

Gradient 型微分作用素, べき零共役類と半単純リー群の表現

— 離散系列表現を軸として —

山下 博 (京大・理)

序.

G を中心有限な半単純リー群とし, G の極大 compact 部分群を K で表す. 周知の如く, 2 乗可積分な行列要素をもつ G の既約 unitary 表現 (離散系列表現) は $L^2(G)$ 上への G の正則表現の既約分解に離散スペクトルとして寄与し, G 上の調和解析において極めて重要である. 群 G が離散系列表現をもつのは Harish-Chandra による階数条件 $\text{rank } G = \text{rank } K$ が満たされるときかつそのときに限る ([4]). 離散系列の幾何学的構成も, cohomology 誘導によるもの, Dirac 作用素を用いるものなど幾通りかの方法が得られている (例えば 論説 [3] 参照).

なかでも, G/K 上の vector 束上定義された gradient 型微分作用素 $\mathcal{D}_\lambda$ の核空間 (0-固有空間) としての離散系列の実現 ([7], [9]) は, 離散系列表現が lowest K -type τ_λ をもつという性質を直接反映するものとして興味深い.

この講演では, 半単純リー群の表現論において離散系列の果たす役割や性質のうちリー環のべき零幾何との関わりで重要ないくつか, 微分作用素 $\mathcal{D}_\lambda$ をとおして新たに見い出されまた理解できる ということを, 関連する話題や解説的な部分も含めて, 一連の研究 [13]-[15] を中心に報告する.

本稿の各節の内容を概説しよう.

1. G の表現が定めるべき零不変量のうちで特に随伴多様体 (cf. [12]) に注目する. 離散系列についての議論を始める前に, まず, 随伴多様体が加群の構造をどのように反映するかを大枠で明らかにする極めて一般的な結果を与える. すなわち, $\mathfrak{g}$ を任意の複素リー環, $U(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}$ の展開環, A を $U(\mathfrak{g})$ の部分環とすると, 有限生成 $U(\mathfrak{g})$ -加群 H が A -加群としてもなお有限生成であるための簡潔な判定条件を H と A の随伴多様体を用いて与える. さらに, この判定条件が半単純リー群の許容的表現, 正確には 対応する Harish-Chandra 加群に対して有効であることを示す.

2. 離散系列表現の随伴多様体を微分作用素 $\mathcal{D}_\lambda$ を用いて, Hotta-Parthasarathy [7] に基づく直接的かつ初等的な方法で記述する. この方法によって, 離散系列の随伴多様体を $\mathcal{D}_\lambda$ の表象写像を通して特徴づけることができる. さらに, 随伴多様体を定める加群の零化 ideal についてのより詳しい情報も得られる.

随伴多様体の記述そのものは, (a) Beilinson-Bernstein 対応に基づく離散系列の D -加群による構成, (b) その特性多様体の特定, および (c) Harish-Chandra 加群の随伴多様体は対応する D -加群の特性多様体の moment 写像による像と一致する, という結果 ([2, III], [10]) を組み合わせることでも得られる.

本稿では、上記 (a)-(c) にはよらず、 $U(\mathfrak{g})$ -加群に対する随伴多様体の定義と離散系列表現の実現についての基本的結果のみを使う。

3. 上記 2 で与える随伴多様体の記述の応用例として、実古典群の離散系列の Gelfand-Kirillov 次元 (=随伴多様体の次元) を具体的・組合わせ論的に特定する。ここでは、unitary 群 $G = SU(p, q)$ の場合の公式を与える。Harish-Chandra 加群の随伴多様体や Gelfand-Kirillov 次元は (一般化された) Whittaker 模型の存在と深く関わっており、今後この方面での応用が期待できる。

ところで、gradient 型微分作用素 $\mathcal{D}_\lambda$ は、離散系列そのものの構成に限らず、離散系列表現のさまざまな誘導表現への埋め込みを特定・記述するために役に立つ。

実際、 $\mathcal{D}_\lambda$ を誘導加群 Y 上への作用を考えることで得られる微分方程式 “ $\mathcal{D}_{\lambda,Y} f = 0$ ” は、 Y における lowest K -type vector f を特徴づけ、若干の仮定のもとに f から生成される Y の部分加群は離散系列の Harish-Chandra 加群と同型になることがわかる。埋め込みを決めることは、方程式 $\mathcal{D}_{\lambda,Y} f = 0$ を解くことに帰着されるのである ([13]; cf. [8])。

講演では、この手法に基づき、べき零部分群・放物型部分群から誘導される (一般化された) Gelfand-Graev 表現・主系列表現への離散系列の埋め込みについても論じてみたい。

1. $U(\mathfrak{g})$ -加群の部分環への制限と随伴多様体 [14].

1.1. 有限生成 $U(\mathfrak{g})$ -加群の随伴多様体. まず、本稿をとおして取り扱う展開環上の加群の不変量を定義することから始めよう。

$\mathfrak{g}$ を有限次元複素リー環とし、 $\mathfrak{g}$ の展開環を $U(\mathfrak{g})$ で表す。Poincaré-Birkhoff-Witt の定理により、 $U(\mathfrak{g})$ の自然な増大 filtration $(U_k(\mathfrak{g}))_{k=0,1,\dots}$ を通して得られる階数つき代数:

$$\mathrm{gr} U(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{k \geq 0} U_k(\mathfrak{g})/U_{k-1}(\mathfrak{g}) \quad (U_{-1}(\mathfrak{g}) := (0)),$$

を $\mathfrak{g}$ の対称線型環 $S(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{k \geq 0} S^k(\mathfrak{g})$ と標準的に同一視できる。ここに、 $S^k(\mathfrak{g})$ は $S(\mathfrak{g})$ の k -次斉次成分である。

いま、 H を有限生成 $U(\mathfrak{g})$ -加群とする。自明な場合を除外するため、以降常に $H \neq (0)$ を仮定する。 $H = U(\mathfrak{g})H_0$ なる H の有限次元部分空間 H_0 をとり、 $H_k = U_k(\mathfrak{g})H_0$ ($k = 1, 2, \dots$) とおく。このとき、 $(H_k)_k$ は H の増大 filtration を定め、これに対応して階数つき $S(\mathfrak{g})$ -加群:

$$(1.1) \quad M = \mathrm{gr}(H; H_0) := \bigoplus_{k \geq 0} M_k, \quad M_k = H_k/H_{k-1},$$

