

Configuration space 上の measure space と Poisson measure から生成された diffeomorphism の群の表現

下村宏彰

福井大学教員部

SO, 序. X を連結でパラコンパクト (しかも, コンパクトではない) C^∞ -多様体, m を局所的にルベーグ測度と同値で, X の density は滑らかな X 上の測度とする。 Vershik-Gel'fand-Gracov は [4] において X 上の infinite configuration の空間 $\overline{I}_X$ において定義された単不変測度, 特に Poisson measure P_m を用いて $\text{diff } X$ (X 上の compact support をもつ diffeomorphism の作る群) の表現を構成した。

完成度が高く, 多くの素晴らしい結果を含んでいる論文の若干の補足と多少の一般化を行うことが本論の目的である。以下の内容をかいつまんで述べるようになる。始めに位置の空間 I_X の概念を, 一般の位相空間へ拡張して, I_X に自然な測度構造を導入して $(I_X, \mathcal{C})$ が測度論的に扱いやすい標準空間であることを示す。次は $(I_X, \mathcal{C})$ 上の Poisson measure P_m について m を動かして, 相互の絶対連続性を論ずる。最後に $V-G-G$ によって得られた, Poisson measure から生成された $\text{diff } X$ の基本表現の同値性に関する結果を一般化する。主たる結果は次の通りである。

(a) P_m と $P_{m'}$ は $\int_X \left| \sqrt{\frac{dm'}{dm}}(x) - 1 \right|^2 m(dx) < \infty$ 又は $= \infty$ に従い、2 同値又は特異である。

(b) $\dim(X) > 1$ のとき、 μ の μ 等分表現 U_m^μ と $U_{m'}^{\mu'}$ (定義は § 3 参照のこと) は P_m と $P_{m'}$ の測度として同値かつ ρ と ρ' が μ の μ 等分表現として同値のときかつそのとき限り同値。

§ 1. 配置空間の基本的概念について.

1.1 配置空間の定義.

$K \in \text{Polish space}$, i.e. K は位相空間であり、 K の位相は (K, d) が完備可分距離空間となるような K 上の距離 d から導かれる。とする。 $K^n \in K$ の n 個の直積空間とすると K^n は距離 $d_K(x, y) = \sum_{i=1}^n d(x_i, y_i)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in K^n$ により再び Polish space となる。また $\tilde{K}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in K^n \mid x_i \neq x_j, x_i \neq x_j\}$ とおくと $\tilde{K}^n$ は K^n の開集合である。従って、 $\tilde{K}^n$ は $\tilde{K}^n$ 上の距離 d_K により $\tilde{K}^n$ は部分位相 Polish space となる。

次に K の n 点集合 σ の全体を作る集合 B_K^n について考えよう。

$\forall \sigma = \{x_1, \dots, x_n\}, \forall \sigma' = \{x'_1, \dots, x'_n\} \in B_K^n$ について $d_K^{(n)} =$

$\inf_{\sigma \in \mathcal{C}_n} d_K^{(n)}((x_1, \dots, x_n), (y_{\sigma(1)}, \dots, y_{\sigma(n)}))$ とおくと ($\mathcal{C}_n$ は対称群)

($B_K^n, d_K^{(n)}$) は再び Polish space である。(このことは $\tilde{K}^n$ が Polish space であることと容易に check できる) の位相

から定義される Borel 集合族を $\mathcal{B}(B_K^n)$ とおこう。

また B_K^n 上の number map $N_A \ni N_A(\sigma) = |\sigma \cap A| = \sigma \cap A$ の点の個数 とおいて定義する。

定理 1.1. $(B_K^n, d_K^{(n)})$ は Polish space であり $\mathcal{B}(B_K^n)$ は $N_B(\cdot)$ (B : Borel set in K) とおいて measurable にする最小の σ -field $\mathcal{B}$ と一致する。

定理 1.1 は 次の 2 つの補題の直接の結果である。

補題 1.1. $U \subseteq K$ の開集合とする $\mathcal{U} = \{\sigma \mid N_U(\sigma) \geq l\}$ は任意の l について B_K^n の開集合である。

補題 1.2. $\forall \varepsilon > 0$ と $\forall \gamma \in B_K^n$ についてある B_K^n の開集合 $O_\varepsilon(\gamma)$ があり $\gamma \in O_\varepsilon(\gamma) \subset \{\sigma' \mid d_K^{(n)}(\gamma, \gamma') < \varepsilon\}$, かつ $O_\varepsilon(\gamma) \in \mathcal{B}$.

