

対称空間上の不変微分作用素環について

東大・理 黒川貴司

(Takashi Kurokawa)

§ 0 序論

$X = G/K$ を非コンパクト型リーマン対称空間、 G を中心有限な連結実半単純リー群とし、 K を G の極大コンパクト部分群とする。 $\pi : G \rightarrow X$ を射影とする。

G 上の左不変微分作用素環を $D(G)$ 、その中で右側 K 不変なものをつくる部分環を $D_K(G)$ 、両側 G 不変なもの全体を $Z(G)$ とおく。また、 X 上の不変微分作用素環を $D(X)$ とおき、写像 $\mu : D_K(G) \rightarrow D(X)$ を

$$(\mu(D)f) \cdot \pi = D(f \cdot \pi), \quad f \in C^\infty(X)$$

により定め、 $Z(G)$ の μ による像を $Z(X)$ とする。このとき $D(X)$ と $Z(X)$ との関係について次の定理が成り立つことが知られている。

定理 0.1 ([3]) X : 既約とする。このとき、 $D(X) = Z(X)$ が成り立つのは X の対称対 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ が次の(*)で示されるタイプではないことが必要十分である；

$$\begin{aligned} (*) \quad & E_{III} : (e_6, \mathfrak{so}(10) + \mathbb{R}), \\ & E_{IV} : (e_6, \mathfrak{f}_4), \\ & E_{VII} : (e_7, \mathfrak{e}_6 + \mathbb{R}), \\ & E_{IX} : (e_8, \mathfrak{e}_7 + \mathfrak{su}(2)). \end{aligned}$$

ところが一般に、

定理 0.2 ([3]) $D \in D(X)$ に対して、

$$(\#) \quad DZ_1 = Z_2$$

を満たすような $Z_1 \neq 0, Z_2 \in Z(X)$ が存在する。

が成り立っている。そこで素朴な考えとしても、(*)で示される4つのタイプの対称空間において、どのくらい $Z(X)$ と $D(X)$ との差があるのかについてももう少し詳しい結果に関心に移る。[3] では(#)の Z_1 の形を具体的に決定することについて若干の記述がある。これについては後に述べることにする。また、このような現象が起こる背景についても明らかにする必要性が生じるが、定理 0.1 を証明する上で[3] では次の補題が使われている点に注意したい(記号については§1)。

補題 0.3 ([3]) $E_{III}, E_{IV}, E_{VII}, E_{IX}$ のそれぞれに対して、次の条件を満たすような相異なる2つの dominant integral である $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}_R^*$ が存在する。

λ, μ は $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}$ 上では恒等的にゼロ;

$\rho_0 + \lambda$ と $\rho_0 + \mu$ は $W^\sim$ に関して conjugate.

この補題の拡張についても後に述べる。

§ 1 記号と準備

以下に述べる記号は [3] に従う。

G のリー環を $\mathfrak{g}$ とし、 $X = G/K$ に対応する $\mathfrak{g}$ のカルタン分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ 、 θ をカルタン・インボリューションとする。 $\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{p}$ の極大可換部分空間、 $\Sigma = \Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ を $\mathfrak{a}$ に関する $\mathfrak{g}$ のルート系とする。また、 $\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ のカルタン部分環への $\mathfrak{a}$ の拡張、 $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}^c, \mathfrak{h}^c)$ を $\mathfrak{h}^c$ に関する $\mathfrak{g}^c$ のルート系とし、

$$\mathfrak{h}_R = \sqrt{1}(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}) + \mathfrak{a}$$

とおく。 $\mathfrak{a}^*$ と $\mathfrak{h}_R^*$ に両立する順序を入れておく。

Δ^+ を正ルート全体とすると、

$$P_0 = \{ \alpha \in \Delta^+; \alpha|_{\mathfrak{a}} = 0 \}, \quad \rho_0 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in P_0} \alpha$$