を得る。

加群 M の零化 ideal $\mathrm{Ann}_{S(\mathfrak{g})} M := \{D \in S(\mathfrak{g}) \mid Dv = 0 \ (\forall v \in M)\}$ は $S(\mathfrak{g})$ の斉次 ideal であり、その零点として $\mathfrak{g}$ の双対空間 $\mathfrak{g}^*$ における代数多様体:

$$\mathcal{V}(M) := \{\lambda \in \mathfrak{g}^* \mid f(\lambda) = 0 \ (\forall f \in \mathrm{Ann}_{S(\mathfrak{g})} M)\},$$

が定まる. ここで, $S(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}^*$ 上の多項式環と標準的に同一視している. さらに, 多様体 $\mathcal{V}(M)$ は生成部分空間 H_0 の取り方によらないことがわかる. かくして得られる H の不変量 $\mathcal{V}(M)$ を $\mathcal{V}(H)$ で表し, H の随伴多様体 (associated variety) という. また, その次元 $d(H) := \dim \mathcal{V}(H)$ を H の Gelfand-Kirillov 次元とよぶ.

Hilbert-Serre の定理により, 写像 $k \rightarrow \dim H_k$ は, k が十分大きなとき, $(c(H)/d!) \cdot k^d + (\text{低次の項})$ なる $d = d(H)$ 次の多項式と一致することがわかる. ここに, 係数 $c(H)$ は生成部分空間 H_0 の取り方によらず定まる自然数である. この $c(H)$ を H の Bernstein 次数という.

1.2. 有限性の判定条件. $U(\mathfrak{g})$ -加群 H の随伴多様体が, H の部分環への制限についての重要な情報をとらまえていることを明らかにしよう.

いま A を $U(\mathfrak{g})$ の部分代数で単位元を含むものとし, A が定める $S(\mathfrak{g})$ の階数つき部分代数を

$$\text{gr } A := \bigoplus_{k \geq 0} A_k / A_{k-1}, \quad A_k = A \cap U_k(\mathfrak{g}),$$

で表す. 有限生成 $U(\mathfrak{g})$ -加群 H の A への制限が good であるとは, H の有限次元生成部分空間 H_0 が存在して $\text{gr}(H; H_0)$ が R 上有限生成になるときをいう.

部分環 A への good な制限をもつ加群 H を随伴多様体を用いて次のように特徴づけることができる.

定理 1.1. $R = \text{gr}(A)$ の極大斉次 ideal R_+ が共通零点として定める $\mathfrak{g}^*$ の代数多様体を $R_+^\#$ とする. このとき, $\mathcal{V}(H) \cap R_+^\# = (0)$ ならば H の A への制限は good である. また, R が Noetherian ならばこの逆も成り立つ.

さらに, A への制限が good である $U(\mathfrak{g})$ -加群 H は次の性質をもつことがわかる.

定理 1.2. $U(\mathfrak{g})$ 加群 H の A への制限が good であると仮定する. このとき,

(i) H は A -加群として有限生成である.

(ii) $\mathfrak{n}$ を $\mathfrak{g}$ の部分リー環とし, $A = U(\mathfrak{n})$ の場合を考える. このとき, H の $U(\mathfrak{n})$ -加群としての Gelfand-Kirillov 次元, Bernstein 次数は, $U(\mathfrak{g})$ -加群としてのもの $d(H)$, $c(H)$ とそれぞれ一致する.

上記の 2 定理から, 例えばつぎのことが従う.

系 1.1. (i) $\mathfrak{n}$ を $\mathfrak{g}$ の部分リー環とすると, 有限生成 $U(\mathfrak{g})$ -加群 H の $U(\mathfrak{n})$ への制限が good であるための必要十分条件は $\mathcal{V}(H) \cap \mathfrak{n}^\perp = (0)$ が成り立つことである. ここに, $\mathfrak{n}^\perp$ は $\mathfrak{n}$ の $\mathfrak{g}^*$ における直交空間を表す.

(ii) (i) の条件が満たされるとき, H の $\mathfrak{n}$ -homology 群 $H_k(\mathfrak{n}, H)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) はすべて有限次元である.

1.3. Harish-Chandra 加群への応用. 上で与えた有限性の判定条件は, 半単純リー環の Harish-Chandra 加群の場合に興味深い応用をもつ.

これ以降, $\mathfrak{g}_0$ を実半単純リー環とし, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{p}_0$ を対合 θ により定まる $\mathfrak{g}_0$ の Cartan 分解とする. $\mathfrak{g}$ を $\mathfrak{g}_0$ の複素化とし, $\mathfrak{g}_0$ の部分空間 $\mathfrak{h}_0$ の $\mathfrak{g}$ における複素化を $\mathfrak{h}$ で表すことにする.

$U(\mathfrak{g})$ -加群 H が Harish-Chandra $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ -加群であるとは, H が $U(\mathfrak{g})$ 上有限生成であって, かつ 部分環 $Z(\mathfrak{g})U(\mathfrak{k})$ の H への作用が局所有限であるときをいう. ただし, $Z(\mathfrak{g})$ は $U(\mathfrak{g})$ の中心を表す.

このような H の随伴多様体 $\mathcal{V}(H)$ は $\mathfrak{p}$ のべき零元全体のなす多様体 $\mathcal{N}(\mathfrak{p})$ に含まれる K_C -不変な閉錐であることが容易にわかる. ここで, K_C は $\mathfrak{g}$ の随伴リー群 G_C の連結部分群で $\mathfrak{k}$ をそのリー環とするものである. また, $\mathfrak{g}$ の Killing 形式によって $\mathfrak{g}^*$ を $\mathfrak{g}$ 自身と同一視し, $\mathcal{V}(H) \subset \mathfrak{g}$ とみなしている.

