

量子球面上の differential と q -Jacobi 多項式

杉谷 哲也

東京大学 数理科学研究科

§0. はじめに.

量子群と q -直交多項式は深いつながりを持っている。この note では 量子球面 S_q^{N-1} 上の “調和解析” について述べる (cf.[S])。 $U_q(\mathfrak{so}_N)$ -加群として定義される量子球面 S_q^{N-1} 上の多項式関数環 $A_q(S^{N-1}) = “A(S_q^{N-1})”$ に働く 多項式係数 “微分作用素環” の構成が基本的な枠組みを与える。ここでは、 $U_q(\mathfrak{so}_N)$ の作用の下での covariance を持つ “微分作用素環” を B, D 型の量子 R 行列を用いて構成した。

この場合に於いても古典の時と同様に “帯球函数” を考えることができる。ここで “帯球函数” というのは、 $U_q(\mathfrak{so}_N)$ の中に $U(\mathfrak{so}_N)$ の中の左 ideal $J = U(\mathfrak{so}_N) \cdot \mathfrak{k}$ ($\mathfrak{k} = \mathfrak{so}_{N-1} \subset \mathfrak{so}_N$) に対応する余 ideal J_q を作り、その J_q -不変な $A_q(S^{N-1})$ の vector をさして言う。この余 ideal J_q として “標準的” なものと “非標準的” なものが構成できる。

この2つの余 ideal J_q に対応して、 $A_q(S^{N-1})$ 上の帯球函数は次の2つの q -直交多項式で表される：

(1) big q -Jacobi polynomials

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(z; c, d : q) := {}_3\phi_2 \left[\begin{matrix} q^{-n}, q^{n+\alpha+\beta+1}, zq^{\alpha+1}/c \\ q^{\alpha+1}, -q^{\alpha+1}d/c \end{matrix} ; q, q \right]$$

(2) Roger's continuous q -ultraspherical polynomials

$$C_n^\lambda(X; q) := \frac{(q^{2\lambda}; q)_n}{(q; q)_n} q^{-\frac{n\lambda}{2}} {}_4\phi_3 \left[\begin{matrix} q^{-n}, q^{2\lambda+n}, zq^{\frac{\lambda}{2}}, z^{-1}q^{\frac{\lambda}{2}} \\ q^{\lambda+\frac{1}{2}}, -q^{-\lambda+\frac{1}{2}}, -q^\lambda \end{matrix} ; q, q \right]$$

ただし、 $X = (z + z^{-1})/2$.

上では次の記号を用いた：

$${}_{r+1}\phi_r \left[\begin{matrix} a_0, a_1, \dots, a_r \\ b_1, \dots, b_r \end{matrix} ; q, x \right] := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a_0; q)_j (a_1; q)_j \dots (a_r; q)_j}{(q; q)_j (b_1; q)_j \dots (b_r; q)_j} x^j$$

$$(a; q)_n := \begin{cases} 1 & \text{if } n = 0 \\ (1-a)(1-aq) \dots (1-aq^{n-1}) & \text{if } n \geq 1. \end{cases}$$

Big q -Jacobi 多項式 $P_n^{(\alpha, \beta)}(z; c, d : q)$ は次の q -差分方程式で特徴付けられる：

$$\begin{aligned} & \{ (c - zq^{\alpha+1})(d + zq^{\beta+1})T_{q,z} - (1+q)cd - q(c(1+q^\beta) - d(1+q^\alpha))z \\ & + q^{-n+1}(1+q^{\alpha+\beta+2n+1})z^2 + q(c-z)(d+z)T_{q,z}^{-1} \} P_n^{(\alpha, \beta)}(z; c, d : q) = 0 \end{aligned}$$

ここで $T_{q,z}$ は q -shift operator である :

$$T_{q,z}.z^n = q^n z^n \quad \text{for all } n \in \mathbb{Z}.$$

一方、continuous q -Jacobi polynomial $C_n^\lambda(X; q)$ は次の漸化式で特徴付けられる :

$$2XC_n^\lambda(X; q) = F_n C_{n+1}^\lambda(X; q) + G_n C_{n-1}^\lambda(X; q)$$

ただし、 $C_{-1}^\lambda(X; q) \equiv 0$, $C_0^\lambda(X; q) \equiv 1$,

$$F_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q^{\lambda+n}} \quad \text{and} \quad G_n = \frac{1 - q^{2\lambda+n-1}}{1 - q^{\lambda+n}}.$$

さて、直交多項式というからには直交関係式について述べなければならない。Big q -Jacobi 及び continuous q -ultraspherical polynomial はそれぞれ 離散測度、連続測度に関する直交多項式である。

(1) big q -Jacobi 多項式 の直交関係式

$$\begin{aligned} & \int_{-d}^c P_n^{(\alpha, \beta)} P_m^{(\alpha, \beta)} \times (qz/c; q)_\alpha (-qz/d; q)_\beta d_q z \\ &= \frac{\delta_{m,n}}{M} \frac{(q; q)_m (1 - q^{\alpha+\beta+1}) (q^{\beta+1}, -q^{\beta+1}c/d; q)_m}{(q^{\alpha+\beta+1}; q)_m (1 - q^{\alpha+\beta+2m+1}) (q^{\alpha+1}, -q^{\alpha+1}d/c; q)_m} \end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned} M &= \int_{-d}^c (qz/c; q)_\alpha (-qz/d; q)_\beta d_q z \\ &= c \frac{(1 - q)(q; q)_\alpha (-d/c; q)_{\alpha+1} (-qc/d; q)_\beta}{(q^{\beta+1}; q)_{\alpha+1}}. \end{aligned}$$