容易にわかるので 2 つの補題の証明は省略する。

さて今度は B_K^n ($n=0, 1, 2, \dots$) の直和: $B_K = \sum_{n=0}^{\infty} B_K^n$, 但し $B_K^0 = \{\emptyset\}$, とおき, X に直和位相をよせる。すると B_K は Polish space であり X の Borel 集合族は $N_B(\cdot)$ (B : Borel set in K) とおいて可測にする最小の σ -field と一致するといえる。

次に以下の 2 つの条件を満たす位相空間 X を考えよう。

(B.1) $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \quad K_n \uparrow X.$

(B.2) K_n は部分位相 Polish space になる。

以下このような $\{K_n\}$ を basic seq と呼ぶ。このとき、
 写像 $\pi_{k_n, k_m} (n < m) : \sigma \in B_{k_m} \longrightarrow \sigma \cap K_n \in B_{k_n}$ は可測に
 なるので $(B_{k_n}, \pi_{k_n, k_m})$ の射影極限 $\varprojlim (B_{k_n}, \pi_{k_n, k_m}) =$
 $\{(\sigma_n) \in \prod_{n=1}^{\infty} B_{k_n} \mid \pi_{k_n, k_m}(\sigma_m) = \sigma_n \text{ for } \forall m > n\}$ は $\prod_{n=1}^{\infty} B_{k_n}$
 の Borel set になる。但し後者には直接位相を与える。すると
 $\prod_{n=1}^{\infty} B_{k_n}$ は Polish space であるから、射影極限は測度論とい
 う意味の standard space になる^{*}。即ち $\varprojlim (B_{k_n}, \pi_{k_n, k_m})$ と
 $\Gamma_X = \{\sigma \mid \sigma \subset X \text{ such that } |\sigma \cap K_n| < \infty \text{ for all } n\}$ との間には
 容易にわかるように一対一の対応がある。この対応を用い
 て Γ_X に可測構造 $(\Gamma_X, \mathcal{G})$ を導入すれば次の結果を得る。

定理 1.2. $(\Gamma_X, \mathcal{G})$ は標準空間であり、 $\mathcal{G}$ は $\mathcal{M}_B(\cdot)$
 $(B: \text{Borel set in } X)$ とするに可測にする最小の σ -field と一
 致する。 Γ_X は X 上の配置の空間という。

注意 1. X が距離づけ可能な局所コンパクトかつ σ コンパ
 クトな空間であるときは、 X の閉包がコンパクトな開集合の増
 大列 $\{X_n\}$ が存在する。この $\{X_n\}$ を basic seq にとれば、
 Γ_X は $\{\sigma \mid |\sigma \cap K| < \infty \text{ for all cpt set } K\}$ と一致する。

* Polish space との間には bimeasurable mapping が存在する空間を standard
 space という。条件附き標準の存在が保証される等、測度の取り扱
 いは都合の良い空間である。

1. 2. Poisson measure の定義

ひとつづつ $\{K_n\}$ を basic seq とする。 $m \in X_+$ の non atomic な Borel measure ν $\forall n, m(K_n) < \infty$ としよう。

$K \in K_n$ 中の任意の u とつと $m|_K = m_K$ とおく。

non atomic ν がある $\Rightarrow$ ように K^n 上の直積測度 m_K^n は自然に $\tilde{K}^n$ 上の測度とも考えられる。したがって、写像 P_K^n :

$(x_1, \dots, x_n) \in \tilde{K}^n \longrightarrow \{x_1, \dots, x_n\} \in B_K^n$ により m_K^n の

image measure $m_{K,n}$ が定義される。そこで、 $P_{K,m} =$

$\exp(-m(K)) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} m_{K,n}$ とおいて $B(B_K)$ 上の確率測度

$P_{K,m}$ を定義しよう。($m_{K,0}$ は一変集合 $B_K^0 = \{\emptyset\}$ 上の確率測度) すると次の公式が成り立つ。

任意の非負整数 $n_1, \dots, n_\ell$ と任意の互いに素なボレル集合 $B_1, \dots, B_\ell (\subset K)$ に対して ($0^0 = 1$ という規約の下で)

$$(1) P_{K,m} \left(\bigcap_{i=1}^{\ell} \{x \mid |x \cap B_i| = n_i\} \right) = \prod_{i=1}^{\ell} \frac{m(B_i)^{n_i} \exp(-m(B_i))}{n_i!}.$$

特に $|x \cap B_i|$ ($i=1, 2, \dots, \ell$) は平均 $m(B_i)$ の Poisson 分布に互いに独立な確率変数である。また上の公式 (1) から $P_{K,m}$ が consistent, i.e., $\pi_{K_n, K_\ell} P_{K_\ell, m} = P_{K_n, m}$ ($n < \ell$) であることも容易にわかる。よって測度論の良く知られた定理 (例えば [3] 参照) により射影極限空間 $\simeq (\overline{X}, \mathcal{C})$ 上 $\pi_{K_n} P_m = P_{K_n, m}$ ($n=1, 2, \dots$) とする確率測度 P_m が存在する。そこで

