

Affine base space G/N 上の微分作用子環と その Weyl 自己同型

小形大(理) 渡辺伸一 (Shin-ich Natanabe)

§ 0. G を複素半単純リー群とし G の Borel 部分群 B は
中単部分群 N と Cartan 部分群 H の積に分けて $B = HN$
とする。更に G, B, H, N のリー代数を各 $\mathfrak{g}, \mathfrak{b}, \mathfrak{h}, \mathfrak{n}$ と
する。 G を $\mathbb{C}$ に定義された代数群と見て, その affine
座標環を $\mathcal{F}_G$ とし

$$\Gamma = \{ f \in \mathcal{F}_G \mid \forall \nu \in N, \forall g \in G, f(g \cdot \nu) = f(g) \}$$

と置く。 V_Γ を Γ に対応する (抽象的) affine 多様体とする。

i. e. $V_\Gamma = \text{ring hom.}_{\mathbb{C}}(\Gamma, \mathbb{C})$. V_Γ について次が成り立つ

0.1) V_Γ は (一般には特異点を持つ) 正規 affine 多様体。

0.2) G/N は 自然に V_Γ の open dense な部分集合と見られ
これ $\dim. (V_\Gamma - G/N) = \dim. V_\Gamma - 2$

0.3) V_Γ の特異点全体を S とすれば $S \subset V_\Gamma - G/N$ で
 $\dim. S \leq \dim. V_\Gamma - 5$

Γ の微分作用子環を $\mathcal{D}$ とする (see § 2)。

G/N を affine base space と名づけて その上の微分作用子

環の構造も(恐らく初めて)調べたのは Gelfand であるが、その後この方向の研究はあまり進んでいないように見える。恐らく V_r が特異点を持つことが、 $\mathcal{L}$ の構造の精密な分析を難しくしており、それが $(G/B, \cdot)$ の場合に較べて)研究を遅らせる原因にな、ていると思われる。

しかしながら表現論に現われる種々の $\mathfrak{g}$ -加群と $\mathcal{L}$ -加群論の枠内で統一的に理解するための土台としては G/B では明らかに不十分であり、 G/N (よりむしろ V_r) 上で考えることが必要と思われる。

次のことは比較的容易にわかることではあるが $\mathfrak{g}$ -加群と G/N 上の $\mathcal{L}$ -加群の関係についての認識として基本的である。

0.4) (次数型の) 既約 $\mathcal{L}$ -加群の各奇次成分は全て $\mathfrak{g}$ -既約

0.5) 逆に既約 $\mathfrak{g}$ -加群 M に対して、 M とは一つの奇次成分として含む既約 $\mathcal{L}$ -加群が(本質的には)唯一個定まる。

我々の目的は G/N 上の $\mathcal{L}$ -加群の幾何的・代数的な記述であるが、ここではその準備段階として $\mathcal{L}$ そのものの構造について述べる。

§ 1. $\mathfrak{g}$ とその Weyl-対称性 (主要結果の説明)

$\mathfrak{g}$ の構造について決定的なことは、その Weyl 対称性によって以下それを中心として主要結果を述べる。

$\mathfrak{g}, \mathfrak{B}, \mathfrak{H}, \mathfrak{N}; \mathfrak{g}, \mathfrak{B}, \mathfrak{h}, \mathfrak{N}; \mathfrak{g}, \Gamma, \mathfrak{g}$ 等は $\mathfrak{g}_0$ と同様とする。

$\Delta(\subset \mathfrak{h}^*)$ を $\mathfrak{h}$ の root 系. とすれば $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_{\alpha}$.

$\Delta^+ = \{\alpha \in \Delta \mid \mathfrak{g}_{\alpha} \in \mathfrak{N}\}$ とおけば $\mathfrak{B} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_{\alpha}$.