上の “ q -積分” は

$$\int_0^a F(z) d_q z := a(1 - q) \sum_{n=0}^{\infty} F(aq^n) q^n, \quad \text{and} \quad \int_b^a d_q z := \int_0^a d_q z - \int_0^b d_q z$$

で定義される。

(2) continuous q -ultraspherical polynomial の直交関係式

$$\int_{-1}^1 C_m^\lambda(X; q) C_n^\lambda(X; q) W_\lambda(X; q) \frac{1}{\sqrt{1 - X^2}} dX = \frac{\delta_{mn}}{h_n(q^\lambda; q)}$$

ただし

$$\begin{aligned} W_\lambda(X; q) &= \frac{(z^2, z^{-2}; q)_\infty}{(q^\lambda z^2, q^\lambda z^{-2}; q)_\infty} \quad (X = \frac{z + z^{-1}}{2}), \\ h_n(q^\lambda; q) &= \frac{(q, q^{2\lambda}; q)_\infty (q; q)_n (1 - q^{\lambda+n})}{2\pi (q^\lambda, q^{\lambda+1}; q)_\infty (q^{2\lambda}, q)_n (1 - q^\lambda)}. \end{aligned}$$

ここで $(a_1, a_2; q)_n = (a_1; q)_n (a_2; q)_n$ という記号を使った。

§1. 量子包絡環 $U_q(\mathfrak{so}_N)$ と 量子 R - 行列 .

量子包絡環 $U_q(\mathfrak{so}_n)$

P を基底 $\{\epsilon_j\}_{1 \leq j \leq n}$ を持つ rank n の $\mathbb{Z}$ - 自由加群とする:

$$P = \mathbb{Z}\epsilon_1 \otimes \cdots \otimes \mathbb{Z}\epsilon_n.$$

$P \times P$ 上に symmetric bilinear form : $P \times P \rightarrow \mathbb{Z}$, $(\epsilon_i, \epsilon_j) = \delta_{ij}$ を固定し、この symmetric bilinear form によって P とその dual $P^* = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(P, \mathbb{Z})$ を同一視する. Lie 環 $\mathfrak{so}_N$ は $N = 2n+1$ の時は B_n 型の root 系に対応するものであり、その単純 root を $\alpha_1 = \epsilon_1 - \epsilon_2, \alpha_2 = \epsilon_2 - \epsilon_3, \dots, \alpha_{n-1} = \epsilon_{n-1} - \epsilon_n, \alpha_n = \epsilon_n$ とする. 一方、 $N = 2n$ のときは D_n 型に対応し、単純 root を $\alpha_1 = \epsilon_1 - \epsilon_2, \dots, \alpha_{n-1} = \epsilon_{n-1} - \epsilon_n, \alpha_n = \epsilon_{n-1} + \epsilon_n$ とする. 以下、断らない限り基礎体として $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(q^{\frac{1}{2}})$ ($q^{\frac{1}{2}}$ を不定元とする $\mathbb{Q}$ - の有理函数体)、もしくは $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (q は実数で $q \neq 0, \pm 1$) をとる. 量子包絡環 $U_q = U_q(\mathfrak{so}_n)$ は次の生成元と基本関係式によって決まる結合 $\mathbb{K}$ -代数である ([D1,2], [J1,2]).

生成元 : q^u ($u \in \frac{1}{2}P^*$), e_j ($1 \leq j \leq n$), f_j ($1 \leq j \leq n$)

基本関係式 :

$$(1) \quad q^0 = 1, \quad q^u \cdot q^v = q^{u+v} \quad (u, v \in \frac{1}{2}P^*)$$

$$(2) \quad q^u e_j q^{-u} = q^{(u, \alpha_j)} e_j, \quad q^u f_j q^{-u} = q^{-(u, \alpha_j)} f_j \quad (u \in \frac{1}{2}P^*, 1 \leq j \leq n)$$

$$(3) \quad e_i f_j - f_j e_i = \delta_{ij} \frac{q^{\alpha_j} - q^{-\alpha_j}}{q_j - q_j^{-1}}$$

$$(4) \quad \sum_{\nu=0}^m \begin{bmatrix} m \\ \nu \end{bmatrix}_{q_i} (-1)^\nu e_i^{m-\nu} e_j e_i^\nu = 0 \quad (i \neq j)$$

$$(5) \quad \sum_{\nu=0}^m \begin{bmatrix} m \\ \nu \end{bmatrix}_{q_i} (-1)^\nu f_i^{m-\nu} f_j f_i^\nu = 0 \quad (i \neq j)$$

ただし、 $q_j = q^{\frac{(\alpha_j, \alpha_j)}{2}}$, $m = 1 - \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_i, \alpha_i)}$ and $\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}_q = \frac{[m]_q \cdots [m-n+1]_q}{[n]_q \cdots [1]_q}$.

