

ソリトン方程式と Hall-Littlewood 多項式に関する一注意

山田 裕史 (東京都立大学)

ここでいうソリトン方程式とは 10 年以上前に京都スクールの人々によって導入された KP hierarchy の B 面である BKP hierarchy のことです。今回はソリトンそのものを対象とするのではなくその有理解 (多項式解) を問題にしたいと思います。

BKP hierarchy は通常、擬微分作用素を用いて記述されますが、次の形の 広田型双線型方程式系 で与えることも可能です。まず、変数を $t = (t_1, t_3, t_5, \dots)$, パラメータを $z = (z_1, z_3, z_5, \dots)$ とします。 τ -函数 $\tau(t) = \tau(t_1, t_3, t_5, \dots)$ に関する方程式は z の母函数として

$$\sum_{k=0}^{\infty} q_k(2z) q_{k+1}(-2D) e^{\tilde{D} z_1 D_1 + z_3 D_3 + \dots} (\tau(t) \cdot \tau(t)) = 0$$

で与えられます。ただしここで、 D と書いた作用素は 広田微分 と呼ばれるもので、函数のペア $(f(t), g(t))$ に対して

$$P(D)f(t) \cdot g(t) = P\left(\frac{\partial}{\partial s}\right) f(t+s)g(t-s) \Big|_{s=0}$$

により定義されます。また $\tilde{D} = (D_1, D_3/3, D_5/5)$, $D_n = D_{t_n}$ の意味です。多項式 $q_k(z)$ は次の母函数で定義されます。

$$\sum_{k=0}^{\infty} q_k(z) \lambda^k = e^{z_1 \lambda + z_3 \lambda^3 + \dots}$$

この方程式系には $t = (t_1, t_3, \dots)$ の多項式となっている解 $\tau(t)$ が十分たくさん存在します。通常の従属変数 u に変換すると t の有理式となるので一般にそのような解を有理解と呼びます。他にもソリトン解、準周期解など厳密解が多々存在します。

有理解の説明のため Macdonald の本に従って Hall-Littlewood 函数を

導入します。 n 変数整数係数対称多項式全体のなす graded ring を Λ_n とします： $\Lambda_n = \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ $S_n = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Lambda^k$. $m \geq n$ のとき変数の restriction $\rho_{m,n}^k: \Lambda_m^k \longrightarrow \Lambda_n^k$ による逆極限を考えそれを Λ^k とします： $\Lambda^k = \varprojlim \Lambda_n^k$. さらに $\Lambda = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Lambda^k$ においてこの環のことを 対称函数環 ($/\mathbb{Z}$) といいます。 Hall-Littlewood 函数とは，分割（又は Young 図形） $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ($\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$) でパラメトライズされる Λ の（直交）基底の一つでパラメータ t をもっています。まず Λ_n の元を

$$Q_{\lambda}(x_1, \dots, x_n; t) = (1-t)^{\ell(\lambda)} \sum_{w \in S_n} \left(x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n} \prod_{i < j} \frac{x_i - tx_j}{x_i - x_j} \right)$$

で定義します。 $t=0$ とおくとこれは Schur の S-函数、いわゆる Schur 函数 で $GL(n, \mathbb{C})$ の最高ウェイト $\sum_i \lambda_i \varepsilon_i$ をもつ有限次元既約表現の指標を対角部分群の座標で見たものに他なりません。 λ の長さが $\ell(\lambda) \leq n$ になる限り $m \geq n$ に対して $\rho_{m,n} Q_{\lambda}(x_1, \dots, x_m; t) = Q_{\lambda}(x_1, \dots, x_n; t)$ となるので無限変数版 $Q_{\lambda}(x; t) \in \Lambda$ が考えられます。この $Q_{\lambda}(x; t)$ を Hall-Littlewood 函数 と呼びます。 $\{ Q_{\lambda}(x; t); |\lambda| = k \}$ は $\Lambda^k \otimes \mathbb{Q}(t)$ の $\mathbb{Q}(t)$ -基底をなすことがわかります。巾和函数 $p_n(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^n$, $p_{\lambda}(x) = p_{\lambda_1}(x) p_{\lambda_2}(x) \dots$ との間の変換公式（Frobenius の公式）が非常に重要です。

$$Q_{\lambda}(x; t) = \sum_{\rho} z_{\rho}(t)^{-1} X_{\rho}^{\lambda}(t) p_{\rho}(x)$$

ここで和は λ と同じ次数を持つ分割 ρ を動きます。 $\rho = (\rho_1, \rho_2, \dots) = (1^{m_1} 2^{m_2} \dots)$ と書いたとき

$$z_{\rho}(t) = z_{\rho} / \prod_j (1-t^j)^{\rho_j} = \prod_i i^{m_i} m_i! / \prod_j (1-t^j)^{\rho_j}$$

$$X_{\rho}^{\lambda}(t) = \sum_{\mu} X_{\rho}^{\mu} K_{\mu\lambda}(t) \in \mathbb{Z}[t]$$

です。 X_{ρ}^{μ} は $|\mu|$ 次の対称群の既約指標、 $K_{\mu\lambda}(t)$ は Kostka-Foulkes 多項式とよばれるもので $K_{\mu\lambda}(0) = \delta_{\mu\lambda}$ です。これから、 $t=0$ とおいた Schur の S -関数が対称群の指標と関係があることは、一目瞭然ですが $t=-1$ とおいたもの $Q_{\lambda}(x) = Q_{\lambda}(x; -1)$ (これを Schur の Q -関数と呼びます) は対称群の スピン表現の指標と深い関係があります。 $Q_{\lambda}(x)$ は λ が strict な分割 ($\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$, $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots$) でないときには恒等的にゼロになってしまいます。また strict な分割 λ に対して

$$Q_{\lambda}(x) = \sum_{\rho} 2^{l(\rho)} z_{\rho}^{-1} X_{\rho}^{\lambda}(-1) p_{\rho}(x).$$

ただし、ここで ρ は奇数のみからなっている分割を動きます。新しい変数を $t_n = \frac{2}{n} p_n(x)$ ($n=1, 3, 5, \dots$) と定義すると Q_{λ} は

$$Q_{\lambda}(t) = \sum_{\rho=(1^{m_1} 3^{m_3} \dots)} X_{\rho}^{\lambda}(-1) \frac{t_1^{m_1} t_3^{m_3} \dots}{m_1! m_3! \dots}$$

と $t=(t_1, t_3, \dots)$ の斉重多項式 ($\deg t_n = n$) で書けます。我々の結果は次のとおりです。

定理 任意の strict な分割 λ に対して $Q_{\lambda}(t)$ は BKP hierarchy の解 (τ -関数) である。逆に BKP hierarchy の τ -関数で斉重多項式になっているものは $\text{const.} Q_{\lambda}(t)$ に限る。

これは定理と称するのもはばかられるくらい簡単なことで少し考えればあたりまえの事実なのですがこういう形で state されたものを私はまだ見たことがないのでここに挙げた次第です。

講演では KP hierarchy の τ -関数との関係、Virasoro algebra の Fock 表現との関係についても触れたいと思います。