いま, $\mathfrak{g}_0$ の部分リー環 $\mathfrak{n}_0$ が $\mathfrak{g}_0$ において large であるとは,

$$(1.2) \quad (x \cdot \mathfrak{n})^\perp \cap \mathcal{N}(\mathfrak{p}) = (0),$$

なる $\mathfrak{g}_0$ の内部自己同型 $x \in \text{Int}(\mathfrak{g}_0)$ が存在するときをいう.

$\mathcal{V}(H_{\max}) = \mathcal{N}(\mathfrak{p})$ なる Harish-Chandra $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ -加群 $H_{\max}$ が存在することに注意して系 1.1(i) を用いることで次の命題が得られる.

命題 1.1. $\mathfrak{n}_0$ が large であるためには, 任意の Harish-Chandra $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ -加群の $U(x \cdot \mathfrak{n})$ への制限が good となるような $x \in \text{Int}(\mathfrak{g}_0)$ が存在することが必要十分条件である.

さらに, Frobenius の相互律と合わせて, 対応するリー群の誘導表現の重複度につき次のことがわかる.

命題 1.2. G を $\mathfrak{g}_0$ をリー環とする (中心有限な) リー群, N を G の閉部分群とする. N のリー環 $\mathfrak{n}_0$ が $\mathfrak{g}_0$ において large であれば, N の任意の有限次元表現 η に対し 誘導表現 $\text{Ind}_N^G(\eta)$ は重複度有限である.

例. 次の 2 種類の部分リー環は $\mathfrak{g}_0$ において large である.

- (i) $\mathfrak{g}_0$ の岩沢分解 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{a}_{\mathfrak{p},0} + \mathfrak{n}_{\mathfrak{m},0}$ に現れる極大べき零部分リー環 $\mathfrak{n}_{\mathfrak{m},0}$.
- (ii) $\mathfrak{g}_0$ の任意の対合 σ の固定部分リー環 $\mathfrak{h}_0 = \{X \in \mathfrak{g}_0 \mid \sigma(X) = X\}$.

もっと一般に,

定理 1.3. $\mathfrak{n}_0 + \mathfrak{q}_{\mathfrak{m},0} = \mathfrak{g}_0$ なる $\mathfrak{g}_0$ の極小放物型部分環 $\mathfrak{q}_{\mathfrak{m},0}$ が存在するとき 部分リー環 $\mathfrak{n}_0$ は $\mathfrak{g}_0$ において large である.

注意. $\mathfrak{n}_0$ が $\mathfrak{g}_0$ において代数的ならばこの定理の逆も成り立つ. これは, 命題 1.2 と 誘導表現における重複度についての Bien-Oshima の結果を組み合わせることからわかる.

2. 離散系列の随伴多様体と gradient 型微分作用素 [15].

2.1. 前節の如く, G を中心有限な半単純リー群とし, K を G の極大 compact 部分群とする. 対応するリー環をそれぞれ $\mathfrak{g}_0, \mathfrak{k}_0$ で表す. G の離散系列表現を考察するので, これ以降 階数条件 $\text{rank } G = \text{rank } K$ を仮定する. 最初に, G の離散系列表現の添数づけと lowest K -type 定理述べ, 以後の議論で必要となる記号を準備する.

$\mathfrak{k}_0$ の極大可環部分環 $\mathfrak{t}_0$ をとり, $\mathfrak{g}_0$ の複素化 $\mathfrak{g} = (\mathfrak{g}_0)_\mathbb{C}$ の $\mathfrak{t} = (\mathfrak{t}_0)_\mathbb{C}$ に関する root 系を Δ で表す. 各 $\alpha \in \Delta$ に対する root 部分空間

$$\mathfrak{g}_\alpha := \{X \in \mathfrak{g} \mid [Z, X] = \alpha(Z)X \ (\forall Z \in \mathfrak{t})\}$$

は $\mathfrak{k}$ あるいは $\mathfrak{p}$ のいずれか一方にのみ含まれる. $\mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{k}$ (resp. $\mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{p}$) になるとき root α は compact (resp. noncompact) であるといい, compact root (resp. noncompact root) 全体のなす Δ の部分集合をそれぞれ Δ_c (resp. Δ_n) で表す.

いま, Δ_c の正 root 系 Δ_c^+ を任意に固定し, 次の 3 条件を満たす $\mathfrak{t}$ 上の線型形式 Λ 全体のなす集合を Ξ で表す:

$$(2.1) \quad (\Lambda, \alpha) \geq 0 \quad \forall \alpha \in \Delta_c^+, \text{ i.e., } \Lambda \text{ は } \Delta_c^+ \text{-dominant,}$$

$$(2.2) \quad (\Lambda, \alpha) \neq 0 \quad \forall \alpha \in \Delta, \text{ i.e., } \Lambda \text{ は } \Delta \text{-regular,}$$

$$(2.3) \quad \text{写像 } Z \rightarrow \exp \langle \Lambda + \rho, Z \rangle \quad (Z \in \mathfrak{t}_0) \text{ は Cartan 部分群 } T := \exp \mathfrak{t}_0 \text{ の一次元表現を定める, i.e., } \Lambda + \rho \text{ は } T \text{-integral.}$$

ここで, $(\cdot, \cdot)$ は $\mathfrak{g}$ の Killing 形式から定まる $\mathfrak{t}^*$ 上の非退化双一次形式, ρ は正の root の和の $1/2$ 倍を表す ((2.3) は ρ を定める正 root 系の取り方によらない条件であることに注意).

このとき, Ξ と G の離散系列表現の unitary 同値類全体のなす集合の間に 1 対 1 対応が存在する (Harish-Chandra[4]). $\Lambda \in \Xi$ に対応する離散系列表現を π_Λ で表し, Λ を π_Λ の Harish-Chandra parameter と呼ぶ.

