の π_θ か、 $\pi_{\theta, \gamma}$ の形に書ける。

この定理は、Carayol[3] が global tool(trace formula の simple version による Deligne-Kazhdan 対応、即ち、 GL_n の表現と、 F 上 n^2 次の division algebra の乗法群の表現の対応 [5]) を用いて証明し、そののち、Bushnell[1] が完全に local な証明を与えた。勿論、 l が素数でないときは、遥かに複雑であるが、その場合でも、上で述べたような、maximal compact modulo center subgroup の既約表現 (Carayol の用語では very cuspidal representation) は、基本的である。例えば、 π のコンダクター $f(\pi)$ が $n(GL_n$ の $n)$ と互いに素なときは、全て既約な very cuspidal representation からの compact induction で書ける。尚、 $(n, p) = 1$ のときは、ずっと以前に、 $GL_n(F)$ の既約 supercuspidal 表現は Howe [9], Moy [11] らによって、 F の n 次拡大体の乗法群の admissible character によって parametrize されることが知られている。

3. CUSPIDAL UNRAMIFIED SERIES の指標

ここでは、 $GL_l(F)$ の cuspidal unramified series の指標公式についての結果を紹介する。§2 の記号はそのまま使う。Corollary 1.9. より $x \in G$ で、 $F[x]$ が F の l -次拡大体となるものについてのみ、 $\chi_{\pi_\theta}(x)$ を求めれば良い。結果を述べる為に、いくつか記号を準備する。 $U_0 = L^\times, U_i = F^\times(1 + P_L^i)$ ($i \geq 1$), $U_i^* = U_i - U_{i+1}$ とおく。このとき、

$$L^\times = \left(\bigcup_{0 \leq i < n-1} U_i^* \right) \cup U_{n-1} \quad (\text{disjoint union})$$

が成り立つ。また、 $\Gamma = \text{Gal}(L/F)$ とおく。

Theorem 3.1. θ を $L^\times$ の regular quasi-character で、 $\theta \otimes (\eta \circ N_{L/F})$ が、generic なものとする。 $f(\theta \otimes (\eta \circ N_{L/F})) = n$ とおくと、

(1) (Character formula of π_θ on $L^\times$)

$$\chi_{\pi_\theta}(x) = \begin{cases} (-1)^{(l-1)(n-1-j)} q^{\frac{l(l-1)j}{2}} (\sum_{\sigma \in \Gamma} \theta(x^\sigma)) & \text{if } x \in U_j^* \quad (0 \leq j < n-1) \\ q^{\frac{l(l-1)(n-1)}{2}} (\sum_{\sigma \in \Gamma} \theta(x^\sigma)) & \text{if } x \in U_{n-1}. \end{cases}$$

(2) (Character formula of π_θ on $E^\times$)

$$\chi_{\pi_\theta}(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \notin F^\times(1 + P_E^{l(n-1)+1}) \\ \theta(c) l q^{\frac{l(l-1)m}{2}} & \text{if } x = c(1+y) \in F^\times(1 + P_E^{l(n-1)+1}). \end{cases}$$

(ここで、 E は 任意の F の l -次分岐拡大体)

証明は、 $l=2$ の時、[8]. l odd の時、[12] による。

上の公式は、 $L^\times - U_{n-1}$ 上で次のように見直すことができる。

$$\chi_{\pi_\theta}(x) = (-1)^{(l-1)(n-1-j)} \Delta(x)^{-1} \left(\sum_{\sigma \in W(L^\times)} \theta(x^\sigma) \right) \quad \text{if } x \in U_j^* \quad (0 \leq j < n-1)$$

ここで、 $\Delta(x) = |\det(\text{Ad}(x) - 1)_{M_l(F)/L}|_F^{\frac{1}{2}}$ ($M_l(F), L$ をそれぞれ、 $G, L^\times$ の Lie 環とみて、adjoint action を考えている。), $W(L^\times)$ は、maximal torus $L^\times$ に関する Weyl 群とする。

これは、実半単純群の既約 square-integrable 表現、compact Lie 群の既約 unitary 表現等の指標公式の類似を与えている。これは、 L/F が不分岐であるときには、共役類が非常に'良い'形をしていることを示唆しているので、適当な多様体のコホモロジーの空間に実現できるのではないと思われる。また、一般の n にたいして、 $GL_n(F)$ の cuspidal unramified series についても同様の、指標公式が成り立つことが、期待される。

REFERENCES

1. C. J. Bushnell, *Hereditary orders, Gauss sums and supercuspidal representations of GL_N* , J. für Reine und Angew. Math. **375–376** (1987), 184–210.
2. C. J. Bushnell and P. Kutzko, *The admissible dual of $GL(N)$ via compact open subgroups*, Ann. of Math. Studies, vol. 129, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1993.
3. H. Carayol, *Représentation cuspidales du groupe linéaire* Ann. scient. Éc. Norm. Sup. **17** (1984), 191–226.
4. W. Casselman, *Characters and Jacquet modules*, Math. Ann. **230** (1977), 101–105.
5. P. Deligne, D. Kazhdan, and M.-F. Vignéras, *Représentations des algèbres centrales simples p -adiques*, in: Représentation des Groupes Réductifs sur un Corps Local, Herman, Paris, 1984, pp. 33–117.
6. P. Gerardin, *Cuspidal unramified series for central simple algebras*, in: Automorphic Forms, Representations, and L -functions, Proc. of Pure Math. **33**, Part I, 1979, pp. 157–169.
7. Harish-Chandra, *Admissible distributions on reductive p -adic groups*, Queen's Papers in Pure and Applied Math. **48** (1978), 281–347.
8. H. Hijikata, H. Saito, and M. Yamauchi, *Representations of Quaternion Algebras over Local Fields and Trace Formula of Hecke Operators*, J. Number Theory **43** (1993), 123–167.
9. R. Howe, *Tamely ramified supercuspidal representations of $GL_n(F)$* , Pac. J. Math. **73** (1977), 437–460.
10. H. Jacquet, *Représentations des groupes linéaires p -adiques*, Theory of Group Representations and Harmonic Analysis, (C.I.M.E., II Ciclo, Montecatini Terme, 1970), Edizioni Cremonese, Roma, 1971, pp. 119–220.
11. A. Moy, *Local constant and the tame Langlands correspondence*, Amer. J. Math. **108** (1986), 863–930.
12. T. Takahashi, *Characters of cuspidal unramified series for central simple algebras of prime degree*, J. Math. Kyoto Univ. **32-4** (1992), 873–888.