

曲面の積分幾何と複素等質空間の Plancherel 型定理

東大数理 小林 俊行 (TOSHIYUKI KOBAYASHI)

1. 序

リー群の群多様体, あるいはその等質多様体上の二乗可積分関数のつくる Hilbert 空間を, 既約ユニタリ表現の直和 (直積分) に分解することを Plancherel 型の定理といいます。例えば, $L^2(S^1)$ に対するフーリエ級数, $L^2(\mathbf{R})$ に対するフーリエ変換, コンパクト群 (特に有限群) に対する Peter-Weyl の定理などはその特別な例です。非コンパクトなリー群あるいはその等質多様体上の非可換調和解析の黎明期, すなわち 1950 年代から 60 年代にかけて, Plancherel 型定理を求める主要な原理の一つは, Gelfand 学派を中心に研究された積分幾何でした。例えば, 複素半単純リー群 G の Plancherel 定理を具体的に求める事は, 「 G 上の関数を, 極大べき零リー群の軌道上の積分値から復元せよ」という積分幾何の問題と同等である事を Gelfand-Graev は既に 50 年代に見抜いています。これは, 群論的な結果 (例えば Plancherel 定理) が, 群によって規定されていないより一般的な幾何 (例えば 積分幾何) から導ける事を示唆しているわけです。しかし $GL(n, \mathbf{C})$ の Plancherel の公式の Gelfand-Graev による 2 通りの証明法 [1], [3] (後者は前者の 10 年あまり後に得られた) にも見られるように, 50 ~ 60 年代の当時でも, 純粋な積分幾何の手法は, 群論的な手法も取り混ぜた手法に較べてかなり困難な面がありました。さらに, 70 年代から 90 年代前半にかけては, 実リー群や対称空間を中心とする非可換調和解析の急速な進展の中で, 積分幾何の手法は背後の指導原理の一つではあったにせよ, 主要な役割は担っていなかったように思われます。

このノートでは, 再び素朴な積分幾何の手法を見直し, 曲面に対する積分幾何の逆変換の普遍公式 (無限次元多様体上で記述する), およびそれを用いて 非コンパクトな複

素等質多様体 (最近 10 数年で研究が進んだ (複素) 半単純対称空間のみならず, 70 年代以降あまり進展のなかった非対称や非簡約型空間の場合をこめて) の Plancherel 型定理を求める方法を紹介します。

2. 曲面の積分幾何

最初に, ここでの「積分幾何の問題意識」とは何かを説明しましょう。後の応用のため, 多様体は複素多様体と仮定します。 X を n 次元複素多様体, N_φ を $\varphi \in \Lambda$ でパラメトライズされた X の p 次元部分多様体とします。簡単のため, N_φ は正則な埋め込み写像 (パラメータ φ と同じ記号を使う) $\varphi: \mathbb{C}^p \rightarrow X$ の像として定義されているとします。

例 1. $X := \mathbb{C}^n$, $\Lambda := M(n, p, \mathbb{C}) \times \mathbb{C}^n$, $\varphi = (A, b) \in \Lambda$ に対して埋め込みを

$$\varphi: \mathbb{C}^p \ni z \mapsto Az + b \in X = \mathbb{C}^n$$

として定義すると, Λ は $\mathbb{C}$ の p 次元部分空間全体を記述するパラメータ空間になっています (正確には, 像を記述するパラメータとしては一意的ではない)。

さて, 最初の設定にもどって, 積分変換

$$(1) \quad R: C_0^\infty(X) \rightarrow C^\infty(\Lambda), \quad f \mapsto Rf \left(\varphi \mapsto \int_{\mathbb{C}^p} f(\varphi(t)) dt \right)$$

を定義しましょう。例えば, $X = \mathbb{C}^n$ で Λ がアファイン写像からなる場合 (例 1 参照), この積分変換 R は, 広義のラドン変換, とくに

$p = n - 1$ のとき ラドン変換,

$p = 1$ のとき X 線変換 (医学などの応用から)

