

Lie superalgebra の表現と cohomology

京大理学部 寺田 慎子 (Junko Terada)

リー環における cohomological induction の理論は Zuckerman 等によって始められ、Knapp, Vogan, その他により、かなり精密な結果が得られている。また、Lie superalgebra (以下 LSA と略す) におけるコホモロジー理論は、例えば Leites 等によって研究されているが、リー環と同じようにはいいかない部分も多々ある。

本稿ではリー環 $\mathfrak{g}$ の代わりに LSA $\mathfrak{g}$ を用いて $H_n(\mathfrak{g}, V)$, $H^n(\mathfrak{g}, V)$ の計算結果を例示したが、これは LSA の表現について Poincaré duality がどういうときになりつつか、を確かめるための計算である。そして、最終目標は、cohomological induction の LSA での類似物を与えることにある。

§ 1. Lie superalgebra に関する定義

定義 (Lie superalgebra)

$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ が LSA である. とは, 次を満たす bracket が与えられていることを言う.

$$[X, Y] = -(-1)^{|X||Y|} [Y, X]$$

$$[X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + (-1)^{|X||Y|} [Y, [X, Z]]$$

ただし, $X \in \mathfrak{g}_i$ ($i=0, 1$) のとき, X が斉次元であると言い, $|X|=i$ と表すことにする. 以下, $X \in \mathfrak{g}$ と書いたとき, 断わらずに X が斉次元であることを仮定することがある.

定義 (外積代数, 対称代数, 展開環)

$T^n(\mathfrak{g}) \equiv \mathfrak{g} \otimes \cdots \otimes \mathfrak{g}$ (n 個の Tensor 積) としたとき, 次の各代数を定義する.

$$\wedge \mathfrak{g} \equiv \bigoplus_{n=0}^{\infty} \wedge^n \mathfrak{g}, \quad \wedge^n \mathfrak{g} = T^n(\mathfrak{g}) / \langle X \otimes Y + (-1)^{|X||Y|} Y \otimes X \rangle$$

$$S(\mathfrak{g}) \equiv \bigoplus_{n=0}^{\infty} S^n(\mathfrak{g}), \quad S^n(\mathfrak{g}) = T^n(\mathfrak{g}) / \langle X \otimes Y - (-1)^{|X||Y|} Y \otimes X \rangle$$

$$U(\mathfrak{g}) \equiv T(\mathfrak{g}) / \langle X \otimes Y - (-1)^{|X||Y|} Y \otimes X - [X, Y] \rangle$$

$\mathfrak{g}$ の, 外積代数への作用は,

$$X(Y \wedge Z) = [X, Y] \wedge Z + (-1)^{|X||Y|} Y \wedge [X, Z]$$

対称代数への作用も同様に定義する. また, 展開環へは

$$X \cdot u = Xu \quad (X \in \mathfrak{g}, u \in U(\mathfrak{g}))$$

で作用させる. この定義のために必要なのが次の定理である.

定理 (Poincaré - Birkhoff - Witt)

$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ の $\mathbb{C}$ 上の基底 $\{X_1, \dots, X_M\} \subset \mathfrak{g}_0$, $\{Y_1, \dots, Y_N\} \subset \mathfrak{g}_1$ に対し、 $U(\mathfrak{g})$ の $\mathbb{C}$ 上の基底として

$$\{X_1^{k_1} X_2^{k_2} \cdots X_M^{k_M} \cdot Y_1^{l_1} \cdots Y_N^{l_N} \mid k_i \geq 0, l_i = 0, 1\}$$

をとることができる。

定義 ($\mathfrak{gl}(m, m)$)

$V = V_0 \oplus V_1$, $\dim V_0 = m$, $\dim V_1 = m$ に対し、

$$\text{End} V = \{X \in \text{End} V \mid X V_s \subset V_{i+s} \quad s \in \mathbb{Z}_2\}$$

$$[X, Y] \equiv XY - (-1)^{|X||Y|} YX \quad (X, Y \in \text{End} V)$$

で次数と bracket を入れると、 $\text{End} V$ は LSA になる。これを $\mathfrak{gl}(m, m)$ と書く。

定義 ($\mathfrak{sl}(m, m)$)

$\mathfrak{gl}(m, m)$ を行列表示したとき、supertrace を

$$\text{str} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \equiv \text{tr} \alpha - \text{tr} \delta$$