$\pi_{k_n} : \gamma \in \overline{I_X} \longrightarrow \gamma \cap K_n \in \mathcal{B}_{K_n}$ である。

公式 (1) より次の公式 (2) が成立する。

任意の非負整数 $n_1, \dots, n_\ell$ と任意の X の互いに素なボレル

集合 $B_1, \dots, B_\ell$ に対して,

$$(2) \quad P_m\left(\bigcap_{i=1}^{\ell} \{\gamma \mid |\gamma \cap B_i| = n_i\}\right) = \prod_{i=1}^{\ell} \frac{m(B_i)^{n_i} \exp(-m(B_i))}{n_i! \cdots n_\ell!}$$

§ 2. Poisson measures.

2.1. 基本公式

いま X は性質 (1), (2) をもつ位相空間, $\{K_n\}$ は

basic seq, m は non atomic な X 上の Borel measure で

$\forall n, m(K_n) < \infty$ とする。

補題 2.1. $p(x)$ は X 上の非負可測関数で, ある n が存在して
 $p(x) = 1$ on K_n^c かつ $\sum_{K_n} p(x) m(dx) < \infty$ が成り立つもの
 とする。すると $\prod_{x \in \gamma} p(x)$ は $\overline{I_X}$ 上の可測関数で, 任意の
 非負整数 $n_1, \dots, n_\ell$ と任意の X の互いに素なボレル集合 $B_1,$
 $\dots, B_\ell$ に対して

$$(3) \quad \int_{\bigcap_{i=1}^{\ell} \{\gamma \mid |\gamma \cap B_i| = n_i\}} \prod_{x \in \gamma} p(x) P_m(d\gamma) = \exp(m'(K_n) - m(K_n)).$$

$P_{m'}\left(\bigcap_{i=1}^{\ell} \{\gamma \mid |\gamma \cap B_i| = n_i\}\right)$ が成り立つ。すなわち

$$m'(B) = \int_B p(x) m(dx) \quad \text{for } \forall B : \text{Borel set in } X.$$

補題 2.1 の証明は $p(x)$ は階段関数で近似して公式 (2) を

を用いることは、 f が得られる。

次に、結果を上と同様の手順で得られる。

問題 2.2. n は自然数, $\rho(x) \in K_n$ 上定義された非負可積分関数とする。 $m'(B) = \int_B \rho(x) m(dx)$ for $\forall B$: Borel set in X とおく。すると $\forall E \in \beta(K_n)$ に対し、

$$(4) \quad P_{K_n, m'}(E) = \exp(-m'(K_n) + m(K_n)) \int_E \prod_{x \in \delta} \rho(x) P_{K_n, m}(d\delta)$$

が成立する。

2.2. 相互の絶対連続性。

m, m' は non atomic な Borel meas で $\forall n, m'(K_n), m(K_n) < \infty$ とする。

定理 2.1. $P_{m'} \leq P_m \iff m' \leq m.$

証明. $m(B) = 0$ とせよ。すると $m(B \cap K_n) = 0$ for all n . したがって、 $P_m(\delta \mid |\delta \cap B \cap K_n| = 1) = 0$. 仮定により $P_{m'}(\delta \mid |\delta \cap B \cap K_n| = 1) = 0$, したがって $m'(B \cap K_n) = 0$ を意味する。よって $m'(B) = 0$.

定理 2.2. $m' \leq m$ とし $\frac{dm'}{dm}(x) = \rho(x)$ とおく。すると、
 $P_{m'} \leq P_m \iff \sum_X |\sqrt{\rho(x)} - 1|^2 m(dx) < \infty$. 更に
 $\sum_X |\sqrt{\rho(x)} - 1|^2 m(dx) = \infty$ ならば $P_{m'} \perp P_m$.

証明. (4) より $P_{K_n, m'} \leq P_{K_n, m}$ であり、 $\forall n$ について

$$\frac{dP_{k_n, m'}}{dP_{k_n, m}}(\gamma) = \exp(-m'(k_n) + m(k_n)) \prod_{x \in \gamma} p(x), \quad \text{と } \gamma = \emptyset \text{ の}$$

場合は。他方、測度論の良く知られた定理 (例えば [5]) によれば

上の状況の下で $P_{m'} \leq P_m$ と仮定するときは、次の積分の値

$$\phi_{n, \ell} = \int_{\Gamma_X} \left| \sqrt{\frac{dP_{k_n, m'}}{dP_{k_n, m}}(\gamma \cap k_n)} - \sqrt{\frac{dP_{k_\ell, m'}}{dP_{k_\ell, m}}(\gamma \cap k_\ell)} \right|^2 P_m(d\gamma)$$