と呼ばれる変換です (通常は $\mathbb{C}$ ではなく $\mathbb{R}$ 上で考える)。 R の逆写像を求めるということは, 標語的に言えば

「部分多様体での積分値からもとの関数を復元する」

ということになります。これが、今世紀初頭に Radon, Funk によって提起された積分幾何の基本問題の一つであり、ここで関心のある問題意識でもあります。

今, p 次元部分多様体の族のパラメータ空間 Λ は暗黙の内に有限次元と考えましたが, ここでは p 次元部分多様体全体の空間 Π (無限次元多様体) 上で R の逆公式を普遍的な形で与えて, 個々の特別な部分多様体の族に関しては, その普遍公式から見つめるというアプローチをとります。そこで,

$$\Pi := \{\varphi: \mathbb{C}^p \rightarrow X \text{ は holomorphic な埋め込み}\},$$

$$\Pi_x := \{\varphi \in \Pi: \varphi(0) = x\}, \quad (x \in X).$$

とおき, 上の変換と同様に積分変換

$$R: C_0^\infty(X) \rightarrow C^\infty(\Pi), \quad f \mapsto Rf(\varphi \mapsto \int_{\mathbb{C}^p} f(\varphi(t)) dt)$$

を定義します。ここで, Π は無限次元多様体ですが, 通常が多様体と同様の記号を使います。もし, Λ でパラメトライズされる p 次元複素部分多様体が与えられたとすれば, 自然な包含写像 $j: \Lambda \subset \Pi$ によって引き戻した $j^* \circ R$ が (1) 式に相当します。

例 1 のように $X = \mathbb{C}^n$, Λ が affine 写像である場合には, Gelfand-Graev-Shapiro [5] によって, 70 年代に $j^* \circ R$ の逆変換の公式が求められています。次の定理は, Gelfand-Graev-Schapiro の公式を deformation により曲面上の積分幾何の問題に拡張しようという Gindikin のアイディアに基づきます:

定理. $x \in X$ を固定する。“ (p, p) -形式”を係数に持つ“微分作用素”

$$\kappa \wedge \bar{\kappa}: C^\infty(\Pi) \rightarrow \mathcal{E}^{p,p}(\Pi_x)$$

が, 変分を用いて定義され,

i) $f \in C_0^\infty(X)$ ならば $\kappa \wedge \bar{\kappa}(Rf)$ は Π_x の“閉形式”。

- ii) 任意のサイクル $\gamma \subset \Pi_x$ に対して, グラスマン多様体内で Euler サイクルとの交叉数の定数倍として与えられる定数 $C(\gamma)$ が定まり, $f \in C_0^\infty(X)$ に対して逆変換の公式

$$\int_{\gamma} \kappa \wedge \bar{\kappa}(Rf) = C(\gamma)f(x)$$

がなりたつ。

$\kappa \wedge \bar{\kappa}$ の具体的な定義は, 準備にかなり紙面を使うので省略しますが, p 次元平面全体の空間 (例 1) に制限したとき Gelfand-Graev-Shapiro 作用素 [5] に一致するのが大事な点です。

上の普遍公式を, 一般の積分幾何の設定 (パラメータ空間 Λ が有限次元) にもどって見つめれば, $j: \Lambda \hookrightarrow \Pi$ とみて,

イ) $\kappa \wedge \bar{\kappa}(Rf)$ を Λ_x に引き戻した (p, p) -形式が $j^* \circ Rf$ で記述できること

ロ) Λ_x 内に $C(\gamma) \neq 0$ となるサイクル γ が存在すること

の 2 つが満たされていれば, 積分変換

$$j^* \circ R: C_0^\infty(X) \rightarrow C^\infty(\Lambda), \quad f \mapsto Rf(\varphi \mapsto \int_{\mathbb{C}^p} f(\varphi(t)) dt)$$

は単射になりその逆変換の公式が得られることがわかります。

一般に $\kappa \wedge \bar{\kappa}$ は Λ に沿っていない Π 上の “微分” を含むので, (イ) は厳しい条件です。 Λ が例 1 の部分集合の場合, (イ) の条件は [5] において提唱され, 「平面の admissible な族」と呼ばれています。この用語を使えば, (イ) は「曲面の admissible な族」ともいうべき条件です。