さて, Δ_c^+ -dominant かつ T -integral な線型形式 $\mu \in \mathfrak{t}^*$ に対し, μ を highest weight とする K の有限次元既約表現を τ_μ で表す. $\Lambda \in \Xi$ に対して,

$$(2.4) \quad \lambda := \Lambda - \rho_c + \rho_n = (\Lambda - 2\rho_c) + \rho = (\Lambda + 2\rho_n) - \rho,$$

とおく. ただし, 正 root の和の半分 ρ は正 root 系 $\Delta^+ := \{\alpha \in \Delta \mid (\Lambda, \alpha) > 0\}$ に関するものとし, $\rho_c := (1/2) \cdot \sum_{\alpha \in \Delta_c^+} \alpha$, $\rho_n := \rho - \rho_c$ と定める.

命題 2.1. (cf. [3]) G の離散系列表現 π_Λ は lowest K -type τ_λ をもつ. すなわち,

(i) τ_λ は π_Λ の K -type として重複度 1 で現れる.

(ii) π_Λ に K -type として現れる既約 K -加群の highest weight は

$$\lambda + \sum_{\alpha \in \Delta^+} n_\alpha \alpha$$

の形に限る. ここに n_α は非負整数.

$\lambda = \Lambda - \rho_c + \rho_n$ を π_Λ の lowest highest weight (または Blattner parameter) という.

2.2. 微分作用素 $\mathcal{D}_\lambda$ による離散系列の実現. 有限次元 K -加群 (τ, V) に対して, V に値をもつ G 上の実解析的函数 f で, 条件

$$(2.5) \quad f(gk) = \tau(k)^{-1} f(g) \quad (g \in G, k \in K)$$

を満たすもの全体のなす線型空間を $\mathcal{A}(\tau)$ で表す. このとき, 群 G は $\mathcal{A}(\tau)$ に左移動により作用し, さらにこの G -作用の微分によって $\mathcal{A}(\tau)$ は $U(\mathfrak{g})$ -加群の構造をもつ.

$\lambda = \Lambda - \rho_c + \rho_n$ を G の離散系列表現 π_Λ の lowest highest weight とする. $(X_i)_{i=1}^s$ を線型空間 $\mathfrak{p} (\subset \mathfrak{g})$ の基底とし, $\mathfrak{g}$ の Killing 形式 B (の $\mathfrak{p}$ への制限) に関する $\mathfrak{p}$ の双対基底を $(X_i^*)_{i=1}^s$ で表す: $B(X_i, X_j^*) = \delta_{ij}$ (Kronecker's δ). $f \in \mathcal{A}(\tau_\lambda)$ に対して,

$$(2.6) \quad \nabla_\lambda f(g) := \sum_{i=1}^s R_{X_i} f(g) \otimes X_i^* \quad (g \in G),$$

とおく. ここに, $X \rightarrow R_X$ は $U(\mathfrak{g})$ から G 上の左不変微分作用素全体のなす環への同型写像である.

このとき ∇_λ は基底 $(X_i)_{i=1}^s, (X_i^*)_{i=1}^s$ の取り方によらず, $\mathcal{A}(\tau_\lambda)$ から $\mathcal{A}(\tau_\lambda \otimes \text{Ad}_\mathfrak{p})$ への G -作用と可換な 1 階微分作用素を定めることがわかる. ここに, $\text{Ad}_\mathfrak{p}$ は K の $\mathfrak{p}$ 上への随伴表現を表す.

K -加群 $V_\lambda \otimes \mathfrak{p}$ において, $\lambda \pm \beta$ ($\beta \in \Delta_n^+$) なる形の highest weight に対応する vector から生成される K -部分加群をそれぞれ $(\tau_\lambda^\pm, V_\lambda^\pm)$ で表し, 分解 $V_\lambda \otimes \mathfrak{p} = V_\lambda^+ \oplus V_\lambda^-$ に沿った V から V_λ^- への射影作用素を P_λ で表す. ここで, $\Delta_n^+ := \{\alpha \in \Delta_n \mid (\Lambda, \alpha) > 0\}$ は正の noncompact root 全体のなす集合である.

∇_λ と P_λ を合成して得られる微分作用素:

$$(2.7) \quad \mathcal{D}_\lambda : \mathcal{A}(\tau_\lambda) \ni f \rightarrow \mathcal{D}_\lambda f := P_\lambda(\nabla_\lambda f(\cdot)) \in \mathcal{A}(\tau_\lambda^-)$$

を λ に付随した G 上の gradient 型微分作用素と呼ぶ.

定理 2.1. (Schmid, Hotta-Parthasarathy, Wallach, cf. [13, I, Th.1.5]) 離散系列表現 π_Λ ($\Lambda \in \Xi$) は $\mathcal{D}_\lambda f = 0$ を満たす G 上 2 乗可積分な函数 $f \in \mathcal{A}(\tau_\lambda)$ 全体のなす Hilbert 空間上に G の左移動により 実現される.

2.3. 離散系列に対する随伴多様体の記述. $\Lambda \in \Xi$ に対応する離散系列 π_Λ が定める Harish-Chandra $(\mathfrak{g}, K)$ -加群を H_Λ で表す. H_Λ は π_Λ の表現空間の K -有限部分として得られ, π_Λ の既約性から H_Λ は $U(\mathfrak{g})$ -加群として既約であることがわかる.

いま, $\mathfrak{p}_\pm := \bigoplus_{\alpha \in \Delta_\pm^+} \mathfrak{g}_{\pm\alpha}$ とおく. このとき, $\mathfrak{p}_\pm$ はべき零多様体 $\mathcal{N}(\mathfrak{p})$ に含まれる線型空間で Λ が属する Weyl chamber のみによって定まる. さらに $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_+ \oplus \mathfrak{p}_-$ が成り立つ.

Harish-Chandra 加群 H_Λ の随伴多様体 $\mathcal{V}(H_\Lambda)$ を $\mathfrak{p}_-$ を用いて次のように記述することができる.

定理 2.2. $\Lambda \in \Xi$ に対して,

$$(2.8) \quad \mathcal{V}(H_\Lambda) = K_C \mathfrak{p}_- = \text{Ad}(K) \mathfrak{p}_- \subset \{X \in \mathfrak{p} \mid P_\lambda(v \otimes X^*) = 0 \ \exists v \in V_\lambda \setminus (0)\}$$

が成り立つ. さらに λ が十分 Δ_c -regular なとき上式 $\subset$ で等号が成り立つ. ここに $X \in \mathfrak{p}$ の実型 $\mathfrak{p}_0$ に関する複素共役を X^* で表す.