$I = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \forall \alpha \in \Delta, \frac{2(\alpha, \lambda)}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbb{Z}\}$

$I^+ = \{\lambda \in I \mid \forall \alpha \in \Delta^+, (\alpha, \lambda) \geq 0\}$ とおく

Γ は $\mathfrak{g}$ の部分加群として 左- $\mathfrak{G}$, 右- $\mathfrak{H}$, 不変になる。これに注意して、各 $\lambda \in I$ に対し

$$\Gamma_{\lambda} = \{f \in \Gamma \mid \forall g \in \mathfrak{G} \forall h \in \mathfrak{H}, f(gh) = \chi_{\lambda}(h) \cdot f(g)\}$$

とおく。ここに χ_{λ} は λ に対応する $\mathfrak{H}$ の指標で

$$\forall x \in \mathfrak{h}, \chi_{\lambda}(\exp X) \stackrel{\text{def.}}{=} \exp \langle \lambda, X \rangle.$$

1.1) Γ は I により、2 次数付けられ $\Gamma = \bigoplus_{\lambda \in I} \Gamma_{\lambda}$

$$\Gamma_{\lambda} \neq 0 \iff \lambda \in I^+, \dim \Gamma_{\lambda} < \infty$$

1.2) 各 $\lambda \in I^+$ に対し Γ_{λ} は $\mathfrak{G}$ -左加群として既約で $\lambda \leftrightarrow \Gamma_{\lambda}$

なる対応で集合 I^+ は有限次元 $\mathfrak{G}$ -既約加群の同型類全体と一対一対応。

$X \in \mathfrak{g}$ に対し Γ の 1-次微分作用素 (奇次) $R_X \in \mathcal{L}^o$ と

$$\forall f \in \mathcal{F}_Q \quad \forall g \in Q, (R_X(f))(g) = \frac{d}{dt} (f(g \cdot \exp(tX)))|_{t=0}$$

と定義する。

1.3) $\forall f \in \mathcal{F}_\Lambda, \forall X \in \mathfrak{g}$ に対し $R_X(f) = \langle \Lambda, X \rangle f$.

$f \in \mathcal{F}_\Lambda$ を $\mathcal{L}^o$ の元と見れば $R_X(f) = [R_X, f], \forall X \in \mathfrak{g}$ が成り立つことに注意する。そこで各 $\Lambda \in \mathcal{I}$ に対し $\mathcal{L}^o$ の部分空間 $\mathcal{D}_\Lambda$ と

1.4) $\mathcal{D}_\Lambda \equiv \{ D \in \mathcal{L}^o \mid \forall X \in \mathfrak{g} \quad [R_X, D] = \langle \Lambda, X \rangle D \}$.

と定義すれば

命題 1.5) $\mathcal{L}^o = \bigoplus_{\Lambda \in \mathcal{I}} \mathcal{D}_\Lambda, \quad \mathcal{D}_{\Lambda_1} \mathcal{D}_{\Lambda_2} \subset \mathcal{D}_{\Lambda_1 + \Lambda_2}$.

と $\Gamma(C\mathcal{L}^o)$ の次数構造は $\mathcal{L}^o$ に拡張される。

更に $X \in \mathfrak{g}$ に対し Γ の 1-次微分作用素 $L_X \in \mathcal{L}^o$ と

$$\forall f \in \Gamma, (L_X(f))(g) = -\frac{d}{dt} (f(\exp(tX) \cdot g))|_{t=0} : g \in Q,$$

と定義すれば 対応

$$\begin{array}{ccc} L : \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathcal{L}^o \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathcal{L}_X^o \end{array}$$

は自然に環準同型 $L : \mathcal{U}_{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathcal{L}^o$ に拡張される。

命題 1.6) $L : \mathcal{U}_{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathcal{L}^o$ は準同型。

以下この L を通じて $\mathcal{U}_{\mathfrak{g}} \subset \mathcal{L}^o$ と見る。

命題 1.7) $R_x \in \mathcal{D}_0 : x \in \mathfrak{g}, \quad U_{\mathfrak{g}} \subset \mathcal{D}_0$

定理 1.8) $\mathcal{D}_0$ は環として $U_{\mathfrak{g}} = \{R_x \mid x \in \mathfrak{g}\}$ で生成される。特に $R_x : x \in \mathfrak{g}$ は $\mathcal{D}_0$ の中心 $\mathfrak{Z}$ を生成する。

同様に打た $\mathfrak{g} \ni x \mapsto R_x \in \mathfrak{Z}$ は環の同型対応

$R : U_{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\cong} \mathfrak{Z}$ を引き起す。

各 $x \in \mathfrak{g}$ に対し $\tilde{R}_x \in \mathcal{D}_0$ と

1.9) $\tilde{R}_x = R_x + \langle x, \delta \rangle$; $\delta = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta^+} \alpha$ と定義する。