が Cauchy sequence となることが必要十分である。i.e.,

$$\lim_{n, \ell \rightarrow \infty} \phi_{n, \ell} = 0. \quad \text{すなわち, (4) を繰り返し使うことは, 2,}$$

$$\phi_{n, \ell} = 2 \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{1}{2} \int_{k_\ell \setminus k_n} (\sqrt{p(x)} - 1)^2 m(dx)\right) \right\} \quad \text{for } n < \ell.$$

よって (1) の定理の前半が成り立つことが容易にわかる。

後半については、再び、測度論の同様の定理によれば、このことが成り立つことを示す必要がある。

$$\text{" } \frac{dP_{k_n, m'}}{dP_{k_n, m}}(\gamma \cap k_n) \text{ は } n \rightarrow \infty \text{ のとき, ある } f_\infty(\gamma) = P_m \text{ によ}$$

うて与えられるように収束する。そして } f_\infty(\gamma) \text{ は } P_{m'} \text{ の } P_m \text{ によるハバ-フの間の絶対連続部分の density になる。"}

$$\text{したがって, } \int_X |\sqrt{p(x)} - 1|^2 m(dx) = \infty \text{ ならば}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\ell \rightarrow \infty} \phi_{n, \ell} = 2. \quad \text{よって}$$

$$(5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\ell \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_X} \sqrt{\frac{dP_{k_n, m'}}{dP_{k_n, m}}(\gamma \cap k_n)} \sqrt{\frac{dP_{k_\ell, m'}}{dP_{k_\ell, m}}(\gamma \cap k_\ell)} P_m(d\gamma) = 0$$

を示す。 (5) の左辺は 7 の定理を 2 回使うと、

$$\int_{\overline{I}_X} f_\infty(x) P_m(dx) = 0. \quad \therefore \text{これは } P_m \perp P_{m'} \text{ を意味する。}$$

2.3 エルゴード性.

X 上の bimeasurable map $\psi: X \rightarrow X$ について $\psi_m \approx m$ (ψ_m は ψ による m の image measure) かつ $\int_X \left| \sqrt{\frac{d\psi_m}{dm}}(x) - 1 \right|^2 m(dx) < \infty$, とみえるものから成る群 G とする。このとき $\sigma = \{X_1, \dots, X_n, \dots\} \in \overline{I}_X$ に対して $\psi(\sigma) = \{\psi(X_1), \dots, \psi(X_n), \dots\}$ が再び $\overline{I}_X$ の元になることは保証されるが, $|\psi(\sigma) \cap K_n| = |\sigma \cap \psi^{-1}(K_n)| < \infty$, for P_m -a.e. σ , が成り立つ。($\bar{m}(\psi^{-1}(K_n)) < \infty$ に注意する。) したがって, 写像 $T_\psi: \sigma \rightarrow \psi(\sigma)$ は P_m により 2 点人として写す性質を持ち, $T_\psi P_m = P_{\psi_m} \approx P_m$ である。

定義 1. 全ての $\psi \in G$ に対して, $P_m(A \ominus T_\psi^{-1}(A)) = 0$ である限りは, $P_m(A) = 1$ or 0 となること, $P_m \in G$ であるが「イタリック」という。

$m(X) < \infty$ であることは, P_m はエルゴード性を持つ。何故ならば $B_X^n = \{\sigma \mid |\sigma| = n\}$ は常に T_ψ -不変な集合であるが, $P_m(B_X^n) = \frac{m(X)^n}{n!} \exp(-m(X)) \neq 1, 0$, であるから。一般に m のエルゴード性は P_m の X 上に反映される。エルゴード性のための十分条件を以下に挙げる。

定理 2.3. $\forall \varepsilon > 0$ と $\forall n = 1, 2, \dots$, $\exists \psi \in G$ があつて,
 $\psi(K_n) \cap K_n = \emptyset$ かつ $\int_X \left| \sqrt{\frac{d\psi_m}{dm}}(x) - 1 \right|^2 m(dx) < \varepsilon$ かつ
 ψ は G -エルゴディックである。

定義 2. $G_{K_n} = \{ \psi \in G \mid \psi = \text{identity on } K_n^c \}$ とおく
 とき, m が $G_{K_n}^l$ -エルゴディックであるとは次の条件 (C) が成
 立するとき。 ($l=1, 2, \dots$)

(C) K_n^l 上の対称関数 f について $f(x_1, \dots, x_l) = f(\psi(x_1), \dots, \psi(x_l))$
 for $m_{K_n}^l$ -a.e. $x = (x_1, \dots, x_l)$ となるものは $m_{K_n}^l$ -a.e. 2, 3
 人として P_n 関数であるものとする。