これが本節の主定理である.

注意. $\mathcal{D}_\lambda$ を G/K 上の vector 束 $G \times_K V_\lambda$ から $G \times_K V_\lambda^-$ への微分作用素とみなすとき, 原点 $eK = K \in G/K$ における $\mathcal{D}_\lambda$ の表象写像 $\sigma(\mathcal{D}_\lambda, X) \in \text{Hom}_C(V_\lambda, V_\lambda^-)$

($X \in \mathfrak{p}_0$) は

$$(2.9) \quad \sigma(\mathcal{D}_\lambda, X)v = P_\lambda(v \otimes X) \quad (v \in V_\lambda)$$

で与えられる. ここで, Killing form を通して, $\mathfrak{p}_0$ を G/K の原点における余接空間と同一視している. $X \rightarrow \sigma(\mathcal{D}_\lambda, X)$ を $\mathfrak{p}$ 上 $\mathbb{C}$ -線型に拡張しておく.

このとき, (2.8) の最右辺は $\text{Ker} \sigma(\mathcal{D}_\lambda, X^*) \neq (0)$ なる $X \in \mathfrak{p}$ 全体のなす集合である.

上の定理から H_Λ に付随する原始 ideal $I_\Lambda := \text{Ann}_{U(\mathfrak{g})} H_\Lambda$ が定める多様体について次の系を導き出すことができる.

系 2.1. 商 $U(\mathfrak{g})$ -加群 $U(\mathfrak{g})/I_\Lambda$ の随伴多様体は

$$(2.10) \quad \mathcal{V}(U(\mathfrak{g})/I_\Lambda) = \overline{G_C \mathcal{V}(H_\Lambda)} = \overline{G_C \mathfrak{p}_-}$$

で与えられる. ここに $\overline{A}$ は集合 $A \subset \mathfrak{g}$ の Zariski 位相に関する閉包を表す.

2.4. 定理 2.2 の証明の方針と概略. 微分作用素 $\mathcal{D}_\lambda$ の多項式化写像 (polynomialization) $\text{Gr}[\mathcal{D}_\lambda]$ を導入し, その核空間 $\text{Ker}(\text{Gr}[\mathcal{D}_\lambda])$ の K -加群構造に関する Hotta-Pathasarathy[7] の結果を本質的に用いて定理 2.2 を証明する.

2.4.1. 第 1 段階. 任意に与えられた有限次元 K -加群 (τ, V) に対して, 誘導加群 $\mathcal{A}(\tau)$ の減少 filtration $(\mathcal{A}_{(k)})_{k=0,1,\dots}$ を

$$\mathcal{A}_{(k)} := \{f \in \mathcal{A}(\tau) \mid (X^m f)(1) = (0) \ (\forall X \in \mathfrak{p}, 0 \leq \forall m \leq k)\},$$

で定義する. 各 $\mathcal{A}_{(k)}$ は $\mathcal{A}(\tau)$ において余次元有限かつ K -不変な部分空間であり, $U(\mathfrak{g})$ の $\mathcal{A}(\tau)$ への作用は 階数つき線型空間:

$$\mathrm{Gr} \mathcal{A}(\tau) := \bigoplus_k \mathcal{A}_{(k)} / \mathcal{A}_{(k+1)},$$

に $(S(\mathfrak{g}), K)$ -加群の構造を定める. この加群は, $\mathfrak{g}$ から V への多項式写像で $\mathfrak{k}$ 上恒等的に 0 であるものの全体のなす $(S(\mathfrak{g}), K)$ -加群と同型であることがわかる:

$$\mathrm{Gr} \mathcal{A}(\tau) \simeq S(\mathfrak{p}) \otimes V, \quad S(\mathfrak{p}) \simeq S(\mathfrak{g}) / \mathfrak{k}S(\mathfrak{g}).$$

ここに, 群 K は $S(\mathfrak{p}) \otimes V$ に $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{p}} \otimes \tau$ により作用し, $\mathfrak{g}$ の各元は方向微分により働く. また, $X \in \mathfrak{p}$, $v \in V$ および非負整数 m に対し, $X^m \otimes v$ は $(X^m \otimes v)(Z) = B(X, Z)^m v$ ($Z \in \mathfrak{g}$) (B : Killing 形式) により定まる多項式写像であることに注意.

さて, gradient 型微分作用素 $\mathcal{D}_\lambda : \mathcal{A}(\tau_\lambda) \rightarrow \mathcal{A}(\tau_\lambda^-)$ は対応する階数つき $(S(\mathfrak{g}), K)$ -加群の準同型写像:

$$\mathrm{Gr}[\mathcal{D}_\lambda] : \mathrm{Gr} \mathcal{A}(\tau_\lambda) = S(\mathfrak{p}) \otimes V_\lambda \rightarrow S(\mathfrak{p}) \otimes V_\lambda^- = \mathrm{Gr} \mathcal{A}(\tau_\lambda^-)$$

を自然に誘導する. これを $\mathcal{D}_\lambda$ の多項式化写像という. $f = X^m \otimes v \in S(\mathfrak{p}) \otimes V_\lambda$ に対して, $\mathrm{Gr}[\mathcal{D}_\lambda]f$ は

$$(2.11) \quad \mathrm{Gr}[\mathcal{D}_\lambda]f = mX^{m-1} \otimes P_\lambda(v \otimes X)$$

で与えられることに注意する.