W を $\mathfrak{g}$ の Weyl 群とし $w \in W$ の $\mathfrak{Z}$ に対する作用と

1.10) $w(\tilde{R}_x) = \tilde{R}_{w(x)} ; x \in \mathfrak{g}$

で定義する。

命題 1.11) $U_{\mathfrak{g}}$ の中心 $\mathfrak{Z} = U_{\mathfrak{g}} \cap \mathfrak{Z}$ は $\mathfrak{Z}$ の W -不変元全体と一致する。 i.e. $\mathfrak{Z} = \{D \in \mathfrak{Z} \mid \forall w \in W \quad w(D) = D\}$

前に述べた $(0, x), (0, \delta)$ は (1.8) と (1.11) から容易に得られる。

環として $\mathcal{D}_0 \cong U_{\mathfrak{g}} \otimes \mathfrak{Z}$ だから命題 1.11) により $w \in W$

の $\mathfrak{Z}$ に対する作用は $\mathcal{D}_0$ に直接拡張されるが、重要なことは

これが更に $\mathcal{D}$ 全体の自己同型に直接拡張されることである

即ち

主定理 1.12)

各 $w \in W$ に対し環 $\mathcal{Q}$ の自己同型 φ_w で次の条件を満たすものが存在する。

$$\bullet \varphi_w(\tilde{R}_x) = \tilde{R}_{w(x)} \quad ; x \in \mathcal{I}$$

$$\bullet \varphi_w(D) = D \quad ; D \in \mathcal{O}_\mathcal{I}$$

系 1.13)

$$\text{上の } \varphi_w \text{ に対し } \varphi_w(\mathcal{Q}_\Lambda) = \mathcal{Q}_{w(\Lambda)} \quad ; \Lambda \in I$$

$\mathcal{Q}$ のこの種の構造対称性はもとにな、 Γ 環 Γ に対しては全く欠けていたものであることに注意する。(AEP 1.1)

(1.12) の φ_w は 多項式環 $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ の微分作用 Γ 環

$$K[x_1, \dots, x_n; \partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n] \quad ; \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

の自己同型 σ (Fermion 変換!)

$$\sigma : x_i \rightarrow \partial_i, \partial_i \rightarrow -x_i \quad 1 \leq i \leq n$$

に類するものであり、この種の自己同型を持つ微分作用 Γ 環の例は、これ以外には今迄ほとんど知られていなかったように見える。

$\mathcal{Q}$ について更に言えることを以下にまとめておく

定理 1.14) $\Lambda \in I^+$ の時 $\mathcal{Q}_\Lambda$ は $\mathcal{Q}_0$ -左 (or 右)-加群として Γ_Λ から生成する。

$$\mathcal{Q}_\Lambda = \mathcal{Q}_0 \Gamma_\Lambda = \Gamma_\Lambda \mathcal{Q}_0$$

定理 1.15) $\mathcal{Q}$ は環として ① 有限生成, 左-右-Noether,
かつ 単純 (i.e. non-trivial な両側 ideal を持たない).

$\mathcal{Q}_\lambda$ は 1.15) の最後の条件: 単純性も持っていないか。
たゞとに留意する。

定理 1.16) $\mathcal{Q}_\lambda; \lambda \in I$ は $\mathcal{Q}_0$ -左 (or 右)-加群として
 $\mathcal{Q}_0$ の適当な左 (or 右 resp.) ideal と同型。

1.16) の条件は (可換) Noether 整域 上の加群の場合の
有限生成, torsion-free, rank = 1 という条件に類す
ものと見られることに留意する。

$\mathcal{Q}$ の (adg) の加群としての性質については Gelfand
が既に調べているのでここでは割愛する。

主定理 (1.12) の証明は $w \in W$ が Δ^+ に対応する Weyl 領域
に属する基本鏡映である場合を示せば十分であるがその
場合については §3 で略証を与える。

§2. 可換環の微分作用環 (と 次数付き微分作用環の組合)

主定理 (1.12) を証明する準備としてこの § では 可換
環の微分作用環について一般に言えることをまとめてお
く。

この § では Γ は一般の可換環とし K を Γ の部分環とする。
 $\text{End}_K(\Gamma)$ は Γ の K -加群としての自己準同型全体のなす
環とする。 $x \in \Gamma$ を $\varphi_x(x_1) \equiv x x_1 ; x_1 \in \Gamma$ で定義され
 $\varphi_x \in \text{End}_K(\Gamma)$ と同一視する。これにより $\Gamma \subset \text{End}_K(\Gamma)$ と
見ておく。