定理 2.4. $\forall n, \exists N \geq n$, m が $G_{K_N}^l$ -エルゴディック ($l=1, 2, \dots$)
 ならば P_m は $m(X) = \infty$ のとき, G -エルゴディック。

定理 2.3 と定理 2.4 の証明は省略する。

注意 2. 定理 2.3 と定理 2.4 から, 次の場合に P_m が G -
 エルゴディックであることが示される。(証明略, 又 [4] も参
 照のこと。)

- (a) X : 連結なパラコンパクト (しかしコンパクトではない)
- (b) C^∞ -多様体,

(b) basic seq $\{K_n\}$: 相対コンパクトな連結開集合の増大列.

(c) m : 局所的にルベーグ測度と同値で X の density は滑らかな X 上の無限測度.

(d) G : コンパクトな台をもつ C^∞ -diffeomorphism の全体.

§ 3. Poisson measure から生成される $\mathcal{D}iff(X)$ の基本表現.

以下の設定は次の通りである。

(a) X : 連結, パラコンパクト (しかしコンパクトではない)
 C^∞ -多様体

(b) basic seq $\{X_n\}$: 連結な相対コンパクトな開集合から成る増大列.

(c) m : 局所的にルベーグ測度と同値で X の density は滑らかな X 上の無限測度

(d) G : コンパクトな台をもつ C^∞ -diffeomorphism の全体 $\mathcal{D}iff(X)$.

始めに $\mathcal{D} - G - G$ が [4] で得られた結果を紹介しておく。

まず始めに次の $\mathcal{D}iff(X)$ の $L^2_{p,m}(\overline{X})$ における標準的表現を与えよう。

$$(7) U_m(\psi) : f(x) \longrightarrow \sqrt{\frac{dP_{\psi m}}{dP_m}}(x) f(\psi^{-1}(x)).$$

U_m は $\text{Diff}(X)$ の既約表現である, [4].

次にもうひとつ別のタイプの表現を構成する. $n \geq 1$,

$$P_n : \widehat{X}_n \ni (x_1, \dots, x_n) \longrightarrow \{x_1, \dots, x_n\} \in B_X^n \quad \text{とし, } P_n \text{ の}$$

可測 cross section $S_n : B_X^n \longrightarrow \widehat{X}_n$ をとる. すると

$$\text{関係 } S_n(\psi^{-1}(x)) = [\psi^{-1}(S_n(x))] \sigma(\psi, x), \quad (x \in Z,$$

$$(x_1, \dots, x_n) \sigma = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \text{ により, } Z, \text{Diff}(X) \times B_X^n$$

上に $\mathbb{C}_n$ -値写像 $\sigma(\psi, x)$ が定義される. $X = Z \times \mathbb{C}_n$ の, $\mathbb{C}_n$

ベクトル空間 $\mathbb{W}$ における, π = くり表現 $\rho \in \pi$ とすると, $\text{Diff}(X)$ の

$L_{m_n}^2(B_X^n, \mathbb{W})$ における, π = くり表現 $\nabla \rho$ の

$$(8) \nabla^{\rho}(\psi) : f(x) \longrightarrow \sqrt{\frac{dT_{\psi m_n}}{d m_n}}(x) \rho(\sigma(\psi, x)) f(\psi^{-1}(x))$$

により π を定義される. $\pi = \pi \cdot m_n$ は m の n 個の直接測度の P_n による image measure である。

ρ が既約であるとは ∇^{ρ} が既約であり, また ρ_i が $\mathbb{C}_{n_i}$ ($i=1, 2$) の既約表現のとき, ∇^{ρ_1} と ∇^{ρ_2} が同値であることは, $n_1 = n_2$ かつ ρ_1 と ρ_2 が同値であることと必要十分である [4].

$\nabla - G - G$ [4] では $\text{Diff}(X)$ の表現

$$(9) U_m^{\rho} = U_m \otimes \nabla^{\rho}$$

を基本表現と呼んで次の結果を得た。

(a) p が既約であれば U_m^p も既約であり,

(b) $p_i (i=1, 2)$ が既約のとき, $U_{C_1 m}^{p_1}$ と $U_{C_2 m}^{p_2}$ が同値 (すなわち C_i は正定数) である当且は $C_1 = C_2$, かつ p_1 と p_2 が同値であることが必要十分である。