補題 2.1. $\lambda = \Lambda + \rho_n - \rho_c$ が十分 Δ_c -regular なとき, 離散系列の Harish-Chandra 加群 H_Λ の双対 $(\mathfrak{g}, K)$ -加群 H_Λ^* が定める随伴多様体は $\mathrm{Gr}[\mathcal{D}_\lambda]$ を用いて次のように記述される:

$$\mathcal{V}(H_\Lambda^*) = \{X \in \mathfrak{g} \mid f(X) = 0, \quad \forall f \in \mathrm{Ann}_{S(\mathfrak{g})} \mathrm{Ker}(\mathrm{Gr}[\mathcal{D}_\lambda])\}$$

注意. w_0 を $w_0\Delta_c^+ = -\Delta_c^+$ なる Δ_c の Weyl 群の最長元とすると, $H_\Lambda^* \simeq H_{-w_0\Lambda}$ が成り立つ. 従って, 定理 2.2 の主張は

$$(2.12) \quad \mathcal{V}(H_\Lambda^*) = K_C \mathfrak{p}_+ = \mathrm{Ad}(K) \mathfrak{p}_+ \subset \{X \in \mathfrak{p} \mid P_\lambda(v \otimes X) = 0 \quad \exists v \in V_\lambda \setminus (0)\},$$

および λ が十分 Δ_c -regular な場合の等号成立, と同値となる. 上の補題を踏まえて, 2.4.3 では後者を証明する.

2.4.2. 第 2 段階. v_λ を V_λ の highest weight vector とし, 各 $k = 0, 1, \dots$ に対して $S^k(\mathfrak{p}_+) \otimes v_\lambda$ から生成される $S(\mathfrak{p}) \otimes V_\lambda$ の部分 K -加群を $Q_k^+(\lambda)$ で表す. このとき, $\mathrm{Gr}[\mathcal{D}_\lambda]$ の定義から,

$$(2.13) \quad \text{Ker}(\text{Gr}[\mathcal{D}_\lambda]) \cap (S^k(\mathfrak{p}) \otimes V_\lambda) \supset Q_k^+(\lambda)$$

が成り立つことが容易にわかる.

逆に, 次の命題が成り立つことが証明できる.

命題 2.2. 各 $k \geq 0$ に対して, 正数 c_k が存在して, 離散系列の lowest highest weight λ が条件 $(\lambda, \alpha) > c_k \ (\forall \alpha \in \Delta_c^+)$ を満たすならば, (2.13) において等式が成り立つ.

さらに, この命題と (2.13) から $S(\mathfrak{g})$ -加群 $\text{Ker}(\text{Gr}[\mathcal{D}_\lambda])$ の零化 ideal について次を得る.

命題 2.3. べき零錐 $K_C \mathfrak{p}_+$ が定める $S(\mathfrak{g})$ の ideal を $\mathcal{I}(K_C \mathfrak{p}_+) = \{f \in S(\mathfrak{g}) \mid f(X) = 0 \ (\forall X \in K_C \mathfrak{p}_+)\}$ とする. このとき,

$$(2.14) \quad \text{Ann}_{S(\mathfrak{g})} \text{Ker}(\text{Gr}[\mathcal{D}_\lambda]) \subset \mathcal{I}(K_C \mathfrak{p}_+).$$

が成り立つ. さらに, λ が十分 Δ_c -regular であれば上式において等号が成り立つ.

注意. 正の compact root 系 Δ_c^+ に対応する K_C の Borel 部分群を B とする. このとき, $K_C = \text{Ad}(K)B$ であり, 部分空間 $\mathfrak{p}_+$ は B -stable である. このことから, 等式 $K_C \mathfrak{p}_+ = \text{Ad}(K)\mathfrak{p}_+$ が成り立ち, この集合が (Zariski) 閉集合であることがわかる.

2.4.3. 証明の完結. 定理の主張と同値な (2.12) を証明する. (2.12) の最右辺の集合を Θ で表す. $P_\lambda(v_\lambda \otimes \mathfrak{p}_+) = (0)$ から, まず $K_C \mathfrak{p}_+ \subset \Theta$ はつねに成り立つ. このことと Zuckerman による translation principle を勘案すれば parameter λ は十分 Δ_c -regular である場合を考えればよい.

このとき, 補題 2.1, 命題 2.3 およびその後の注意から $\mathcal{V}(H_\lambda^*) = K_C \mathfrak{p}_+ = \text{Ad}(K)\mathfrak{p}_+$ を得る. いま, $X \in \Theta$ とし, $P_\lambda(v \otimes X) = 0$ なる vector $v \in V_\lambda, \neq 0$ をとる. (2.11) より $X^k \otimes v \in \text{Ker}(\text{Gr}[\mathcal{D}_\lambda])$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) がわかる. これから, X は零化 ideal $\text{Ann}_{S(\mathfrak{g})} \text{Ker}(\text{Gr}[\mathcal{D}_\lambda])$ の共通零点であり, 再び命題 2.3 より $X \in K_C \mathfrak{p}_+$ を得る. 結局, $\Theta = K_C \mathfrak{p}_+$ となって定理 2.2 の証明が完結する.

3. 離散系列表現の Gelfand-Kirillov 次元 [15].

定理 2.2 と系 2.1 の応用例として, G の離散系列に対応する Harish-Chandra 加群の Gelfand-Kirillov 次元を表す公式を具体的に与える.

3.1. 方法. $\Lambda \in \Xi$ に対して, $\mathfrak{p}$ の部分空間 $\mathfrak{p}_- = \bigoplus_{\beta \in \Delta_+^+} \mathfrak{g}_{-\beta}$ と空でない交わりをもつ $\mathfrak{g}$ のべき零 G_C -軌道のうちで, 閉包関係に関して極大なものの $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}_-}$ をとる. ここで $\mathfrak{p}_-$ は Λ の属する Weyl chamber にのみ依存して決まることに注意する. 系 2.1: $\mathcal{V}(U(\mathfrak{g})/I_\Lambda) = \overline{G_C \mathfrak{p}_-}$, および $U(\mathfrak{g})$ の primitive quotient から定まるこの多様体はただ一つのべき G_C -零軌道の閉包であるという事実 (cf. [2, III]) によって, $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}_-}$ は $\mathfrak{p}_-$ に対して一意的に定まることがわかる. $2 \dim \mathcal{V}(H_\Lambda) = \dim \mathcal{V}(U(\mathfrak{g})/I_\Lambda)$ ([11]) を勘案して, 結局

$$(3.1) \quad d(H_\Lambda) = \frac{1}{2} \dim \mathcal{O}_{\mathfrak{p}_-}$$

を得る.