で定義する。これに対し、

$$\mathfrak{sl}(m, m) \equiv \{X \in \mathfrak{gl}(m, m) \mid \text{str} X = 0\}$$

とする。

定義 (π)

super space V に対し、 π を次数を交換する写像とする。
すなわち、

$$V_0 \cong \pi V_0, \quad V_1 \cong \pi V_1.$$

$$(\pi V)_0 = \pi V_1, \quad (\pi V)_1 = \pi V_0$$

§ 2. Koszul resolution

リ-環の加群の圏の中で、Koszul resolution は $\mathbb{C}$ の resolution で $U(\mathfrak{g})$ -free なものとして知られている。

定義 (Koszul resolution)

$\mathfrak{g}$ をリ-環としたりするとき、次の系列 A は Koszul resolution と呼ぶ。

$$A: 0 \longleftarrow \mathbb{C} \xleftarrow{\varepsilon} A_0 \xleftarrow{\partial_0} A_1 \longleftarrow \cdots \longleftarrow A_{\dim \mathfrak{g}} \longleftarrow 0$$

$$A_n = U(\mathfrak{g}) \otimes \wedge^n \mathfrak{g} \quad (\wedge^n \mathfrak{g} \text{ は自明な } U(\mathfrak{g})\text{-加群})$$

$$\begin{aligned} \partial_{n-1}(u \otimes X_1 \wedge \cdots \wedge X_n) = & \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} u \otimes X_i \otimes X_1 \wedge \cdots \wedge X_n \\ & + \sum_{k < l} (-1)^{k+l} u \otimes [X_k, X_l] \wedge X_1 \wedge \cdots \wedge X_n \end{aligned}$$

$$\varepsilon(u) = (u \text{ の定数項})$$

$(u \in U(\mathfrak{g}), X_i \in \mathfrak{g}, \dots \text{ は } \wedge X_i \wedge \text{ が抜けていることを表す})$

これを LSA の加群の圏のものとして拡張したい。

定義 (Koszul resolution - LSA の場合 1) [6]

$\mathfrak{g} \in \text{LSA}$ とするとき、次の系列 ε Koszul resolution と呼ぶ。

$$A : 0 \longleftarrow \mathbb{C} \xleftarrow{\varepsilon} A_0 \xleftarrow{\partial_0} A_1 \xleftarrow{\partial_1} A_2 \longleftarrow \dots$$

$$A_n = U(\mathfrak{g}) \otimes \wedge^n \mathfrak{g} \quad (\wedge^n \mathfrak{g} \text{ は自明な } U(\mathfrak{g})\text{-加群})$$

$$\begin{aligned} \partial_{n-1} (u \otimes X_1 \wedge \dots \wedge X_n) &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+\eta_i+1} u X_i \otimes X_1 \wedge \dots \wedge X_n \\ &\quad + \sum_{k < l} (-1)^{k+l+\eta_k+\eta_l+\xi_k\xi_l} u \otimes [X_k, X_l] \wedge X_1 \wedge \dots \wedge X_n \end{aligned}$$

$$\varepsilon(u) = (u \text{ の定数項})$$

$$(u \in U(\mathfrak{g}), X_i \in \mathfrak{g}, \xi_i \equiv |X_i|, \eta_i \equiv \xi_i(\xi_1 + \dots + \xi_{i-1}))$$

また、次のものも $\mathbb{C}$ の $U(\mathfrak{g})$ -free resolution であるから、これを Koszul resolution としてもよい。

定義 (Koszul resolution - LSA の場合 2) [1]

ζ を、 $|\zeta| = \bar{1}$ (次数 $\bar{1}$)、 $\zeta^2 = 0$ となる変数とする。

LSA $\mathfrak{g}$ に対して、

$$\hat{\mathfrak{g}} \equiv \mathbb{C}[\zeta] \otimes \mathfrak{g}$$

とし、 $X \in \mathfrak{g}$ に対して $\tilde{X} \equiv \zeta \otimes X$ とする。このとき、 $\mathbb{C}$ を次の系列とする。

$$C : 0 \longleftarrow C \xleftarrow{\varepsilon} C_0 \xleftarrow{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} C_1 \xleftarrow{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} \dots$$

$$C_n = U(\tilde{g}) \cong U(g) \otimes S^n(\pi g)$$

ただし、 $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ は次数 1 の微分で、 C_n に左から作用する。