$U_q(\mathfrak{so}_N)$ の Hopf 代数の構造を次のようにとる :

$$(1) \quad \Delta(q^u) = q^u \otimes q^u, \quad \varepsilon(q^u) = 1, \quad S(q^u) = q^{-u} \quad (u \in \frac{1}{2}P^*)$$

$$(2) \quad \Delta(e_j) = q^{\alpha_j} \otimes e_j + e_j \otimes 1, \quad \varepsilon(e_j) = 0, \quad S(e_j) = -q^{\alpha_j} e_j \quad (1 \leq j \leq n)$$

$$(3) \quad \Delta(f_j) = 1 \otimes f_j + f_j \otimes q^{-\alpha_j}, \quad \varepsilon(f_j) = 0, \quad S(f_j) = -f_j q^{\alpha_j} \quad (1 \leq j \leq n)$$

ここで Δ, ε, S は Hopf 代数としての、comultiplication (余積)、counit (余単位)、antipode (反代数射) である。

Vector 表現

V を $\mathbb{K}$ -上の N 次元 vector 空間とする :

$$V = \mathbb{K}X_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{K}X_N.$$

$U_q(\mathfrak{so}_n)$ の vector 表現として次のものをとる :

$$\rho_V : U_q(\mathfrak{so}_N) \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(V).$$

B_n 型るとき ρ_V として

$$\rho_V(q^{\epsilon_j}) = \sum_{i=1}^N E_{ii} q^{\delta_{ij} - \delta_{ij'}} \quad (1 \leq j \leq n)$$

$$\rho_V(e_j) = E_{jj+1} - E_{(j+1)'j'}, \rho_V(f_j) = E_{j+1j} - E_{j'(j+1)'} \quad (1 \leq j \leq n)$$

をとる。ただし、 $j' = N - j + 1$ ($1 \leq j \leq N$) である。 D_n 型るとき $\rho_V(q^{\epsilon_j})$ ($1 \leq j \leq n$), $\rho_V(e_j)$, $\rho_V(f_j)$ ($1 \leq j \leq n-1$) は上と同じで、あとは

$$\rho_V(e_n) = E_{n-1n'} - E_{n(n-1)'}, \rho_V(f_n) = E_{n'n-1} - E_{(n-1)'n}$$

をとる。ここで $\{E_{ij}\}_{1 \leq i, j \leq N}$ は行列単位に対応する V 上の線型作用素である:

$$E_{ij} \cdot X_k = \delta_{jk} X_i, \quad E_{ij} \cdot E_{kl} = \delta_{jk} E_{il}.$$

量子 R 行列

以下では、次の ($U_q(\mathfrak{so}_N)$ に付随する) 量子 R 行列 $R \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V \otimes V)$ が重要な役目を果たす:

$$R = R_q = \sum_{i,j=1}^N E_{ii} \otimes E_{jj} q^{\delta_{ij} - \delta_{ij'}} + (q - q^{-1}) \sum_{i>j} (E_{ij} \otimes E_{ji} - E_{ij} \otimes E_{i'j'} q^{\rho_i - \rho_j})$$

ここで

$$(\rho_1, \dots, \rho_N) = \begin{cases} (n - \frac{1}{2}, n - \frac{3}{2}, \dots, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, \dots, -n + \frac{3}{2}, -n + \frac{1}{2}) & B_n \text{ 型} \\ (n - 1, n - 2, \dots, 1, 0, 0, -1, \dots, -n + 2, -n + 1) & D_n \text{ 型} \end{cases}$$

この R 行列は次の重要で基本的な性質を持っている

定理 1.1.

(1)

Yang-Baxter 方程式

$$(\check{R} \otimes \text{id})(\text{id} \otimes \check{R})(\check{R} \otimes \text{id}) = (\text{id} \otimes \check{R})(\check{R} \otimes \text{id})(\text{id} \otimes \check{R})$$

$$\text{但し、}\check{R} = PR, \quad P = \sum_{i,j} E_{ij} \otimes E_{ji} : u \otimes v \rightarrow v \otimes u \quad (u, v \in V)$$

(2)

$\check{R}$ は $V \otimes_{\mathbb{K}} V$ から $V \otimes_{\mathbb{K}} V$ への intertwiner。すなわち、 $\check{R} \in \text{End}_{U_q}(V \otimes V)$ 。

§2. 量子 affine N -space 上の differential.

Tensor 積 $V \otimes_{\mathbb{K}} V$ は $U_q = U_q(\mathfrak{so}_N)$ -加群として下のように既約分解する:

$$V \otimes_{\mathbb{K}} V = V_+ \oplus V_- \oplus V_\phi$$

但し、 V_+, V_-, V_ϕ はそれぞれ最高 weight $2\epsilon_1, \epsilon_1 + \epsilon_2, 0$ の既約 U_q -加群。さて、“量子 affine N -space 上の多項式関数環” を次のように定義する：

$$\mathcal{A} = A_q(V) := T(V)/(V_-).$$

ただし、 $T(V)$ は V に関する tensor 代数を表し、 (V_-) は V_- の元で生成される $T(V)$ 中の両側 ideal である。 $\mathcal{A}$ は自然に生成元 $X_1, \dots, X_N$ と以下の基本関係式で定義される結合 $\mathbb{K}$ -代数と同一視できる：