従って, (a) べき零軌道 $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}_-}$ を具体的に特定し, (b) $\mathfrak{g}$ のべき零軌道に対する次元公式 ($\mathfrak{g}$ が古典型ときには [5, Cor.3.8] により既知) を $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}_-}$ に対して用いること, により Gelfand-Kirillov 次元 $d(H_\Lambda)$ を表す公式が得られることになる.

3.2. ここでは, unitary 群 $G = SU(p, q)$ に対して上記の方法で $d(H_\Lambda)$ を求める. ただし, p, q は $n := p + q > 0$ なる非負整数を表す. 群 G を

$$G = \{g \in SL(n, \mathbb{C}) \mid {}^t \bar{g} I_{p,q} g = I_{p,q}\}$$

と実現する. ここに,

$$I_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix} \quad (I_r \text{ } r\text{-次恒等行列}).$$

このとき, リー環 $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \mathfrak{t}$ および部分空間 $\mathfrak{p}$ は次のように与えられる:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &= \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) := \{X \in M(n, n) \mid \operatorname{tr} X = 0\}, \\ \mathfrak{k} &= \left\{ \begin{pmatrix} Y_1 & 0 \\ 0 & Y_2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g} \mid Y_1 \in M(p, p), Y_2 \in M(q, q) \right\}, \\ \mathfrak{t} &= \{Z = \operatorname{diag}(t_1, \dots, t_n) \mid t_i \in \mathbb{C}, \operatorname{tr} Z = 0\}, \\ \mathfrak{p} &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & V \\ W & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g} \mid V \in M(p, q), W \in M(q, p) \right\}. \end{aligned}$$

ここに, $M(k, l)$ は k 行 l 列行列全体のなす空間である. $e_{ij}(Z) := t_i - t_j$ ($Z \in \mathfrak{t}$) とおくと, $\mathfrak{g}$ の root 系 Δ (resp. $\Delta_c \subset \Delta$) と compact 部分 root 系 Δ_c はそれぞれ

$$\Delta = \{e_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n, i \neq j\}, \quad \Delta_c = \{e_{ij} \in \Delta \mid 1 \leq i, j \leq p \text{ or } p < i, j \leq n\}$$

となる. Δ_c の正 root 系を

$$\Delta_c^+ := \{e_{ij} \in \Delta_c \mid i < j\}.$$

と取って固定しておく.

$F(n) := \{1, 2, \dots, n\}$ から 2 点集合 $\{a, b\}$ への写像 h で, 逆像 $h^{-1}(a)$ がちょうど p 個の点からなるもの全体のなす集合を $\Pi_{p,q}$ で表す. $F(n)$ の部分集合 $h^{-1}(a), h^{-1}(b)$ の要素をそれぞれ

$$\begin{aligned} (w(1), w(2), \dots, w(p)) & \quad w(1) < w(2) < \dots < w(p), \\ (w(p+1), w(p+2), \dots, w(n)) & \quad w(p+1) < w(p+2) < \dots < w(n), \end{aligned}$$

の如くならべる. かくして定まる $F(n)$ の置換 w を用いて,

$$(3.2) \quad \Delta^+(h) := \{e_{ij} \in \Delta \mid w(i) < w(j)\}$$

と定義する. このとき, 対応 $h \rightarrow \Delta^+(h)$ は $\Pi_{p,q}$ から $\Delta_c^+ \subset \Delta^+$ なる Δ の正 root 系 Δ^+ のなす集合への全単射を与えることが容易にわかる.

いま, $h \in \Pi_{p,q}$ とする. $\Delta^+(h)$ -dominant な Λ を parameter とする離散系列 H_Λ が定めべき零 G_C -軌道 $\mathcal{O}_{p_-}$, Gelfand-Kirillov 次元 $d(H_\Lambda)$ は Λ の選び方に無関係に定まる. これらをそれぞれ $\mathcal{O}_{p_-}(h)$, $\text{GKD}(h)$ と表記する. $F(n)$ から $\{a, b\}$ への写像全体のなす集合を $\Pi(n) := \cup_{p+q=n} \Pi_{p,q}$ で表し, さらに n を動かして $\Pi := \cup_{n=1}^\infty \Pi(n)$ (disjoint union) とおく. 各 $\Pi_{p,q}$ 上定義された対応 $h \rightarrow \mathcal{O}_{p_-}(h)$, $h \rightarrow \text{GKD}(h)$ を Π 上へ自然に拡張しておく.

3.3. $\mathcal{O}_{p_-}(h)$ および $\text{GKD}(h)$ の特定. 写像 $\mathcal{O}_{p_-}(\cdot)$, $\text{GKD}(\cdot)$ を具体的に記述する. $h \in \Pi(n)$ ($n > 0$) とする. 集合 $F(n)$ 上に

$$i \stackrel{h}{\sim} j \Leftrightarrow \text{函数 } h \text{ は区間 } [i, j] \text{ 上一定の値をとる,}$$

により定まる同値関係 $\stackrel{h}{\sim}$ を導入し, この関係に関する $F(n)$ における同値類の完全代表系 $I_h \subset F(n)$ を任意にとる. I_h の要素の個数は代表系のとりかたに無関係であることに注意し, これを $|h|$ で表す.

いま, $F(n)$ から I_h の要素を取り除き, 数字の大小を保ったまま番号をつけかえることで得られる全単射:

$$\zeta: F(n) \setminus I_h \rightarrow F(n - |h|),$$

$$i < j \Leftrightarrow \zeta(i) < \zeta(j), \quad i, j \in F(n) \setminus I_h,$$

を通して, $Rh \in \Pi(n - |h|)$ を

$$(3.3) \quad Rh := h \circ \zeta^{-1}$$

で定義する. Rh も I_h の取り方に依らない. かくして得られる対応 $R: \Pi(n) \rightarrow \Pi(n - |h|)$ を自然に Π 上へ拡張しておく.