$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ とわかり易く記述すると次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(u \otimes \tilde{X}_1 \cdot \dots \cdot \tilde{X}_n) &= \sum_{i=1}^n (-1)^{|u| + \tilde{\eta}_i} u X_i \otimes \tilde{X}_1 \cdot \dots \cdot \tilde{X}_n \\ &\quad + \sum_{k < i} (-1)^{\tilde{\eta}_k + \tilde{\eta}_i + \tilde{\xi}_k \tilde{\xi}_i + |u|} \end{aligned}$$

$$(\text{ただし、} \tilde{\xi}_k = |X_k| + 1, \tilde{\eta}_k = \tilde{\xi}_k(\tilde{\xi}_1 + \dots + \tilde{\xi}_{k-1}))$$

2つの Koszul resolution は、次の対応をもつ同形になる。

$$\begin{array}{ccccccc} A : & 0 & \longleftarrow & C & \xleftarrow{\varepsilon} & A_0 & \xleftarrow{\partial_0} A_1 \xleftarrow{\partial_1} A_2 \longleftarrow \dots \\ & & & \parallel & & \parallel & \downarrow \tilde{\Phi}_1 \quad \downarrow \tilde{\Phi}_2 \\ C : & 0 & \longleftarrow & C & \xleftarrow{\varepsilon} & C_0 & \xleftarrow{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} C_1 \xleftarrow{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} C_2 \longleftarrow \dots \end{array}$$

$$A_n = U(g) \otimes \wedge^n g \rightarrow u \otimes X_1 \wedge \dots \wedge X_n$$

$$\begin{aligned} &\downarrow \tilde{\Phi}_n \\ C_n = U(g) \otimes S^n(\pi g) &\rightarrow u \otimes X_1 \cdot \dots \cdot X_n \left\{ \begin{array}{l} \times (-1)^{\tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_3 + \dots + \tilde{\xi}_{n-1}} \quad (n: \text{偶数}) \\ \times (-1)^{\tilde{\xi}_2 + \tilde{\xi}_4 + \dots + \tilde{\xi}_{n-1} + |u|} \quad (n: \text{奇数}) \end{array} \right. \end{aligned}$$

§ 3. ホモロジー、コホモロジーの具体的な計算方法

表現 V を係数にもつ、リー環 g のホモロジー $H_n(g, V)$ と

は, $\mathfrak{g}$ のホモロジ-関手. すなわち, 双変関手 $V \mapsto V \otimes_{\mathfrak{g}} \mathbb{C}$ の導来関手と V に作用させて得られるものであるが, これは次のように計算される.

$$0 \longleftarrow V \xleftarrow{\partial_1} P_0 \xleftarrow{\partial_0} P_1 \xleftarrow{\partial_1} \dots$$

これと V の射影分解とを, $(\cdot) \otimes_{\mathfrak{g}} \mathbb{C}$ により, 下の複体を得る.

$$0 \longleftarrow V \otimes_{\mathfrak{g}} \mathbb{C} \xleftarrow{\tilde{\partial}_1} P_0 \otimes_{\mathfrak{g}} \mathbb{C} \xleftarrow{\tilde{\partial}_0} P_1 \otimes_{\mathfrak{g}} \mathbb{C} \xleftarrow{\tilde{\partial}_1} \dots$$

$$H_n(\mathfrak{g}, V) = \text{Ker } \tilde{\partial}_{n-1} / \text{Im } \tilde{\partial}_n \quad (n \geq 1)$$

$$H_0(\mathfrak{g}, V) = \text{Ker } \tilde{\partial}_0$$

でホモロジ-が定義される (定義可能)

これを計算するためには射影分解を具体的に作ることが必要だが, Koszul resolution A に $(\cdot) \otimes V$ を施すと, これは V の射影分解となるので, $H_n(\mathfrak{g}, V)$ は次の複体のホモロジ-として得られる.

$$0 \longleftarrow (A_0 \otimes V) \otimes_{\mathfrak{g}} \mathbb{C} \longleftarrow (A_1 \otimes V) \otimes_{\mathfrak{g}} \mathbb{C} \longleftarrow \dots$$

ところが,

$$(A_n \otimes V) \otimes_{\mathfrak{g}} \mathbb{C} \cong \wedge^n \mathfrak{g} \otimes V$$

なる同形により, $H_n(\mathfrak{g}, V)$ は次の複体のホモロジ-であることがわかる.