$\text{End}_K(\Gamma)$ の部分加群 $\mathcal{L}^{(k)} ; k \in \mathbb{Z}$ を 次の 1, 2. により
帰納的に定める。

$$(1) \quad k < 0 \Rightarrow \mathcal{L}^{(k)} = 0$$

(2) $k \geq 0$ の時

$$\mathcal{L}^{(k)} \equiv \left\{ X \in \text{End}_K(\Gamma) \mid \forall x \in \Gamma, [x, X] \in \mathcal{L}^{(k-1)} \right\}$$

この $\mathcal{L}^{(k)}$ について次が成り立つ。

$$2.1) \quad \mathcal{L}^{(0)} = \Gamma$$

$$2.2) \quad k \leq l \Rightarrow \mathcal{L}^{(k)} \subset \mathcal{L}^{(l)}$$

$$2.3) \quad \mathcal{L}^{(k)}, \mathcal{L}^{(l)} \subset \mathcal{L}^{(k+l)}$$

$$2.4) \quad [\mathcal{L}^{(k)}, \mathcal{L}^{(l)}] \subset \mathcal{L}^{(k+l-1)}$$

$$2.5) \text{ 定義: } \text{End}_K(\Gamma) \text{ の部分環 } \mathcal{L} = \mathcal{L}_{\Gamma/K} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{L}^{(k)}$$

を Γ の K 上の微分作用子環という。

2.6) Γ_S を Γ の乗法域 (≠ 0) S に関する商環とすれば

Γ_S -左 (or 右) 加群と見て自然に

$$\mathcal{L}_{\Gamma_S/K} \cong \Gamma_S \otimes_{\Gamma} \mathcal{L} \quad (\text{or } \cong \mathcal{L} \otimes_{\Gamma} \Gamma_S, \text{ resp.})$$

以下 K は標数 0 の体とし Γ は K 上有限生成の整域とする。

2.7) Γ が正則環なら $\mathcal{D}_{\Gamma/K}$ は $\mathcal{D}_{\Gamma/K}^{(1)}$ を生成する。

従って特に $\mathcal{D}_{\Gamma/K}$ は Γ 上有限生成。

2.8) 同じ条件下で $\mathcal{D}_{\Gamma/K}$ は左右 Noether 的かつ単純環。

(2.7), (2.8) に当ることは一般の場合には成り立たないことを強調しておく。

(Γ) を Γ の商体とする。

2.9) 定義. $D \in \mathcal{D}_{\Gamma/K}, \mathfrak{p} \in \text{Spec}(\Gamma)$ とする。

$D(\Gamma_{\mathfrak{p}}) \subset \Gamma_{\mathfrak{p}}$ なる時 D は $\mathfrak{p}$ で正則であると言う。

2.10) Γ : 正則 (i.e. 商体内で整域)

X を $\text{Spec}(\Gamma)$ の Zariski 閉集合で

$\dim X \leq \dim \text{Spec}(\Gamma) - 2$ なるものとする

$D \in \mathcal{D}_{\Gamma/K}$ が $\text{Spec}(\Gamma) - X$ の各点で正則なら

$D \in \mathcal{D}_{\Gamma/K}$ 。

定義 2.11) $\mathcal{J}_{\Gamma/K} = \{X \in \mathcal{D}_{\Gamma/K}^{(1)} \mid X(1) = 0\}$ とおく

$\mathcal{J}_{\Gamma/K}$ の元を斉次一次微分作用素 (or 接ベクトル場)

と言う

2.12) $\mathcal{D}_{\Gamma/K}^{(1)} = \Gamma \oplus \mathcal{J}_{\Gamma/K}$

以下 Γ は次数環 $\Gamma = \bigoplus_{k \geq 0} \Gamma_k$ で

$$2.13) \quad K \subset \Gamma_0$$

$$2.14) \quad \Gamma = \Gamma_0[\Gamma_1]$$

$$2.15) \quad (\Gamma_0) \otimes_{\Gamma_0} \Gamma \text{ は } (\Gamma_0) \text{ 上 } (\Gamma_0) \otimes_{\Gamma_0} \Gamma_1 \text{ から生成される} \\ \text{多項式環で } \dim_{(\Gamma_0)}((\Gamma_0) \otimes_{\Gamma_0} \Gamma_1) = n < \infty.$$