(1.1)

$$(1) \quad X_k X_l = q X_l X_k \quad \text{for } k < l \text{ and } k \neq l',$$

$$(2) \quad X_{k'} X_k - X_k X_{k'} = \frac{q - q^{-1}}{q^{\rho_k - 1} + q^{-\rho_k + 1}} \sum_{j=k+1}^{(k+1)'} X_j X_{j'} q^{\rho_{j'}} \quad (1 \leq k \leq n-1)$$

$$(3) \quad X_{n'} X_n - X_n X_{n'} = (q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}) X_{n+1}^2 \quad B_n \text{ 型} \\ X_{n'} X_n = X_n X_{n'} \quad D_n \text{ 型}$$

命題 2.1. (1) $\mathcal{A}$ は $\mathbb{K}$ -基底として $\{X^\nu = X_1^{\nu_1} \dots X_N^{\nu_N}; \nu_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ を持つ。(2) $\mathcal{A}$ の 2 次の元 $Q = \sum_{j=1}^N X_j X_{j'} q^{\rho_{j'}}$ は U_q -不変な元で (i.e. $a.Q = \varepsilon(a)Q$ for any $a \in U_q$) で、 $\mathcal{A}$ の中心を生成する。

V の双対空間を

$$V^* = \mathbb{K}\partial_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{K}\partial_N$$

とおく。ただし、 $\partial_i(X_j) = \delta_{ij}$ とする。 V^* に次の U_q -加群の構造を与える； $a \in U_q$, $\xi \in V^*(a.\xi)$ に対して、

$$(a.\xi)(v) = \xi(S(a).v).$$

ここで S は U_q の antipode である。この双対表現は U_q -加群として、 V と同型になる：

$$\iota : V \xrightarrow{\sim} V^*, \quad X_j \mapsto \partial_{j'} q^{\rho_{j'}} \quad (1 \leq j \leq N).$$

“ V^* 上の多項式関数環の q -analogue” $\hat{\mathcal{A}} = A_q(V^*)$ を $\mathcal{A}$ と同じく次で定義する：

$$\hat{\mathcal{A}} = A_q(V^*) := T(V^*)/(V_-^*)$$

ここで V_-^* は $V^* \otimes_{\mathbb{K}} V^*$ の中の最高 weight $\epsilon_1 + \epsilon_2$ を持つ既約成分である。この時上の U_q -isomorphism ι は自然に

$$\iota : \mathcal{A} \longrightarrow \hat{\mathcal{A}}$$

なる $\mathbb{K}$ -algebra isomorphism に拡張されることが分かる。従って $\mathcal{A}$ と同じく、 $\hat{\mathcal{A}}$ を $\partial_1, \dots, \partial_N$ を生成元とし、以下の関係式を持つ結合 $\mathbb{K}$ -代数と同一視する：

(1.2)

$$(1) \quad \partial_k \partial_l = q^{-1} \partial_l \partial_k \quad \text{for } k < l \text{ and } k \neq l',$$

$$(2) \quad \partial_{k'} \partial_k - \partial_k \partial_{k'} = -\frac{q - q^{-1}}{q^{\rho_k - 1} + q^{-\rho_k + 1}} \sum_{j=k+1}^{(k+1)'} \partial_j \partial_{j'} q^{\rho_j} \quad (1 \leq k \leq n-1)$$

$$(3) \quad \partial_{n'} \partial_n - \partial_n \partial_{n'} = -(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}) \partial_{n+1}^2 \quad B_n \text{ 型} \\ \partial_{n'} \partial_n = \partial_n \partial_{n'} \quad D_n \text{ 型}$$

命題 2.2. (1) $\hat{\mathcal{A}}$ は $\mathbb{K}$ -基底として $\{\partial^\mu = \partial_1^{\mu_1} \cdots \partial_N^{\mu_N}; \mu_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ を持つ。(2) $\hat{\mathcal{A}}$ の 2 次の元 $\Delta = \sum_{j=1}^N \partial_j \partial_j q^{\rho_j}$ は U_q -不変な元で (i.e. $a \cdot \Delta = \varepsilon(a) \Delta$ for any $a \in U_q$) で、 $\hat{\mathcal{A}}$ の中心を生成する。

Remark. $\mathcal{A}$ 及び $\hat{\mathcal{A}}$ は U_q -symmetry を持つ $\mathbb{K}$ -代数である。 $\mathbb{K}$ -代数 A が U_q -symmetry を持つ $\mathbb{K}$ -代数であるとは A が次の条件をみたす結合 $\mathbb{K}$ -代数のことを言う:

$\varphi, \psi \in A, a \in U_q, \Delta(a) = \sum_j a_j^1 \otimes a_j^2$ に対して

$$a \cdot (\varphi \psi) = \sum_j (a_j^1 \cdot \varphi)(a_j^2 \cdot \psi), \quad a \cdot 1 = \varepsilon(a) \cdot 1$$

即ち、積 : $A \otimes A \rightarrow A$ と 単位元 : $\mathbb{K} \rightarrow A$ はともに左 U_q -加群の homomorphism.

$\mathcal{A}$ 上の differential calculus.