さて, 3 節の基本的なアイディアは, X が複素等質多様体の場合に うまく部分多様体の族 Λ を見つけて (イ), (ロ) がなりたつようにしようということです。

3. 複素等質多様体の Plancherel 型定理

G をリー群, H をその閉部分群とします。等質多様体 G/H が G -不変測度をもつとき, G/H 上の二乗可積分函数のつくるヒルベルト空間 $L^2(G/H)$ を表現空間とする G の (準) 正則表現は, ユニタリになります。この (準) 正則表現を G の既約ユニタリ表現に直和 (一般には直積分) 分解し, その具体的対応を記述する定理を Plancherel 型定理といいます。なお, G/H に G -不変な測度が存在しない場合, $L^2(G/H)$ を G/H 上の (体積) $\frac{1}{2}$ バンドルの L^2 -切断とおきかえれば, やはり同様の設定で Plancherel 型定理を考えることができます。Plancherel 型定理を具体的に与えることは, 非可換調和解析の基本問題の一つです。この節では, この問題を G が複素簡約リー群の等質多様体 G/H に対して考えます。

最初に, いくつかの用語を定義しておきます。

G を複素簡約リー群, $\mathfrak{g}$ をそのリー代数とします。 G の放物型部分群 P のユニタリ指標 χ を L^2 -誘導して得られる G のユニタリ表現 $L^2\text{-Ind}(P \uparrow G; \chi)$ は, P が Borel 部分群ならば主系列表現, P が Borel 部分群以外の放物型部分群の場合には退化主系列表現とよばれます。

$P = LN$ を G の放物型部分群の Levi 分解としたとき P のユニタリ指標 χ は L の中心 $Z(L)$ のユニタリ指標に対応していることに注意します。

さて, H を G の複素閉部分群とし, 次の3つの性質を満たす G の部分多様体 Y , G の放物型部分群 $P = LN$, G の部分集合 G'' で $G \setminus G''$ は測度0となるもの, L の複素リー群としての分解 $L = MA$ ($A \subset Z(L)$) が存在すると仮定します:

- i) $M \subset \bigcap_{y \in Y} yHy^{-1}$ 。
- ii) $A \times N \times Y \times H \rightarrow G'' \subset G, (a, n, y, h) \mapsto anyh$ は, G の部分集合 G'' の上への全

単射写像。

iii) $\alpha|_{\mathfrak{a}} \neq 0$ が任意の $\alpha \in \Delta(\mathfrak{n}, \mathfrak{j})$ に対して成り立つ。

注意 1. P が Borel 部分群, $M = 1$ の場合は (ii),(iii) は自明な条件。

注意 2. $P = MAN$ は P の Langlands 分解とはちがう。

定理. G を複素簡約型リー群, H をその複素閉部分群とし上の設定が満たされているとする。このとき, $\chi \in \hat{A}$ に対して, G/H 上のフーリエ変換

$$\mathcal{F}_{\chi}: C_0^{\infty}(G/H) \rightarrow C^{\infty}\text{-Ind}(P \uparrow G; \chi) \hat{\otimes} C^{\infty}(Y)$$

は等長写像

$$L^2(G/H) \rightarrow \int_{\hat{A}} L^2\text{-Ind}(P \uparrow G; \chi) q(\chi) d\chi \hat{\otimes} L^2(Y, \mu)$$

に拡張される。ここで $q(\chi)$ は Plancherel 測度 (具体的にルート系の言葉で記述可能), μ は (ii) の分解より定まる Y 上の測度。

証明の方針:

1) $N := \mathbb{C}^{\dim N}$ から $X := G/H$ への埋め込みを $\Lambda := G \times G''$ をパラメータとして,

$$N \rightarrow X = G/H, n \mapsto gng''H, ((g, g'') \in G \times G'')$$

で定義します。

2) 具体的にある微分作用素 (群 A の作用から定義される) を構成して前節の (イ) を証明することができ, 従って積分変換 $R: C_0^{\infty}(G/H) \rightarrow C^{\infty}(G \times G'')$ の逆変換の公式が得られます。