なる場合を考える。

$$L \in \text{End}_K(\Gamma) \text{ と}$$

$$2.16) \quad L(r) = kr \quad ; \quad r \in \Gamma_k, \quad k \geq 0$$

と定義すれば容易に

$$2.17) \quad L \in \mathcal{I}_{\Gamma/K}$$

がわかる。以下 L の L を Γ の次数作用子と呼ぶ。

この L を用いて $\mathcal{L}_{\Gamma/K}$ に以下のように次数構造が入る

$$2.18) \quad \mathcal{L}_{\Gamma/K} = \mathcal{L} \text{ の部分加群 } \mathcal{L}_k ; k \in \mathbb{Z} \text{ を}$$

$$\mathcal{L}_k = \{ D \in \mathcal{L} \mid [L, D] = kD \}$$

$$\text{と定義すれば } \mathcal{L} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{L}_k, \quad \mathcal{L}_k \mathcal{L}_l \subset \mathcal{L}_{k+l}$$

$$2.19) \quad \mathcal{I}_k = \mathcal{I}_{\Gamma/K} \cap \mathcal{L}_k \text{ とおけば}$$

$$\mathcal{I}_{\Gamma/K} = \bigoplus_{k \geq -1} \mathcal{I}_k$$

$$2.20) \quad X \in \mathcal{I}_{-1} \text{ に } X|_{\Gamma_1} : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_0 \text{ を対応させる}$$

$$\text{ことにより } \mathcal{I}_{-1} \cong \text{Hom}_{\Gamma_0}(\Gamma_1, \Gamma_0).$$

Γ_0 -双線形写像 $\varphi: \Gamma_1 \times \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_0$ と

2.21) φ : 交代 $\therefore \varphi(f, f) = 0 \quad ; f \in \Gamma_1$

2.22) $\forall f \in \Gamma_1 - \{0\} \exists g \in \Gamma_1, \varphi(f, g) \neq 0$

なるように取り固定しておく。

定義 2.23) $f \in \Gamma_1$ に対し $L_f \in \mathcal{L}$ と

$L_f(g) = \varphi(f, g) \quad ; g \in \Gamma_1$ により定義する。

(2.20) により L_f は well-defined である。

定義 2.24)

$$\mathcal{J}_0^{\varphi} \equiv \{x \in \mathcal{J}_0 \mid x(\varphi(f, g)) = \varphi(x(f), g) + \varphi(f, x(g)) \dots f, g \in \Gamma_1\}$$

定義 2.25) $n = \dim_{\Gamma_0}((\Gamma_0)_{\Gamma_0} \Gamma_1) < \infty$ とする

φ に関する条件 (2.22) からこれは偶数である。

$f_1, \dots, f_r \in \Gamma_1$ を Γ_1 の Γ_0 -加群としての生成系とし

$\varphi(f_i, f_j)$ を (i, j) -成分とする行列を $A = A(f_*, f_*)$

とする。更に A の n 次小行列式全体から生成する Γ の

ideal を $\mathcal{O}_{\varphi}$ とする。明らかに $\mathcal{O}_{\varphi}$ は $\{f_*,\}$ のとり

方によらず φ だけで定まる。

以上の準備のもとに、定理 (1.12) の証明の鍵となる

Lemma が次のように述べられる。

補題 2.26)

$\Gamma, \mathfrak{P}$ は次の条件を満たすものとする。

1. Γ ; 正則

2. $\sigma_{\mathfrak{P}}$ は rank 1 の素因子を持つない。

この時 $\mathcal{L}\mathcal{Q} = \mathcal{L}\mathcal{Q}_{\Gamma/\mathfrak{P}}$ の自己同型 σ で次の条件を満たすものが唯一つ存在する。

$$(i) \quad \sigma^2 = \text{id}.$$

$$(ii) \quad \sigma(f) = f \quad ; f \in \Gamma_0$$

$$(iii) \quad \sigma(X) = X \quad ; X \in \mathfrak{J}_0^{\mathfrak{P}}$$

$$(iv) \quad \sigma(f) = L_f \quad ; f \in \Gamma, \quad (\text{see 定理 2.23})$$

この σ について更に次がなり立つ

$$(v) \quad \sigma(L) = -L - n \quad (\text{see 定理 2.16, 2.17}).$$

§ 3 定理 (1, 12) の証明.