とおく。 $\mu \in (\mathfrak{h}^c)^*$, $\nu \in (\mathfrak{a}^c)^*$ に対して、

$$B(H\mu, H) = \mu(H), \quad (H \in \mathfrak{h}), \quad B(A\nu, A) = \nu(A), \quad (A \in \mathfrak{a})$$

により $H\mu \in \mathfrak{h}^c$, $A\nu \in \mathfrak{a}^c$ を定める。 $W, W^\sim$ をそれぞれ Σ, Δ に対するルート系のワイル群とし、 $\mathfrak{a}^c, \mathfrak{h}^c$ 上の対称環 $S(\mathfrak{a}^c), S(\mathfrak{h}^c)$ のそれぞれのワイル群不変な元全体を $I(\mathfrak{a}^c), I(\mathfrak{h}^c)$ とおく。さらに、

$$W^\sim_0 = \{ \mu \mapsto s(\mu + \rho_0) - \rho_0; s \in W^\sim \}$$

とおき、 $W^\sim_0$ に関する $S(\mathfrak{h}^c)$ の不変式全体のなす環を $I_0(\mathfrak{h}^c)$ とおく。

ここで $Z(X)$ と $D(X)$ との関係をはっきりとさせる上で有用な命題を述べておく。

命題 1.1 ([13]) 対称空間 X に関する次の 2 つ (3 つ) の性質は同値:

(i) $Z(X) = D(X)$

(ii) $\mathfrak{h}_R^*$ から $\mathfrak{a}^*$ への制限 $\bar{}$ は $I_0(\mathfrak{h}^c)$ から $I(\mathfrak{a}^c)$ への全射である。

さらに G が単純という仮定の下では、

(iii) $\mathfrak{h}_R^*$ から $\mathfrak{a}^*$ への制限 $\bar{}$ は $I(\mathfrak{h}^c)$ から $I(\mathfrak{a}^c)$ への全射である。

詳しい説明は省くが、大雑把に言えばこの命題により微分作用素に関する問題がワイル群の不変式に関する問題に変わるのである。

以上の準備の下で序論において述べた問題に移る。

§ 2 具体的な計算

① (#) の Z_1 の形を具体的に決定することについて

[3] と同様、[4] に従って不変式の生成元を書き表し、 $\mathfrak{h}_R^*$ から $\mathfrak{a}^*$ への制限 $\bar{}$ の計算をする。

例 1 E III : (e₆, s₀(10)+R)

$H_i = H \alpha_i$ とおく。 $m = 2, 5, 6, 8, 9, 12$

$$J_m = \sum_{i=1}^6 a_i^m + \sum_{i=1}^6 b_i^m + \sum_{0 < i < j < 7} c_{ij}^m$$

但し、 $i, j = 1, \dots, 6$

$$a_i = Y_i + Y, \quad b_i = Y_i - Y, \quad c_{ij} = -Y_i - Y_j$$

$$Y_1 = 5H_1 + 4H_2 + 3H_3 + 2H_4 + H_5$$

$$Y_2 = -H_1 + 4H_2 + 3H_3 + 2H_4 + H_5$$

$$Y_3 = -H_1 - 2H_2 + 3H_3 + 2H_4 + H_5$$

$$Y_4 = -H_1 - 2H_2 - 3H_3 + 2H_4 + H_5$$

$$Y_5 = -H_1 - 2H_2 - 3H_3 - 4H_4 + H_5$$

$$Y_6 = -Y_1 - Y_2 - Y_3 - Y_4 - Y_5$$

$$Y = -3(H_1 + 2H_2 + 3H_3 + 2H_4 + H_5 + H_6)$$

である。

$A_i = H_i \mid a^*$ とおくと、 $A_2 = A_3 = A_4 = 0$, $A_1 = A_5$ となるから、
 $x = 2A_1 + A_6$, $y = A_6$ とおくと、

$$I(a^c) = C[i_2, i_4] \quad (2 \text{ 変数多項式環と同型})$$

但し、 $i_2 = 4(x^2 + y^2)$, $i_4 = 16x^2y^2$

したがって、 $I(b^c)^-$ の生成元は

$$J_m^- = \begin{cases} 2^m (x^m + y^m) + 4(x+y)^m + 4(x-y)^m \\ \quad (m=2, 6, 8, 12) \\ 0 \quad (m=5, 9) \end{cases}$$