3) G/H 上のグラスマンバンドルのある subvariety の “完備化” を考え, Euler サイクルとの交叉数を求めます。

- 4) 定理で定義される等質空間 G/H のフーリエ変換は、積分変換 R と可換群 A の (通常の) フーリエ変換の合成として得られるので、ステップ 2 より、その explicit な逆変換の公式、および Plancherel 測度が定まります。最後のステップは古典的な手法と全く同じです。

定理の右辺において、 $L^2(Y)$ は $L^2(G/H)$ の展開に現れる既約表現の重複度を記述しています。 Y が一点ならば、既約表現の重複度は 1 であり、 Y の次元が正ならば既約表現の重複度は無限となります。

また、 H にユニタリ指標 τ をつけて、 G/H 上の等質直線束 $G \times_H \tau$ の L^2 -切断のつくる Hilbert 空間 $L^2(G \times_H \tau)$ に対する Plancherel 型定理という一般化も可能です。

4. 応用例

3 節で述べた定理の応用例の幾つかを紹介しましょう。

応用例 1. H が Cartan 部分群の場合 (例えば $GL(n, \mathbb{C})/(\mathbb{C}^\times)^n$)。

この場合は、Gelfand-Graev [2] によって Plancherel 型定理は知られており、ここでの方法はその別証明になっています。群が $SL(2, \mathbb{C})$ の場合を除いて既約表現の重複度が無限になります (Y が一次元以上になる)。さらに系として、複素半単純リー群の主系列のテンソル積の分解公式が得られます。なお, abstract Plancherel formula (Plancherel 測度を求めない, 弱い形の Plancherel 型定理) は Gelfand-Graev [2] の結果の正当化の試みとして F. Williams [14] によっても得られています。

応用例 2. $GL(n, \mathbb{C})$ の主系列の $GL(k, \mathbb{C}) \times GL(n-k, \mathbb{C})$ への制限公式。

この場合の制限公式 (分岐則) は Makey machine により、ある等質空間上の Plancherel 型定理に帰着します。 Y が一点になる (既約表現の重複度が 1 になる) 必要十分条件は $k=1$ または $n-k=1$ であり (Kirillov 予想の特別な場合に対応している), この場合

の制限公式はある非簡約型の spherical homogeneous space 上の Plancherel 型定理と等価になります。なお、この場合の abstract Plancherel formula は Anh によって 70 年代に得られています。

応用例 3. H が極大べき零部分群の場合 (Whittaker Plancherel 定理)。

H にユニタリ指標をつけて誘導した空間は L^2 -Whittaker ベクトルのつくるユニタリ表現となります。Bruhat 分解より、 P は Borel 部分群、 Y は一点として定理の設定が満たされます。すなわち、既約分解は主系列表現が重複度 1 で現れます。なお、応用例 2 と応用例 3 では G/H は非簡約型です。

応用例 4. (G, H) が複素半単純対称空間の場合。

G の実形 $G_{\mathbf{R}}$ で、その極大コンパクト部分群 $K_{\mathbf{R}}$ の複素化が H に一致するものを選びます (存在する)。 P は $G_{\mathbf{R}}$ の極小放物型部分群の複素化として、 Y は一点 (例えば原点) として、定義します。従って、対応する Plancherel 定理には、(退化) 主系列表現が重複度 1 で現れます。この場合の Plancherel 型定理は、実半単純対称空間に対して大島先生が発表された Plancherel 型定理 [12], [13] を複素の場合に別証明を与えていることになります。また、もっとも簡単な場合である $SL(2, \mathbf{C})/SO(2, \mathbf{C})$ の場合には、Gelfand-Graev-Vilenkin [4] によって Plancherel 型定理が 60 年代初頭に知られていましたが、この場合に限ってもここでの方法は新しい証明となっています。

応用例 5. $GL(n, \mathbf{C})/GL(n_1, \mathbf{C}) \times GL(n_2, \mathbf{C}) \times \cdots \times GL(n_k, \mathbf{C})$