$$0 \longleftarrow V \xleftarrow{\partial_0} \mathfrak{g} \otimes V \xleftarrow{\partial_1} \wedge^2 \mathfrak{g} \otimes V \longleftarrow \dots \longleftarrow \wedge^{\dim \mathfrak{g}} \mathfrak{g} \otimes V \longleftarrow 0$$

$$\begin{aligned} \partial_{n-1}(X_1 \wedge \cdots \wedge X_n \otimes v) &= \sum_{i=1}^n (-1)^i X_1 \wedge \cdots \wedge X_n \otimes X_i v \\ &\quad + \sum_{k < l} (-1)^{k+l} [X_k, X_l] \wedge X_1 \wedge \cdots \wedge X_n \otimes v \\ (X_i \in \mathfrak{g}, v \in V) \end{aligned}$$

また, V を係数にもつ $\mathfrak{g}$ のホモロジー $H^n(\mathfrak{g}, V)$ も,

$$\text{Hom}_{\mathfrak{g}}(\Lambda^n, V) \cong \text{Hom}(\Lambda^n \mathfrak{g}, V)$$

などから

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow V \xrightarrow{d_0} \text{Hom}(\mathfrak{g}, V) \xrightarrow{d_1} \text{Hom}(\Lambda^2 \mathfrak{g}, V) \xrightarrow{d_2} \cdots \\ (\varphi \in \text{Hom}(\Lambda^n \mathfrak{g}, V)) \end{aligned}$$

のホモロジーとして計算できる.

これらのことは, $\mathfrak{g}$ が LSA であっても同じことが言える.
すなわち, $H_n(\mathfrak{g}, V)$ は,

$$\begin{aligned} 0 \longleftarrow V \xleftarrow{d_0} \mathfrak{g} \otimes V \xleftarrow{d_1} \Lambda^2 \mathfrak{g} \otimes V \xleftarrow{d_2} \cdots \\ \partial_n(X_1 \wedge \cdots \wedge X_n \otimes v) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+\eta_i'} X_1 \wedge \cdots \wedge X_n \otimes X_i v \\ + \sum_{k < l} (-1)^{k+l+\eta_k+\eta_l+\xi_k \xi_l} [X_k, X_l] \wedge X_1 \wedge \cdots \wedge X_n \otimes v \\ (\xi_k, \eta_k \text{ の定義は同じ. } \eta_i' \equiv \xi_i (\xi_{i+1} + \xi_{i+2} + \cdots + \xi_n)) \end{aligned}$$

のホモロジーであり, $H^n(\mathfrak{g}, V)$ は,

$$0 \longrightarrow V \xrightarrow{d_0} \text{Hom}(\mathfrak{g}, V) \xrightarrow{d_1} \text{Hom}(\Lambda^2 \mathfrak{g}, V) \xrightarrow{d_2} \cdots$$

$$\begin{aligned} \langle X_1 \wedge \dots \wedge X_n, d_{n-1} \psi \rangle &= \sum_{i=1}^n X_i \langle X_1 \wedge \dots \wedge \overset{i}{X_n}, \psi \rangle (-1)^{1+i+\eta_i} \\ &\quad + \sum_{k < l} \langle [X_k, X_l] \wedge X_1 \wedge \dots \wedge \overset{k, l}{X_n}, \psi \rangle (-1)^{k+l+\eta_k+\eta_l+\xi_k \xi_l} \end{aligned}$$

のコホモロジーである。

§4. $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(1, 1)$ の場合.

ここで、ホモロジー、コホモロジーの具体的な計算例を述べる。 $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(1, 1)$ とし、その基底を H_1, H_2, X, Y とする。

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad H_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(H_1, H_2 \in \mathfrak{g}_0, X \in \mathfrak{g}_1, Y \in \mathfrak{g}_{-1})$$

$V_0 = \mathbb{C}v_0$ を $\mathfrak{g}_0$ の一次元表現、 $H_i v_0 = \lambda_i v_0$ ($\lambda_i \in \mathbb{C}$) とする。これに対し、 $X v_0 = 0$, $V \equiv \mathfrak{g} \otimes_{\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_{-1}} V_0$ で $\mathfrak{g}$ の表現 V を定義する。

$H_n(\mathfrak{g}, V)$ の具体的な計算方法は次のとおりである。

$V = \langle v_0, Y \otimes v_0 \rangle_{\mathbb{C}}$. 2次元のベクトル空間であるから、

$v = a_1 v_0 + a_2 Y \otimes v_0$ のとき、 $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ と表すことにする。すると、 $\mathfrak{g}$ の基底の作用は、

$$\begin{aligned} H_1 v &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 - 1 \end{pmatrix} v, \quad H_2 v = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_2 + 1 \end{pmatrix} v, \quad X v = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v, \quad Y v = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v \\ &\quad (\lambda \equiv \lambda_1 + \lambda_2) \end{aligned}$$