$h \in \Pi(n)$ から出発して R を繰り返し用いることにより, Π の要素の有限列 $(R^k(h))_{0 \leq k \leq l}$

$$(3.4) \quad R^k(h) \in \Pi(n_k(h)), \quad n_k(h) = n - \sum_{j=0}^{k-1} |R^j(h)|,$$

を得る. ここで l は次の条件で特徴づけられる非負整数である:

$$|R^l(h)| = n_l(h) > 0.$$

さて, $(r_k)_{0 \leq k \leq l}$, $r_k := |R^k(h)|$, は n の分割を与えることに注意して,

$$J[h] := J(r_0) \oplus J(r_1) \oplus \cdots \oplus J(r_l) \in \mathfrak{g},$$

とおく. ただし, $J(m)$ は m 次の Jordan 行列を表す:

$$J(m) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

これらの記号のもとに, $\mathcal{O}_{p_-}(h)$, $\text{GKD}(h)$ を次のごとく記述することができる.

定理 3.1. $h \in \Pi(n)$ とする.

- (i) べき零軌道 $\mathcal{O}_{p_-}(h)$ は行列 $J[h]$ を含む G_C -共役類に一致する: $\mathcal{O}_{p_-}(h) = G_C \cdot J[h]$.
- (ii) さらに, 対応する離散系列の Gelfand-Kirillov 次元は,

$$(3.5) \quad \text{GKD}(h) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^l (2n_k(h) - r_k)(r_k - 1) = \frac{1}{2} (n^2 - \sum_{k=0}^l (2k+1)r_k)$$

により与えられる.

注意. (i) の証明について: $G_C \cdot J[h] \cap p_- \neq \emptyset$ を確かめるのは容易である. $\mathcal{O}$ が p_- と交わる G_C -軌道のなかで極大なものであることを示すために, $\mathfrak{g}$ の放物型部分環に付随した Richardson 軌道を特定した [6, §4] の結果を使う.

例: $G = SU(p, 2)$ ($p \geq 2$) の場合. $h \in \Pi_{p,2}$ は $h(i_1) = h(i_2) = b$ なる $i_1, i_2 \in F(p+2)$ の位置によって 7 通りの型 I-VII に分けられる. 各型に対応して定まる $(r_k)_{0 \leq k \leq l}$ および $\text{GKD}(h)$ は次のように与えられる.

型	$(h(i))_i$	$(r_k)_k$	GKD(h)
I	$(bba \dots a)$	$(2, 2, 1, \dots, 1)$	$2p$
II	$(ba \dots aba \dots a)$	$(4, 1, \dots, 1)$	$3p$
III	$(ba \dots ab)$	$(3, 1, \dots, 1)$	$2p + 1$
IV	$(a \dots abba \dots a)$	$(3, 3, 1, \dots, 1) (p \geq 4)$	$4p - 4$
		$(3, 2) (p = 3)$	8
		$(3, 1) (p = 2)$	5
V	$(a \dots aba \dots aba \dots a) (p \geq 3)$	$(5, 1, \dots, 1)$	$4p - 2$
VI	$(a \dots aba \dots ab)$	$(4, 1, \dots, 1)$	$3p$
VII	$(a \dots abb)$	$(2, 2, \dots, 1)$	$2p$

ここで, I および VII は正則あるいは反正則離散系列表現に対応している.

参考文献

- [1] D.Barbasch and D.Vogan, Weyl group representations and nilpotent orbits, in "Representation Theory of Reductive Groups (P.C.Trombi, ed.)," Birkhäuser, 1983, pp.21-33.
- [2] W.Borho and J.-L.Brylinski, Differential operators on homogeneous spaces I, Invent.math. **69** (1982), 437-476; III, ibid. **80** (1985), 1-68.
- [3] M.Duflo, Représentations de carré intégrable des groupes semi-simples réels, Exposé 508, Séminaire Bourbaki, 1977/78, pp.22-40.
- [4] Harish-Chandra, Discrete series for semisimple Lie groups, I, II, Acta Math., **113** (1965), 241-318; ibid. **116** (1966), 1-111.
- [5] W.Hesselink, Singularities in the nilpotent scheme of a classical group, Trans.Amer.Math.Soc., **222** (1976), 1-32.
- [6] T.Hirai, Structure of unipotent orbits and Fourier transform of unipotent orbital integrals for semisimple Lie groups, in "Lectures on Harmonic Analysis on Lie Groups and Related Topics (T.Hirai and G.Schiffman eds.)", Lectures in Math., Kyoto Univ., **14**, 1982, pp.75-138.
- [7] R.Hotta and R.Parthasarathy, Multiplicity formulae for discrete series, Invent.math. **26** (1974), 133-178.

- [8] A.W.Knapp and N.R.Wallach, Szegő kernels associated with discrete series, *Invent.math.*, **34** (1976), 163-200; **62** (1980), 341-346.
- [9] W.Schmid, On the realization of the discrete series of a semisimple Lie group, *Rice Univ.Studies*, **56** (1970), 99-108.
- [10] W.Schmid, Construction and classification of irreducible Harish-Chandra modules, *in* "Harmonic Analysis on Reductive Groups (W.Barker and P.Sally eds.)," Birkhäuser, 1991, pp.235-276.
- [11] D.A.Vogan, Gelfand-Kirillov dimension for Harish-Chandra modules, *Invent.math.* **48** (1978), 75-98.
- [12] D.A.Vogan, Associated varieties and unipotent representations, *in* "Harmonic Analysis on Reductive Groups (W.Barker and P.Sally eds.)," Birkhäuser, 1991, pp.315-388.
- [13] H.Yamashita, Embeddings of discrete series into induced representations of semisimple Lie groups, I, *Japan.J.Math.(N.S.)* **16** (1990), 31-95; II, *J.Math.Kyoto Univ.* **31** (1991), 543-571.
- [14] H.Yamashita, Criteria for the finiteness of restriction of $U(\mathfrak{g})$ -modules to subalgebras and applications to Harish-Chandra modules: study in relation with the associated varieties, to appear in *J.Funct.Anal.* (The principal results have been announced in *Proc.Japan Acad.* **68** (1992), 316-321.)
- [15] H.Yamashita, Associated varieties and Gelfand-Kirillov dimensions for the discrete series of a semisimple Lie group, to appear. (A short version of the article has been published in *RIMS Kôkyûroku* **826** (1993), pp.27-41.)