今、 c, c^{-1} を U_q -不変な不定元とし、 U_q -加群 $\mathcal{A} \otimes_{\mathbb{K}} \hat{\mathcal{A}} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[c, c^{-1}]$ に於いて、Heisenberg の交換関係

$$\partial_i X_j - X_j \partial_i = \delta_{ij}$$

の q -analogue を U_q の作用の下での covariance を持つように作りたい。

まず、次のような intertwiner を考える :

$$\begin{aligned} s_1 &: V^* \otimes V \longrightarrow V \otimes V^* \\ s_2 &: V^* \otimes V \longrightarrow V \otimes V^* \oplus \mathbb{K}c \\ s_3 &: \mathbb{K} \otimes V \longrightarrow V \otimes \mathbb{K} \\ s_4 &: \mathbb{K} \otimes V^* \longrightarrow V^* \otimes \mathbb{K} \end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned} s_1 &= P(R^{-1})^{t_1} \text{ (} t_1 \text{ は第 1 成分に関する転置)} \\ s_2(\partial_i \otimes X_j) &= s_1(\partial_i \otimes X_j) + \delta_{ij} c \\ s_3 &: c \otimes X_j \longmapsto q X_j \otimes c \quad (1 \leq j \leq N) \\ s_4 &: c \otimes \partial_j \longmapsto q^{-1} \partial_j \otimes c \quad (1 \leq j \leq N). \end{aligned}$$

さらに $\mathbb{K}$ -vector space W を

$$W := V \oplus V^* \oplus \mathbb{K}c \oplus \mathbb{K}c^{-1}$$

と置き、tensor 代数 $T(W)$ 中の $\mathbb{K}$ -vector subspace F を次で定める :

$$\begin{aligned} F &:= V_- \oplus V_-^* \oplus \mathbb{K}(c \cdot c^{-1} - 1) \oplus \mathbb{K}(c^{-1} \cdot c - 1) \\ &\oplus \left(\bigoplus_{i,j=1}^N (\text{id} - s_2)(\partial_i \otimes X_j) \right) \\ &\oplus \left(\bigoplus_{j=1}^N (\text{id} - s_3)(c \otimes X_j) \bigoplus_{j=1}^N (\text{id} - s_4)(c \otimes \partial_j) \right). \end{aligned}$$

そこで $\mathcal{A}$ 上の “微分作用素環” $\mathcal{D}$ を次のように構成する：

$$\mathcal{D} := T(W)/(F).$$

(F) は $T(W)$ の中の F の元で構成される両側 ideal. $\mathcal{D}$ は自然に次の生成元と基本関係式によって決まる $\mathbb{K}$ -代数とみなされる：

生成元 $X_1, \dots, X_N, \partial_1, \dots, \partial_N, c, c^{-1}$

基本関係式

$$(2.3) \quad (2.1) \text{ の (1), (2), (3) 式}$$

$$(2.4) \quad (2.2) \text{ の (1), (2), (3) 式}$$

$$(2.5) \quad c \cdot c^{-1} = 1 = c^{-1} \cdot c$$

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \partial_k X_k &= X_k \partial_k q^{\delta_{kk'}-1} - (q - q^{-1}) \sum_{j < k} X_j \partial_j \\ &\quad + (q - q^{-1}) \delta_{k > k'} X_{k'} \partial_{k'} q^{2\rho_{k'}} + c. \end{aligned}$$

$$(2.7) \quad \partial_k X_j = X_j \partial_k + (q - q^{-1}) \delta_{k > j'} X_{k'} \partial_{j'} q^{-\rho_k + \rho_{j'}} \quad (k \neq j, j')$$

$$(2.8) \quad \partial_k X_{k'} = q X_{k'} \partial_k$$

$$(2.9) \quad c \cdot X_j = q X_j \cdot c, \quad c \cdot \partial_j = q^{-1} \partial_j \cdot c.$$

上の (2.6)-(2.8) が Hisenberg の交換関係の q -analogue になっていることは明かである。この時、次の定理が成り立つ。

定理 2.3. $\mathcal{D}$ は $\mathbb{K}$ -基底として $\{X^\nu \partial^\mu c^l = X_1^{\nu_1} \dots X_N^{\nu_N} \partial_1^{\mu_1} \dots \partial_N^{\mu_N} c^l; \nu_j, \mu_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, l \in \mathbb{Z}\}$ をもち、かつ U_q -symmetry をもつ $\mathbb{K}$ -代数となる。即ち、 $\mathcal{A} \otimes_{\mathbb{K}} \hat{\mathcal{A}} \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{L}$ ($\mathcal{L} = \mathbb{K}[c, c^{-1}]$) から $\mathcal{D}$ への自然な U_q -isomorphism がある。

$\mathcal{D}$ の oscillator 表現

さて、次の自然な写像を考えよう：

$$\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D} / (\sum_j \mathcal{D} \partial_j + \mathcal{D}(c - 1)) \simeq \mathcal{A}.$$

$\mathcal{D}$ の元 η と $\mathcal{A}$ の元 φ に対して $\eta(\varphi)$ を $\eta \otimes \varphi$ の、上の写像における canonical な像とする。この写像から $\mathcal{D}$ の $\mathcal{A}$ 上の表現が引き起こされる：

$$\rho : \mathcal{D} \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(\mathcal{A})$$

$$\text{s.t. } \rho(\eta)(\varphi) = \eta(\varphi) \quad \eta \in \mathcal{D}, \varphi \in \mathcal{A}.$$