この節では以下 U_m^p と $U_{m'}^{p'}$ との同値性を考える。

このとき, まず U_m^p を次のように変形しておく。

$$\tilde{N}^n = \{a = (i_1, \dots, i_n) \mid i_j \in \mathbb{N} \text{ s.t., } i_p \neq i_q (p \neq q)\}$$

$$\ell^2(\tilde{N}^n, \overline{\omega}) = \{\phi \mid \phi: \overline{\omega}\text{-valued function on } \tilde{N}^n \text{ s.t., } \|\phi\|^2 =$$

$$\sum_{a \in \tilde{N}^n} \|\phi(a)\|_{\overline{\omega}}^2 < \infty\}$$

$$H^p = \{\phi \in \ell^2(\tilde{N}^n, \overline{\omega}) \mid \phi(i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(n)}) = \overline{p}^T(\sigma) \phi(i_1, \dots, i_n)$$

for $\forall \sigma \in \mathcal{O}_n\}$ とおく。但し p は $\mathcal{O}_n$ の $\overline{\omega}$ に対応する

より表現である。更に $\mathcal{O}^\infty \subset \mathbb{N}$ の置換全体, $\sigma \in \mathcal{O}^\infty$, $a =$

$(i_1, \dots, i_n)$ に対して, $\sigma a = (\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_n))$, $\sigma \in \mathcal{O}^n$ に対して

$a\sigma = (i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(n)})$ とおく。以前と同様に写像,

$$P: (x_1, \dots, x_n, \dots) \in \tilde{X}^\infty \longrightarrow \{x_1, \dots, x_n, \dots\} \in \overline{X}$$

は cross section P を次の条件を満たすようにとる。

$$: |x \cap X_1| = k_1, |x \cap (X_2 \setminus X_1)| = k_2, \dots, \text{ であるとは } S(x) \text{ の最初}$$

の k_1 個は X_1 の要素から成り, 次の k_2 個は $X_2 \setminus X_1$ から成り, ...

以下 x のようにつく。すると隣接 $S(\psi^{-1}(x)) = [\psi^{-1}(S(x))] \sigma(\psi, x)$

により $\mathcal{D}: \mathcal{H}(X) \times T_X$ 上の $\mathcal{O}^\infty$ -値写像 $\sigma(\psi, x)$ が定義さ

れる。

若し, $|x \cap X_k| = r$, $\psi \in \text{Diff}(X_k) \equiv \{ \psi \in \text{Diff } X \mid \psi = \text{identity on } X_k^c \}$ とし $\sigma(\psi, x) \in G_r$ とし $\sigma = \tau \circ \psi$ とする。
 注意する。 $\sigma \in \text{Diff}(X)$ の $L^2_{P_m}(\overline{X}) \otimes H^p$ への作用は $\sigma = \tau \circ \psi$ により表現 U_m^p 上

$$(10) \quad U_m^P(\psi) : F(x, a) \rightarrow \sqrt{\frac{dP_{\psi m}}{dP_m}}(x) F(\psi^{-1}(x), \sigma(\psi, x)^T a)$$

$\Rightarrow$ 2 次 変 換 と, $\therefore U_m^p$ は (9) 2 次 変 換 (1) の と 同 じ
 と なる。[4] K : 2 次 後 $(U_m^p, L_{p_m}^2(\overline{X}) \otimes t_1^p)$ に つ い て
 考 へ る と 上 の 如 く。

定理 3.1 (p と p' が既約ならば 3 と 4 の積 3×4 と)

以上の性質をみたら $L^2_{P_m}(\overline{X}) \otimes H^p$ から $L^2_{P_{m'}}(\overline{X}) \otimes H^{p'}$ への
 有界作用素 T が存在すれば P_m と $P_{m'}$ は同値である。

(a) $TU_m^p(\psi) = U_{m'}^{p'}(\psi)T$ for all $\psi \in \mathcal{O}_i^{p'} \times$

(b) $\exists \phi \in H^p$ s.t., $T(1 \otimes \phi) \neq 0$.

証明. $\|\phi\| = 1$, $\|T\| \leq 1$ と L^2 -一般性を失わずに X_k ($k = 1, 2, \dots$) の中から任意に u と v をとり 2 固定したものを Y とおこう. 記号, 簡単にのため, $P_u = \mu$, $P_v = \mu'$ とし, 更に, 写像 $\gamma \mapsto \gamma \cap Y \equiv \gamma_1$, $\gamma \mapsto \gamma \cap Y^c \equiv \gamma_2$ による μ の image measure Σ, X 上 X 上 μ_1, μ_2 とおく. ($\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$)

$$(11) \quad T_F \bar{H}(\sigma, a') = \int_{\Gamma^c} T_F(\sigma_1, \sigma_2, a') \mu_2'(d\sigma_2)$$

係により, $L^2_{\mu_1}(\overline{I_Y})$ は $L^2_{\mu}(\overline{I_X})$ の閉部分空間と考えらる。

4. $\in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ とき, $\sigma(4, \mathcal{H})$ は $\mathcal{H}$ だけの問題であることに注意すると, 次の断片が成り立つことが容易にわかる。