と表すことができる。§3のホモロジーの計算式より、

$$\begin{aligned}
& \partial_{n-1} \left(\sum_{p=0}^n X^{(p)} \wedge Y^{(n-p)} \otimes \begin{pmatrix} a_{p1} \\ a_{p2} \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^2 \sum_{p=0}^{n-1} H_i \wedge X^{(p)} \wedge Y^{(n-p-1)} \otimes \begin{pmatrix} \lambda_{p1}^i \\ \lambda_{p2}^i \end{pmatrix} \right. \\
& \quad \left. + \sum_{p=0}^{n-2} H_1 \wedge H_2 \wedge X^{(p)} \wedge Y^{(n-p-2)} \otimes \begin{pmatrix} c_{p1} \\ c_{p2} \end{pmatrix} \right) \\
&= \sum_{p=0}^{n-1} X^{(p)} \wedge Y^{(n-p-1)} \otimes \begin{pmatrix} (-1)^n (p+1) \lambda a_{p+1,2} + (n-2p-1-\lambda_1) \lambda_{p1}^1 - (n-2p-1+\lambda_2) \lambda_{p1}^2 \\ (-1)^n (n-p) a_{p1} + (n-2p-\lambda_1) \lambda_{p2}^1 - (n-2p+\lambda_2) \lambda_{p2}^2 \end{pmatrix} \quad \textcircled{1} \\
& \quad \textcircled{2} \\
&+ \sum_{p=0}^{n-2} H_1 \wedge X^{(p)} \wedge Y^{(n-p-2)} \otimes \begin{pmatrix} -(p+1)(n-p-1) a_{p+1,1} + (-1)^n (p+1) \lambda \lambda_{p+1,2}^1 + (n-2p+\lambda_2-2) c_{p1} \\ -(p+1)(n-p-1) a_{p+1,2} + (-1)^n (n-p-1) \lambda_{p1}^1 + (n-2p+\lambda_2-1) c_{p2} \end{pmatrix} \quad \textcircled{3} \\
& \quad \textcircled{4} \\
&+ \sum_{p=0}^{n-2} H_2 \wedge X^{(p)} \wedge Y^{(n-p-2)} \otimes \begin{pmatrix} -(p+1)(n-p-1) a_{p+1,1} + (-1)^n (p+1) \lambda \lambda_{p+1,2}^2 + (n-2p-\lambda_1-2) c_{p1} \\ -(p+1)(n-p-1) a_{p+1,2} + (-1)^n (n-p-1) \lambda_{p1}^2 + (n-2p-\lambda_1-1) c_{p2} \end{pmatrix} \quad \textcircled{5} \\
& \quad \textcircled{6} \\
&+ \sum_{p=0}^{n-3} H_1 \wedge H_2 \wedge X^{(p)} \wedge Y^{(n-p-3)} \otimes \begin{pmatrix} p(n-p-1) (\lambda_{p1}^1 - \lambda_{p1}^2) + (-1)^n p \lambda c_{p2} \\ p(n-p-1) (\lambda_{p2}^1 - \lambda_{p2}^2) + (-1)^n (n-p-1) c_{p-1,1} \end{pmatrix} \quad \textcircled{7} \\
& \quad \textcircled{8}
\end{aligned}$$

$i=1, 2$ のとき、 $X^{(p)} \equiv X \wedge X \wedge \cdots \wedge X$ (p 個の外積)

ここで、 $\textcircled{1} \sim \textcircled{8} = 0$ として連立方程式を解くと、 $\text{Ker } \partial_{n-1}$ の基底を定めることが出来る。次に $\text{Ker } \partial_{n-1}$ の基底を挙げるが、

例えば $(a_{01} = 1)$ は $Y^{(n)} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と、 $(\lambda_{n-2}^1 = 1, c_{n-1} = -1)$ は

$H_1 \wedge X^{(n-2)} \wedge Y^{(n-n-2)} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + H_1 \wedge H_2 \wedge X^{(n-2)} \wedge Y^{(n-n-2)} \otimes \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を表し、

$(a_{p2} = 1) \quad 0 \leq p \leq n-1$ は $(a_{02} = 1), (a_{12} = 1), \dots, (a_{n-2,2} = 1)$ を表し