これより、

$$I(b^c)^- = C\langle i_2, i_2 i_4, i_4^2, i_4^3 \rangle$$

がわかる。

例 2 E IV : (e₆, f₄)(cf. [1])

$A_2 = A_3 = A_4 = A_6 = 0$ となるから、

$x = 2A_1 + A_5$, $y = -A + A_5$, $z = -A - 2A_5$, とおくと、

$$I(a^c) = C[i_2, i_3] \quad (2 \text{ 変数多項式環と同型})$$

但し、 $i_2 = -4(xy + yz + zx)$, $i_3 = -8xyz$

したがって、 $I(b^c)^-$ の生成元は

$$J_m^- = \{8 + (-2)^m\} (x^m + y^m + z^m)$$

これより、

$$I(h^c)^- = C \langle i_2, i_2 i_3, i_3^2, i_3^3 \rangle$$

例 1、例 2 にみられるように E III、E IV では (#) の Z_1 の形が簡単に決定されることがわかる。ところが、このように不変式の計算だけでは計算が複雑なだけに E VII、E IX においてははっきりとしたことはわからない。

例えば、次の命題が成り立っていることがわかっている。

命題 2.1 E VII において、 $I(a^c)$ の元を $I(h^c)^-$ の元の商の形で表すとき、その分母として、斉次 2 次の生成元の単項の冪を取ることはできない。

§ 3 補題の拡張

そこで定理 0.1([3]) の証明で用いられていた補題のところにまでもどる。この補題の証明方法は実に簡単なもので、実際に 2 つの条件を満たす元をもってくるだけのものである。

② 補題 0.3 (cf. [3]) の拡張について

この補題では E III、E IV、E VII、E IX しか調べなかったが、対称空間のレベルではなく、もっと他にこのような条件を満たすルート系、あるいは佐武図式（一般化された意味での）はないのか？

この問いについては対称空間の分類についての知識があればよい。このように一般化する場合、上で述べた補題中の条件が意味あるものでなければならないことを考慮に入れる必要がある。

命題 3.1 例外型ルート系 Δ に対する佐武図式 S で、白丸へ制限して既約なルート系ができるものとし、それを Σ とする。このようなことが起きるのは E I, . . . , E IX, F I, F II と G および、佐武図式の白丸が 1 つ ( も含める) である自明な タイプ以外では次の 2 つのタイプがあり、



このとき次の条件を満たす相異なる 2 つの dominant integral である $\lambda, \mu \in \Delta$ が存在する：

$$\begin{cases} \lambda, \mu \in \Sigma ; \\ \rho. + \lambda \text{ と } \rho. + \mu \text{ は } W(\Phi) \text{ に関して conjugate.} \end{cases}$$

また、この命題の中の 2 つのタイプについて § 2 と同様の計算を行なうと次のようになる。

参考文献

- [1] N.Bourbaki, Groupes et Algebres de Lie.
- [2] S.Helgason, Fundamental Solutions of Invariant Differential Operators on Symmetric spaces, Amer.J.Math 86,1964.
- [3] S.Helgason, Some Results on Invariant Differential Operators on Symmetric Spaces, Preprint,1989.
- [4] C.Y.Lee, Invariant polynomials of Weyl groups and applications to center of universal enveloping algebras, Can.J.Math. XXv,1974.
- [5] A.Helminck, Algebraic groups with a commuting pairs of involutions and Semisimple symmetric spaces, Advances in Math 71,1988.
- [6] S.Helgason, Groups and Geometric Analysis, Academic Press,1984.
- [7] F.Bien, D-modules and Spherical Representations, Princeton,1990.
- [8] J.Humphreys, Reflection groups and Coxeter groups, Cambridge,1990.