(12) $\text{Tr } U_m^p(\psi) = U_{m'}^{p'}(\psi) \text{Tr}$ for $\forall \psi \in \text{Diff } Y$

$$\simeq \simeq \mathbb{C}^r \text{ の表現 } U_m^p(\cdot), \text{ 表現空間 } L^2_{\mu_1}(\overline{\Gamma_Y}) \otimes H^p,$$
$$\sum_{i=1}^n (\rho_r^i(\sigma) \otimes \text{id}) \phi_{r,i}.$$

他 $\bar{3} \in L^2_{\mu_1}(T_Y)$ 是, $T_Y = \bigcup_{r=0}^{\infty} B_r^r$: disjoint union $\Sigma \setminus \{1\} = \bar{3} = \Sigma$

$$r=0, 2, \quad L_{\mu_1}^2(\overline{T}_r) = \sum_{r=0}^{\oplus} L_{\mu_1}^2(B_r^r) \quad \text{と直和分解} \Rightarrow \text{ある.}$$

$L = 0, 2, \quad L^2_{\mu_1}(\overline{Y}) \otimes H^p = \sum_{r,i}^{(1)} \Phi_{\mu}(r,i), \quad \Phi_{\mu}(r,i) =$
 $L^2_{\mu_1}(B_Y^r) \otimes w_{r,i} \otimes C_{r,i} \quad \text{と } \mathcal{D}iff(Y) \text{ の表現は } [12] \text{ に } \text{不変部分空間に直和分解される。} \quad \times 12 \quad \Phi_{\mu}(r,i) \text{ 上 } v \text{ は, 表現 } v$

$$(13) \quad U_m^p(\psi)(\overline{F} \otimes w_{r,i} \otimes C_{r,i})(\sigma, a) = \sqrt{\frac{dT_{\psi}\mu_1}{d\mu_1}}(\gamma_1) \overline{F}(\psi^{-1}(\gamma_1)) \cdot \\ (P_r(\sigma(\psi, \sigma)) \otimes id)(w_{r,i} \otimes C_{r,i})(a), \quad \psi \in \mathcal{D}iff(Y)$$

の形をとる。 $\therefore \therefore \therefore \quad \psi \in \mathcal{D}iff(Y) \quad \Rightarrow \quad \dots$

$$(14) \quad U_{\mu}^{r,i}(\psi)(\overline{F} \otimes w_{r,i})(\sigma_1) = \sqrt{\frac{dT_{\psi}\mu_1}{d\mu_1}}(\gamma_1) \overline{F}(\psi^{-1}(\gamma_1)) P_r(\sigma(\psi, \sigma)) w_{r,i} \\ \text{for } \overline{F} \in L^2_{\mu_1}(B_Y^r), \quad w_{r,i} \in w_{r,i}.$$

とおくと, $\Phi_{\mu}(r,i)$ 上では

$$(15) \quad U_m^p(\psi) = U_{\mu}^{r,i}(\psi) \otimes id$$

であり, $U_{\mu}^{r,i}$ は $\mathcal{D}iff(Y)$ の既約 $\mathbb{C}$ -タリ表現 v $U_{\mu}^{r,i}$ と $U_{\mu}^{r',i'}$ とは $i = i'$ かつ $r = r'$ であり、 r により非同値である。

(12) より T_Y は $\mathbb{C}$ の表現の intertwining op であるから,
 $T_Y \Phi_{\mu}(r,i) \neq 0$ であるより $T_Y \Phi_{\mu}(r,i) \subseteq \Phi_{\mu'}(r, J_i)$
 となり, 表現 ρ_r^i と $\rho_r^{J_i}$ とは同値である。 $L = 0, 2$, 特
 $k, i \neq k \Rightarrow J_i \neq J_k$. $\omega_{r,i} \in \rho_r^i$ と $\rho_r^{J_i}$ の inter-
 twining unitary op, $J_Y : L^2_{\mu_1}(\overline{Y}) \longrightarrow L^2_{\mu_1'}(\overline{Y})$ と
 $J_Y \overline{F}(\gamma_1) = \sqrt{\frac{d\mu_1}{d\mu_1'}}(\gamma_1) \overline{F}(\gamma_1)$ とおくと (μ_1 と μ_1' とは同値
 である。 $\vec{\sigma} = \vec{\sigma}_p$ 参照)

$$T_{r,i} = J_r \otimes \omega_{r,i} : L^2_{\mu_1}(B_r^r) \otimes \overline{w}_r^i \longrightarrow L^2_{\mu_1'}(B_r^r) \otimes \overline{w}_r'^{J_i}$$