この時、次の定理が成り立つ。

定理 2.4. $\mathcal{D}$ の U_q -不変な部分空間を $\mathcal{D}^{U_q} = \{\eta \in \mathcal{D} ; a \cdot \eta = \varepsilon(a) \eta \text{ for any } a \in U_q\}$ 、また $V \otimes V^*$ の U_q -不変な 2 次の元を $E = \sum_{j=1}^N X_j \partial_j$ とする。この時、(1) $\mathcal{D}$ は Q, Δ, E, c, c^{-1} で生成される。さらに、(2) $\rho(\mathcal{D}^{U_q})$ は $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の $\mathcal{A}$ 上の表現を引き起こす ($U_q(\mathfrak{sl}_2)$ から $\rho(\mathcal{D}^{U_q})$ への全射準同型がある)。

Remark. この場合の表現 ρ は忠実でない。古典的には $\mathcal{D}^{U(\mathfrak{so}_N)} \simeq U(\mathfrak{sl}_2)$ である。

命題 2.6. $\mathcal{D}$ に於いて次の関係式が成り立つ:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \Delta Q^s &= Q^s \Delta + \frac{(1+q^{N-2})^2}{1+q} q^{-N+2} [2s] Q^{s-1} E \cdot c \\
 &\quad + \frac{(1+q^{N-2})^2}{(1+q)^2} q^{-N+3} [2s][N+2s-2] Q^{s-1} \cdot c^2 \quad (s \geq 0) \\
 (2) \quad EQ &= QE + (1+q^{N-2})qQ \cdot c \\
 (3) \quad \Delta E &= E\Delta + (1+q^{N-2})q^{-1}\delta \cdot c.
 \end{aligned}$$

Remark. 上で $s=1$, $q \mapsto 1$, $c \mapsto 1$ とすると

$$\Delta Q = Q\Delta + 4E + 2N, \quad EQ = QE + 2Q, \quad \Delta E = E\Delta + 2\Delta$$

となり、 $X^+ := Q$, $X^- := -\frac{1}{4}\Delta$, $H := E + \frac{N}{2}$ と置けば、これらは $\mathfrak{sl}_2$ の関係式を満たす:

$$[H, X^+] = 2X^+, \quad [H, X^-] = -2X^-, \quad [X^+, X^-] = H.$$

§3. 量子球面と帯球函数.

$\mathcal{A} = A_q(V)$ は命題 2.1 から次の斉次空間に分解する:

$$\mathcal{A} = A_q(V) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{A}_k$$

ただし $\mathcal{A}_k$ は $\mathcal{A}$ の k 次の斉次多項式のなす空間。 k 次の “調和多項式” の空間を

$$H_k := \{\varphi \in \mathcal{A}_k; \Delta(\varphi) = 0\}$$

で定義すると以下のことが成り立つ。

定理 3.1.

$$\mathcal{A}_k = \bigoplus_{j=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} Q^j H_{k-2j}$$

ただし $\lfloor p \rfloor$ は p を越えない最大の整数。

定理 3.2. $H_k (N \geq 3, k \geq 0)$ は最高 weight vector X_1^k を持つ既約 U_q -加群。

さて、量子球面 S_q^{N-1} 上の函数環 $A_q(S^{N-1})$ を次の商代数で定義する:

$$A_q(S^{N-1}) := \mathcal{A}/(Q-1)$$

ただし $(Q-1)$ は $Q-1$ で生成される $A_q(V)$ の両側 ideal. この時 $A_q(S^{N-1})$ は multiplicity-free に既約分解する。

定理 3.3.

$$A_q(S^{N-1}) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \tilde{H}_k$$

ここで $\tilde{H}_k$ は H_k の $A_q(S^{N-1})$ への canonical な image で、 H_k と同型な既約 U_q -加群。

余 ideal と帯球函数

量子球面 S_q^{N-1} 上の帯球函数を考えるのであるが、その前に $U_q(\mathfrak{so}_{N-1})$ を $U_q(\mathfrak{so}_N)$ の中に埋め込むことができないことに注意しておかなければならない。そこで代わりに $U(\mathfrak{so}_N)$ の左 ideal $J = (\mathfrak{so}_N) \cdot \mathfrak{k}$ ($\mathfrak{k} = \mathfrak{so}_{N-1} \subset \mathfrak{so}_N$) に対応する 余 ideal J_q を $U_q = U_q(\mathfrak{so}_N)$ の中に作ることを考える。ここで U_q の部分集合 J_q が 余 ideal と言うのは、 J_q が U_q の中の $\mathbb{K}$ -線型部分空間であって

$$\Delta(J_q) \subset J_q \otimes U_q + U_q \otimes J_q, \text{ かつ } \varepsilon(J_q) = 0$$

を満たすことを言う。

次のような 2 つの 左 ideal J_q を考える：

$$\text{Type I } J_q := \langle e_1, \dots, e_{n-1}, f_1, \dots, f_{n-1}, \frac{q^{\epsilon_1}-1}{q-1}, \dots, \frac{q^{\epsilon_n}-1}{q-1} \rangle \quad (B_n \text{ 型})$$

$$\text{Type II } J_q := \begin{cases} \langle e_2, \dots, e_n, f_2, \dots, f_n, \theta_1, \theta_2, \frac{q^{\epsilon_2}-1}{q-1}, \dots, \frac{q^{\epsilon_n}-1}{q-1} \rangle \\ \quad (B_n \text{ 型 } (n > 1) \text{ 及び } D_n \text{ 型 } (n > 2)) \\ \langle \theta_1 \rangle \quad (N = 3) \\ \langle \theta_1, \theta_2, \frac{q^{\epsilon_2}-1}{q-1} \rangle \quad (N = 4) \end{cases}$$