ている。

$$(a_{p+1,2} = n-2p-\lambda_1-1, \lambda_{p1}^1 = (-1)^{n+1} (p+1) \lambda, c_{p2} = (p+1)(n-p-1)) \quad 0 \leq p \leq n-2$$

$$(a_{p+1,2} = n-2p+\lambda_2-1, \lambda_{p1}^2 = (-1)^{n+1} (p+1) \lambda, c_{p2} = (p+1)(n-p-1)) \quad 0 \leq p \leq n-2$$

$$(a_{02} = 1)$$

$$(a_{n2} = n + \lambda_1 - 1, \mathcal{L}_{n-1,1}' = (-1)^n m \lambda).$$

$$(a_{n2} = n - \lambda_2 - 1, \mathcal{L}_{n-1,1}'' = -(-1)^n m \lambda)$$

$$(a_{p1} = n - 2p - \lambda_1, \mathcal{L}_{p,2}' = (-1)^{n-p}(n-p), c_{p+1} = p(n-p)) \quad 1 \leq p \leq n-1$$

$$(a_{p1} = n - 2p + \lambda_1, \mathcal{L}_{p,2}'' = (-1)^{n-p}(n-p), c_{p+1} = p(n-p)) \quad 1 \leq p \leq n-1$$

$$(a_{n1} = 1)$$

$$(a_{01} = n - \lambda_1, \mathcal{L}_{0,2}' = -(-1)^n m)$$

$$(a_{01} = n + \lambda_2, \mathcal{L}_{0,2}'' = (-1)^n m)$$

さらに、 $\lambda = 0$ のとき、

$$\lambda_1 = -(n-1) \text{ ならば } (\mathcal{L}_{n-1,1}' = 1)$$

$$\lambda_1 = -(n-2) \text{ ならば } (c_{n-2,1} = 1) \text{ も } \text{Ker } \partial_{n-1} \text{ に入る.}$$

次に $\text{Im } \partial_n$ に入るものも、同様に求める。(省略) これらと較べると、

$\lambda = 0$ かつ

$$\lambda_1 = -n \text{ のとき } (a_{n1} = 1)$$

$$\lambda_1 = -(n-1) \text{ のとき } (\mathcal{L}_{n-1,1}' = 1), (\mathcal{L}_{n-1,1}'' = 1)$$

$$\lambda_1 = -(n-2) \text{ のとき } (c_{n-2,1} = 1)$$

は $H_n(\mathcal{G}, V)$ の元となり、それ以外の場合は $H_n(\mathcal{G}, V) = \{0\}$ となる。

同様にして、 $H^n(\mathcal{G}, V)$ を計算すると結果は次のようになる。

$\lambda = 0$ かつ

$$\lambda_1 = n+1 \text{ のとき } (a_{n2} = 1)$$

$\lambda_1 = m$ のとき $(a_{n,1} = m, h_{n-1,2} = 1), (a_{n,1} = 1, h_{n-1,2} = 1)$

$\lambda_1 = -m$ のとき $(a_{0,1} = 1)$

が $H^n(g, V)$ の元, それ以外の場合は $H^n(g, V) = \{0\}$ となる.

これらを表にすると次のとおりになる. (空欄は 0 を表す)

表の訂正

(77ページ)

$H_m(g, V)$ の次元 ($\lambda = 0$ のとき)

$\lambda_i \backslash n$	0	1	2	3		k	$k+1$	$k+2$
1								
0	1	2	1					
-1		1	2	1				
$\vdots$								
$-k$						1	2	1

$H^n(g, V)$ の次元 ($\lambda = 0$ のとき)

$\lambda_i \backslash n$	0	1	2	3		$k-1$	k	$k+1$
0								
1	1	2	1					
2		1	2	1				
$\vdots$								
k						1	2	1

(78ページ)

$\lambda_i \backslash n$	0	1	2	3		k	$k+1$
0	1	1					
± 1		1	1				
± 2			1	1			
$\vdots$							
$\pm k$						1	1

表から明らかな様に, $g = gl(1,1)$ の場合, V をこのように
とると Poincaré duality (5.5 で述べる) は成り立たない。

ところで, $\lambda = 0$ のとき, V は可約であり, $\langle Y \otimes v_0 \rangle_{\mathbb{C}}$ は
不変部分空間である。 $Y \otimes v_1$ に対する H_1 の固有値を $\lambda'_1 = \lambda_1 - 1$
とすると, $H_n(g, V'), H^n(g, V')$ ($V = \langle Y \otimes v_0 \rangle_{\mathbb{C}}$) の次元は等し
くなり, 次の表のとおりになる。