この例は、 $k \geq 3$ の場合は対称空間でない簡約型等質空間となり、「Plancherel 型定理にどのような既約ユニタリ表現が現れるか？」さえ従来知られていなかった悪名高い例の一つです。

$n_1 + \cdots + n_k = n$, $n_1 \geq \cdots \geq n_k \geq 1$ として次の場合分けをします。

イ) $2n_1 > n$ の場合。

$M = GL(2n_1 - n, \mathbb{C}) \times \text{diag}(\mathbb{C}^\times)$ となり, M に対応する P は Borel 部分群ではない放物型部分群になります。従って, $L^2(G/H)$ は退化主系列表現で既約分解されます。既約分解における既約ユニタリ表現の重複度は一様に無限であり, それを記述する多様体 Y は, $GL(n - n_1, \mathbb{C}) / \prod_{2 \leq j \leq k} GL(n_j, \mathbb{C})$ 上のトーラス $(\mathbb{C}^\times)^{n-n_1}$ の軌道空間として捕らえることができます。

ロ) $2n_1 \leq n$ の場合。

P は Borel 部分群となり, $L^2(G/H)$ は重複度無限の主系列表現で分解されます。既約表現の無限重複度を記述する多様体 Y は, $n_1, n_2, \dots, n_k$ 次元のベクトル空間のなす quiver のある標準形として捕らえることができます。

なお応用例 5 の系として, $GL(n, \mathbb{C})$ のある種の退化系列表現同士のテンソル積の分解公式も (直積分の具体的な測度や無限重複度の記述を込めて) 得られます。

文献

- [1] I.M.Gel'fand and M.I.Graev, *The analogue of Plancherel's formula for the classical groups*, Tr. Mosk. Mat. O.-va 4 (1955), 375-404. Transl. II. Ser., Amer. Math. Soc. 9 (1958) 123-154
- [2] —————, *Geometry of homogeneous spaces, representations of groups in homogeneous spaces, and related questions of integral geometry*, Tr. Mosk. Mat. O.-va 8 (1959), 321-390. Transl. II. Ser., Amer. Math. Soc. 37 (1964) 351-429
- [3] —————, *Complexes of k -dimensional planes in the space $\mathbb{C}^n$* , Soviet Math. Dokl. 9 (1968), 394-398.
- [4] I.M.Gel'fand, M.I.Graev and N.Ya.Vilenkin, "Generalized Functions, Integral Geometry and Representation Theory,," Moscow, 1962. Transl. (1966) Academic Press
- [5] I.M.Gel'fand, M.I.Graev and Z.Ya.Shapiro, *Integral geometry on k -dimensional planes*, Funkts. Anal. Prilozh. 1 (1967), 15-31. Funct. Anal. Appl. 1 (1967) 14-27
- [6] S.G.Gindikin and F.I.Karpelevič, *Plancherel measure of Riemannian symmetric spaces of non-positive curvature*, Soviet Math. Dokl 3 (1962), 962-965.
- [7] S.Gindikin, *Integral geometry on symmetric manifolds*, Trans. A.M.S. 148 (1991), 29-37.

- [8] S.I.Gindikin and T.Kobayashi, (*in preparation*).
- [9] Harish-Chandra, *Harmonic analysis on real reductive groups*, I, J. Funct. Anal., **19**, (1975), 104-204; II, Invent. Math., **36**, (1976), 1-55; III, Ann. Math., **104**, (1976), 117-201.
- [10] T. Kobayashi, 簡約型等質空間上の調和解析とユニタリ表現論, 数学「論説」**46-2** (1994), 124-143.
- [11] —————, *Discrete decomposability of the restriction of $A_q(\lambda)$ with respect to reductive subgroups and its applications*, Invent. Math. **117** (1994), 181-205.
- [12] T.Oshima, ある多項式のべき積分 (c 函数) の計算, 数理解析研講究録 **431** (1981), 90-108.
- [13] —————, 半単純対称空間上の調和解析, 数学「論説」**37** (1985), 97-112.
- [14] F.Williams, "Tensor Products of Principal Series Representations," Lecture Notes in Math., **358**, Springer Verlag, Berlin, 1973.