ただし

$$\theta_1 := \begin{cases} s \cdot e_1 + (-1)^{n-1} t \cdot q^{\epsilon_1} f_2 f_3 \dots f_n f_n \dots f_2 f_1 & B_n \text{ 型 } (n > 1) \\ s \cdot e_1 + (-1)^{n-2} t \cdot q^{\epsilon_1} f_2 f_3 \dots f_{n-1} f_n f_{n-2} \dots f_2 f_1 & D_n \text{ 型 } (n > 2) \\ s \cdot e_1 + t \cdot q^{\epsilon_1} f_1 & (N = 3) \\ s \cdot e_1 + t \cdot q^{\epsilon_1} f_2 & (N = 4) \end{cases}$$

$$\theta_2 := \begin{cases} t \cdot q^{\epsilon_1} f_1 + (-1)^{n-1} s \cdot e_2 e_3 \dots e_n e_n \dots e_2 e_1 & B_n \text{ 型 } (n > 1) \\ t \cdot q^{\epsilon_1} f_1 + (-1)^{n-2} s \cdot e_2 e_3 \dots e_{n-1} e_n e_{n-2} \dots e_2 e_1 & D_n \text{ 型 } (n > 2) \\ t \cdot q^{\epsilon_1} f_1 + s \cdot e_2 & (N = 4) \end{cases}$$

$$(s, t \in \mathbb{K} \ s \neq 0, t \neq 0)$$

ここで $\langle a_1, \dots, a_r \rangle$ ($a_j \in U_q$) は $a_1, \dots, a_r$ で生成される U_q の 左 ideal を表す。

命題 3.3. 上の J_q 達は U_q の 余 ideal になる。

命題 3.4. $\mathcal{A}$ の J_q -不変な部分空間は Q と次の ζ で生成される可換環となる：

$$\zeta = \begin{cases} X_{n+1} & J_q \text{ が Type I の時} \\ s \cdot X_1 + t \cdot X_1' & J_q \text{ が Type II の時} \end{cases}$$

$SO(N-1)$ は V 中のある vector の $SO(N)$ における stabilizer として実現されるから、この命題から J_q が $U(\mathfrak{so}_n)$ の 左 ideal $J = U(\mathfrak{so}_N) \cdot \mathfrak{k}$ に対応するものとみなしてよい。そこで J_q -不変な $\tilde{H}_k$ の vector φ_k を $A_q(S^{N-1})$ の既約成分 $\tilde{H}_k$ に付随する 帯球函数 と呼ぶことにする。

定理 3.5. J_q として Type I のものをとる。この時、 $\tilde{H}_k$ に付随する帯球函数 φ_k は定数倍を除き big q -Jacobi 多項式で表される：

$$\varphi_k = P_k^{(\frac{N-3}{2}, \frac{N-3}{2})}(z; 1, 1 : q)$$

ただし

$$z = L_1^{\frac{1}{2}} \zeta = L_1^{\frac{1}{2}} X_{n+1}, \quad L_1 = \frac{1 + q^{N-2}}{(1+q)q^{N-2}}.$$

定理 3.6. J_q として Type II のものをとる。この時、 $\tilde{H}_k$ に付随する帯球関数 φ_k は定数倍を除き continuous q -ultraspherical polynomial で表される：

$$\varphi_k(Y) = C_k^{\frac{N-2}{2}}(Y; q^2)$$

ただし $2L^{-1}Y = \zeta$, $L = \sqrt{\frac{(1+q^{N-2})}{st}} q^{-\frac{N-2}{2}}$.

Remark. $A_q(S^{N-1})$ には U_q -不変な functional を用いて hermitien 内積を定義することができ、これらの帯球関数の直交関係式が記述される ([S] を参照)。