$\lambda'_i \backslash n$	0	1	2	3		$R-1$	R	
0	1	1						
± 1	1	1	1					
± 2			1	1				
$\pm R$						1	1	

これに対し, 商空間 V/V' の方は, H_1 の固有値が丁度 λ_1 に
なるから, 上の表において, $\lambda'_i = \lambda_i$ としたものになる。これ
らのことより, 不変部分空間と商空間のホモロジー同志, コ
ホモロジー同志を足したものがもとの空間のホモロジー, コ
ホモロジーになるという単純な結果になっていないという
こともわかる。

§5. Poincaré duality.

有限次元リ-環 $\mathfrak{g}$ ($\dim \mathfrak{g} = N$) とその表現 V に対して次に示すベクトル空間としての同形が成り立つ.

定理 (Poincaré duality)

$$H^n(\mathfrak{g}, V^*) \cong H_n(\mathfrak{g}, V)^*$$

$$H^n(\mathfrak{g}, V) \cong H_{N-n}(\mathfrak{g}, V \otimes (\wedge^N \mathfrak{g})^*)$$

ただし, $(\wedge^N \mathfrak{g})^*$ への $\mathfrak{g}$ の作用は, $\varepsilon \in (\wedge^N \mathfrak{g})^*$ に対して

$$(X\varepsilon)(X_1 \wedge \cdots \wedge X_N) = -\sum_{i=1}^N \varepsilon(X_1 \wedge \cdots \wedge [X, X_i] \wedge \cdots \wedge X_N) \quad (X \in \mathfrak{g})$$

とする.

このうち、下の式については, $H_n(\mathfrak{g}, \cdot) = 0$ ($n > N$) が成り立つことを必要としている様に見えるが、実際、 $\mathfrak{g}$ が LSA のときも、表現の射影次元が有限であれば同様の式が成り立つことがわかっている。以下、 $\mathfrak{g}$ を LSA, $\dim \mathfrak{g}_0 = d_0$, $\dim \mathfrak{g}_1 = d_1$ とする.

定義 (射影次元)

LSA $\mathfrak{g}$ の表現 V の射影次元が n である. とは,

$$0 \longleftarrow V \longleftarrow P_0 \longleftarrow P_1 \longleftarrow \dots \longleftarrow P_i \longleftarrow 0$$

上のように、 V の射影分解で有限でとまるものが存在し、 λ の最小値が m となることである。

定義 (Ber A)

A を superalgebra, $(a_1, \dots, a_m)$ を A_0 の, $(a_{m+1}, \dots, a_{m+n})$ を A_1 の基底とする。また, $(a_i)_{i=1}^{m+n}$ に対応する双対基底を $(a^i)_{i=1}^{m+n}$ と書くことにする。 $K_n = S^n(\pi A) \otimes S(A^*)$,

d を $\sum_{i=1}^{m+n} (-1)^{|a_i|+1} \pi a_i \otimes a^i$ を左からかける作用とする。

$$0 \longrightarrow K_0 \longrightarrow K_1 \longrightarrow K_2 \longrightarrow \dots$$

この複体のコホモロジーを $H^n(K)$ と表したとき、

$$\text{Ber}(A) \equiv H^m(K) \quad \text{とする。}$$

注1: $H^i(K) = 0$ ($i \neq m$) である。

注2: $n = 0$ のとき, $\text{Ber} A = \wedge^m A$

注3: $\text{Ber}(A) \cong \mathbb{C}(\pi a_1 \cdots \pi a_m \cdot a^{m+1} \cdots a^{m+n})$

定理 (Poincaré duality — $\mathcal{G}$ が LSA のとき)

$\mathcal{G}$ を LSA, $\dim \mathcal{G}_0 = d_0$, V を $\mathcal{G}$ の表現とする。 V の射影次元が有限であれば次の duality が成り立つ。

$$H^n(\mathcal{G}, V) \cong H_{d_0-n}(\mathcal{G}, V \otimes \text{Ber} \mathcal{G}^*)$$

§ 6. リー環の cohomological induction.