用いた記号は § 1, 2 と同様とする。

$$\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\} \quad ; r = \text{rank } \mathfrak{g}$$

を Δ^+ の単純 root 系. とし $X_i \in \mathfrak{g}_{\alpha_i}, Y_i \in \mathfrak{g}_{-\alpha_i}, H_i \in \mathfrak{h}$
 $1 \leq i \leq r$ と

$$\left. \begin{aligned} \langle H_i, \Lambda \rangle &= \frac{2(\alpha_i, \Lambda)}{(\alpha_i, \alpha_i)} \quad ; \Lambda \in \mathfrak{h}^+ \\ [X_i, Y_i] &= H_i \end{aligned} \right\} \quad 1 \leq i \leq r$$

なるように取す。

3.1) この X_i, Y_i, H_i に対し

$$[H_i, X_i] = 2X_i, \quad [H_i, Y_i] = -2Y_i$$

$$[X_i, Y_j] = 0 \quad (i \neq j) \quad \text{が成り立つ}$$

上の $\{Y_i\}_{1 \leq i \leq r}$ は $\mathfrak{g}$ の生成系になり、このことに注意する。

以下 $1 \leq i \leq r$ なる番号 k ひとつ固定して考える。

$\Gamma = \bigoplus_{\Lambda \in I^+} \Gamma_\Lambda$ を H_i を用いて次のように一重に次数付ける。

$$3.2) \quad \Gamma = \bigoplus_{k \geq 0} \Gamma_k, \quad \Gamma_k \equiv \bigoplus_{\substack{\Lambda \in I^+ \\ \langle H_i, \Lambda \rangle = k}} \Gamma_\Lambda$$

3.3) $(\Gamma_0) \otimes_{\Gamma_0} \Gamma$ は (Γ_0) 上の2変数多項式環と同型

$$\text{特に } \dim_{(\Gamma_0)} ((\Gamma_0) \otimes_{\Gamma_0} \Gamma_1) = 2$$

$X \in \mathfrak{g}$ に対し $\int_{\mathfrak{g}}$ の (右) 一次微分作用素 R_X を

$$3.4) \quad (R_X(f))(g) \equiv \frac{d}{dt} (f(g \cdot \exp(tX)))|_{t=0} \quad ; g \in G$$

と定義する。更に $\Gamma \subset \int_{\mathfrak{g}}$ と見て

3.4) $f, g \in \Gamma_1$ に対し $\Phi_i(f, g) \in \int_{\mathfrak{g}}$ と

$$\Phi_i(f, g) \equiv \begin{vmatrix} f & R_{Y_i}(f) \\ g & R_{Y_i}(g) \end{vmatrix} \quad \text{と定義する。}$$

3.5) $\forall f, g \in \Gamma_1$ に対し $\Phi_i(f, g) \in \Gamma_0$ で

$\Phi_i : \Gamma_1 \times \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_0$ は Γ_0 -交代形式。

証明 $i \neq r$ ならば $[X_j, Y_i] = 0$ だから

$$R_{X_i}(f \cdot R_{Y_i}(g) - g \cdot R_{Y_i}(f)) = 0 \quad \dots (1)$$

$$\begin{aligned} \times \quad R_{X_i}(f \cdot R_{Y_i}(g) - g \cdot R_{Y_i}(f)) \\ = f \cdot R_{X_i} R_{Y_i}(g) - g \cdot R_{X_i} R_{Y_i}(f) \\ = f \cdot R_{H_i}(g) - g \cdot R_{H_i}(f) = f \cdot g - g \cdot f = 0 \quad \dots (2) \end{aligned}$$

$$(1), (2) \text{ より } \varphi_i(f, g) \in \Gamma \quad \dots (3)$$

$$\begin{aligned} \times \quad R_{H_i}(f \cdot R_{Y_i}(g) - g \cdot R_{Y_i}(f)) = 0 \quad \dots (4) \\ \therefore \varphi_i(f, g) \in \Gamma_0 \end{aligned}$$

$f \in \Gamma_0$ に対し $R_{Y_i}(f) = 0$ が成り立つことに注意すれば φ_i が Γ_0 -双線形であることも容易にわかる。
g.e.d.

3.6) Γ, φ_i は $(2, 21), (2, 22), (2, 26)$ で述べた
おすべての条件を満足し従って $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\Gamma/C}$ の場合の
自己同型 φ_i を引き起す。

3.7) $w_i \in W$ を α_i に対応する鏡映とすれば (3.6) の φ_i は
主定理 (1.12) に於ける φ_{w_i} に関する条件を全て満たす。
以上。