REFERENCES

- [A] E. Abe, *Hopf Algebras*, Cambridge University Press, 1980.
- [AW] R. Askey and J. Wilson, *Some basic hypergeometric orthogonal polynomials that generalize Jacobi polynomials* 54 (1985), *Memoirs Amer. Math. Soc.*, No.319.
- [B] G. M. Bergman, *The Diamond lemma for ring theory*, *Adv. in Math.* 29 (1978), 178-218.
- [D1] V. G. Drinfel'd, *Hopf algebras and the quantum Yang-Baxter equation*, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* 283 (1985), 1060-1064.
- [D2] ———, *Quantum groups*, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Berkeley, California, USA, 1986, pp.798-820.
- [GR] G. Gasper and M. Rahman, *Basic hypergeometric series*, *Encyclopedia of Mathematics and its applications*, Cambridge University Press, 1990.
- [H] R. Howe, *Remarks on classical invariant theory*, *Trans. Amer. Math.* 318 (1989), 539-570, ; Erratum, *ibid.* 318 (1990) p. 823.
- [HU] R. Howe and T. Umeda, *The Capelli identity, the double commutant theorem, and multiplicity-free actions*, *Math. Ann.* 290 (1991), 565-619.
- [J1] M. Jimbo, *A q -difference analogue of $U(\mathfrak{g})$ and the Yang-Baxter equation*, *Lett. Math. Phys.* 10 (1985), 63-69.
- [J2] ———, *Quantum R matrix for the generalized Toda system*, *Comm. Math. Phys.* 102 (1986), 537-548.
- [K1] T. H. Koornwinder, *Continuous q -Legendre polynomials as spherical matrix elements of irreducible representations of the quantum $SU(2)$ group*, *CWI Quarterly* 2 (1989), 171-173.
- [K2] ———, *Orthogonal polynomials in connection with quantum groups*, in "Orthogonal Polynomials: Theory and Practice" (P. Nevai, ed.), *NATO ASI Series*, Kluwer Academic Publishers, 1990, pp. 257-292.
- [L] G. Lusztig, *Quantum deformations of certain simple modules over enveloping algebras*, *Adv. in Math.* 70 (1988), 237-249.
- [Na] T. Nakashima, *Crystal base and a generalization of the Littlewood-Richardson Rule for the classical Lie algebras*, *Comm. Math. phys.* 154 (1993), 215-243.
- [N1] M. Noumi, *Macdonald's symmetric polynomials as zonal spherical functions on some quantum homogeneous spaces*, preprint (1993).
- [N2] ———, *A realization of Macdonald's symmetric polynomials on quantum homogeneous spaces*, *Int. J. Mod. Phys. A (Proc. Suppl.)* 3A, World Scientific, 1993, pp. 218-223.
- [N3] ———, *Quantum groups and q -orthogonal polynomials — Towards a realization of Askey-Wilson polynomials on $SU_q(2)$* , in "Special Functions" (M. Kashiwara and T. Miwa, eds.), *ICM-90 Satellite Conference Proceedings*, Springer-Verlag, 1991, pp. 260-288.
- [NM1] M. Noumi and K. Mimachi, *Quantum 2-spheres and big q -Jacobi polynomials*, *Comm. Math. Phys.* 128 (1990), 521-531.
- [NM2] ———, *Spherical functions on a family of quantum 3-spheres*, *Compositio Mathematica* 83 (1992), 19-42.
- [NM3] ———, *Rogers's q -ultraspherical polynomials on a quantum 2-sphere*, *Duke. Math. J.* 63 (1991), 65-80.

- [NM4] ———, *Askey-Wilson polynomials and the quantum group $SU_q(2)$* , Proc. Japan Acad. **66** (1990), 146-149.
- [NUW1] M. Noumi, T. Umeda and M. Wakayama, *A quantum analogue of the Capelli identity and an elementary differential calculus on $GL_q(n)$* , preprint J-Tokyo-Math 91-16 (1991).
- [NUW2] ———, *A quantum dual pair (sl_2, o_n) and the associated Capelli identity*, preprint (1993).
- [NUW3] ———, *Dual pairs, spherical harmonics and a Capelli identity in quantum group theory*, preprint (1993).
- [NYM] M. Noumi, H. Yamada and K. Mimachi, *Finite dimensional representations of the quantum group $GL_q(n; \mathbb{C})$ and the zonal spherical functions on $U_q(n-1) \backslash U_q(n)$* , Japanese J. Math. **19** (1993), 31-80.
- [P1] P. Podleś, *Differential calculus on quantum spheres*, Lett. Math. Phys. **18** (1989), 107-119.
- [P2] ———, *Quantum spheres*, Lett. Math. Phys. **14** (1987), 193-202.
- [R] M. Rosso, *Finite representations of the quantum analog of the enveloping algebra of a complex simple Lie algebra*, Comm. Math. Phys. **117** (1988), 581-593.
- [RTF] N. Yu. Reshetikhin, L. A. Takhtajan and L. D. Faddeev, *Quantization of Lie groups and Lie algebras*, Algebra and Analysis **1** (1989), 178-206, English transl. in Leningrad Math. J. **1** (1990), 193-225.
- [S] T. Sugitani, *$U_q(so_N)$ covariant differential calculus on quantum spheres and related q -Jacobi polynomials*, preprint (1993).
- [T] T. Tanisaki, *Killing forms, Harish-Chandra isomorphisms, and universal R -matrices for quantum algebras*, preprint RIMS-816.
- [V] N. J. Vilenkin, *Special Functions and the Theory of Group Representation*, Translations of Mathematical Monographs vol.22, 1968.
- [W1] S. L. Woronowicz, *Compact matrix pseudogroups*, Comm. Math. Phys. **111** (1987), 613-665.
- [W2] ———, *Differential calculus on compact matrix pseudogroups (quantum groups)*, Comm. Math. Phys. **122** (1980), 125-170.
- [WSW] U. C. Watamura, M. Schlieker and S. Watamura, *$SO_q(N)$ covariant differential calculus on quantum spaces and quantum deformation of Schrödinger equation*, Zeitschrift für Physik C — Particles and Fields **49** (1991), 439-446.

HONGO 7-3-1, BUNKYO-KU, TOKYO 113, JAPAN

E-mail address: nn37011@tecc.ecc.u-tokyo.ac.jp