$$G \equiv U(m, n) \equiv \{g \in GL(m+n, \mathbb{C}) \mid g^* I_{m, n} g = I_{m, n}\}$$

$$I_{m, n} = \begin{pmatrix} 1_m & 0 \\ 0 & -1_n \end{pmatrix} \in GL(m+n, \mathbb{C})$$

$$K \equiv G \cap U(m+n) = \begin{pmatrix} U(m) & 0 \\ 0 & U(n) \end{pmatrix} : G \text{ の maximal compact.}$$

$$\mathfrak{g}_0 \equiv \text{Lie}(G), \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{a}_0 \oplus \mathfrak{p}_0 \quad \text{Cartan 分解.}$$

$$\mathfrak{h}_g : \text{Cartan 部分環} \quad T : \text{Cartan 部分群}$$

$$\mathfrak{g}_p \subset \mathfrak{g} : \text{parabolic 部分環}$$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{u} : \text{Levi 分解.} \quad L : \mathfrak{l} \text{ に対応する Lie 部分群}$$

G は一般に reductive なリー群であるが、簡単のため、上のように定める。

$(\mathfrak{l}, L \cap K)$ -加群 $\mathbb{Z}$ に対し、 $\mathbb{Z}_g^\# \equiv \mathbb{Z} \otimes \wedge^{\dim \mathfrak{u}} \mathfrak{u}$ は、 $\mathfrak{u}$ の自明な作用を受けるとして、 $(\mathfrak{g}, L \cap K)$ -加群と考えることができる。

$$I_{\mathfrak{a}, H}^{\mathfrak{g}, K} \equiv \text{Hom}_{R(\mathfrak{a}, H)}(R(\mathfrak{g}, K), \cdot)$$

を $(\mathfrak{a}, H)$ -加群から $(\mathfrak{g}, K)$ -加群への共変関手とする。ただし、 $R(\mathfrak{g}, K)$ は $(\mathfrak{g}, K)$ -加群の圏における相対リー代数とする。これに対し、

$$R^i(\mathbb{Z}) \equiv (I_{\mathfrak{g}, L \cap K}^{\mathfrak{g}, K})^i(I_{\mathfrak{g}, L \cap K}^{\mathfrak{g}, L \cap K}(\mathbb{Z}_g^\#))$$

を $\mathbb{Z}$ に対する cohomologically induced module という。

この $R^i(\Sigma)$ の表現に関してはかなり色々なことがわかって
いるが、特に Σ を L の 1 次元表現, $i = \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{U} \cap \Sigma)$ としたと
き、すなわち

$$A^{\mathbb{G}}(\lambda) \equiv R^{\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{U} \cap \Sigma)}(\mathbb{C}\lambda)$$

とすると、この $A^{\mathbb{G}}(\lambda)$ は $\mathbb{G}$ の任意の discrete series と一対一
に対応するということが知られている。

また、 $A^{\mathbb{G}}(\lambda)$ の K の表現としての構造はコホモロジーの言
葉で記述することができ、特に $L \cap K = T$ のときは、Blattner
multiplicity formula という、非常にきれいな形で書けてい
る。

Cohomological induction には、射影次元が有限であること、
および Poincaré duality のもとになり立っている理論が多い。
したがって、この理論を LSA に拡張しようとすると、とりあ
げる表現の射影次元が有限であることが条件となる。

LSA $\mathfrak{gl}(m, m)$ は、リー環 $\mathfrak{gl}(m+n, \mathbb{C})$ とベクトル空間とし
ては同形であり、またこの even part はこの $\mathfrak{g}$ でとりあげた
 $\mathfrak{h}$ と全く同じものであることから、 $\mathfrak{gl}(m, m)$ と K とをリー環
の場合と同様、対にして考えることができる。このように、

cohomological induction の理論の LSA 版を与えようとするのは自然な発想であり、私のこれからの課題とするところである。

参考文献

- [1] S. Chemla, Propriétés de dualité dans les représentations conduites de superalgèbre de Lie. Univ. Paris 学位論文 (1990)
- [2] V.G. Kac, Lie superalgebras. Adv. in Math. 26. no.1. (1977). 8-96.
- [3] V.G. Kac, Representations of classical Lie superalgebras, LNM 676 Springer Verlag (1977) 597-626
- [4] A.W. Knap, Lie groups, Lie algebras, and cohomology, Princeton Univ. Press (1988)
- [5] D.A. Leites, Cohomologies of Lie superalgebras, Funct. Analysis 9. (1975) 340-341
- [6] 寺田順子. リー超代数と cohomological induction
京都大学修士論文. (1992)