は次の関係式を満たす。

$$(16) \quad U_{\mu_1'}^{r,J_i}(\psi) T_{r,i} = T_{r,i} U_{\mu_1}^{r,J_i}(\psi), \quad \forall \psi \in \text{Diff } \gamma.$$

この次の表現論における一般的な事実を引用しよう。

Fact: E_i, H_i ($i=1, 2$) はヒルベルト空間, U_1 と U_2 は群 G の H_1, H_2 における同値な既約 G -表現とし, T は U_1 と U_2 の intertwining unitary op とする。 $\tilde{A} : H_1 \otimes E_1 \longrightarrow H_2 \otimes E_2$ が, 表現 $U_1(g) \otimes \text{id}, U_2(g) \otimes \text{id}$ ($g \in G$) の intertwining op であるならば ある有界作用素 $A : E_1 \longrightarrow E_2$ があって $\hat{A} = T \otimes A$ 。

上の結果を $T_r | \overline{\mathcal{P}}_{\mu}(r,i)$ に適用すると, (15) と (16) からある有界作用素 $U_{r,i} : C_r^i \longrightarrow C_r'^{J_i}$ があって,

$$T_r | \overline{\mathcal{P}}_{\mu}(r,i) = T_{r,i} \otimes U_{r,i}, \quad \text{但し } T_r \overline{\mathcal{P}}_{\mu}(r,i) \neq \{0\}.$$

容易にわかるように $U_{r,i}$ は contraction である。したがって

$$\phi = \sum_i^{\oplus} \phi_{r,i}, \quad \phi_{r,i} \in \overline{w}_r^i \otimes C_r^i \quad \text{と分解すると,}$$

$$(17) \quad \begin{aligned} T_r(1 \otimes \phi)(\gamma, a') &= \sum_{r,i}' T_{r,i} \otimes U_{r,i} (X_{B_r^r} \otimes \phi_{r,i})(\gamma, a') \\ &= \sqrt{\frac{d\mu_1}{d\mu_1'}}(\gamma_1) \sum_{r,i}' X_{B_r^r}(\gamma_1) (\omega_{r,i} \otimes U_{r,i})(\phi_{r,i})(a'), \end{aligned}$$

但し $\sum'$ は $T_r \overline{\mathcal{P}}_{\mu}(r,i) \neq 0$ である (r,i) についてのみ和

そこで (17) の右辺を評価すると $\frac{1}{2} \alpha \omega - 1$ の値が 1 より大きい
あることが簡単な計算によりわかる。

すなわち、若し P_m と $P_{m'}$ が特異点であるとすると、上述の α 値と
 $\frac{dh_1}{dh_2}(x)$ は $Y = X_k \uparrow X (\Leftrightarrow k \rightarrow \infty)$ のとき $P_{m'}$ に近い点
へと近づく $\bar{p} \rightarrow 0$ に近づくことになり、(17) の右辺は 0 に近づく。
他方 (17) の左辺は $k \rightarrow \infty$ のとき、マニフェストの性質により
 $P_{m'}$ に近い点へと近づく $\bar{p} \rightarrow T(1 \otimes \phi)(x, x')$ に近づく。
したがって $T(1 \otimes \phi) = 0$ となるが、これは仮定に矛盾する。

系 (p と p' が既約点であるとする)
 V_m^p と $V_{m'}^{p'}$ との表現として同値であるのは P_m と $P_{m'}$ は
measure として同値である。

定理 3.2. p と p' が G_n と $G_{n'}$ の既約点であるとして表現し、
 $\dim(X) > 1$ のとき、 V_m^p と $V_{m'}^{p'}$ が同値であるためには、
 P_m と $P_{m'}$ が同値で $n = n'$ 、かつ p と p' が同値である
ことが必要十分である。

ACKNOWLEDGEMENT

終りにあたり、表現論について色々と御教示いただいた、京都
大学の平井武先生と福井医科大学の三上俊介氏に心より感謝
の意を表したい。

References

- [1] T.Hirai, Irreducible unitary representations of the group of diffeomorphisms of a non-compact manifold, preprint.
- [2] N.Obata, Measures on the configuration space, 1-42, unpublished.
- [3] K.R.Parthasarathy, Probability measures on metric spaces, Academic Press, 1967.
- [4] A.M.Vershik, I.M.Gel'fand and M.I.Graev, Representations of the group of diffeomorphisms, Usp. Mat. Nauk, 30 (1975) 3-50 (= Russ. Math. Surv., 30 (1975) 1-50).
- [5] Y.Yamasaki, Measures on infinite dimensional spaces, Vol 2, Kinokuniya, 1978 Tokyo (in Japanese).