ユニタリ表現論セミナー報告集 XI, 1991
pp.59-70

ある種の"q-概均質ベクトル空間"の一考察について

（増田哲也氏との共同研究）

筑波大学 D2 小木曽 岳義

§0: Introduction

・以下で述べる話は、概均質ベクトル空間 $(GL(2), \square, Sym(3))$ に対応するものを量子化されたカテゴリーでどのように構成するのか？という素朴な疑問からスタートしている。ここでは、最も基本的かつ単純で非自明なものの例として $GL(2)$ 上の binary quadratic form $(GL(2), \square, Sym(3))$ をとり、その量子化を考察する。古典的には概均質ベクトル空間とは次のようなものである。G を connected algebraic group, V を複素数体 $\mathbb{C}$ 上の有限次元ベクトル空間, $\rho: G \longrightarrow GL(V)$ を有理表現とするとき，3つ組 (G, ρ, V) が概均質ベクトル空間であるとは

・"$V \supseteq {}^{\exists}S$: Zariski の意味での閉部分集合 s.t. $V \setminus S = \rho(G) x_0$"

なる性質を満たすときにいう。(以下，簡単のために、概均質ベクトル空間のことを P.V. と略記する。) P.V. (G, ρ, V) を1つ固定したときに，V 上の恒等的には 0 でない有理函数 $f(x)$ が，ある $\chi: G \longrightarrow GL(1) = \mathbb{C}^{\times}$ なる有理1次元表現（我々は，有理指標と呼んでいる。）に対して，

$$f(\rho(g) \cdot x) = \chi(g) f(x)$$

が成立するとき，この$f(x)$を有理指標$\chi(g)$に対応するP.V.(G, ρ, V)の相対不変式と呼ぶ。特に，ここで我々が扱うのは，Binary quadratic form $(GL(2), \square, Sym(3))$ であり，

$(G, \rho, V) = (GL(2), \square, Sym(3))$ とおいたときに，

$g \in G$, $v \in V$に対して，$\rho(g)v = g v {}^t g$

と作用を定義する．このとき，

$$S = \left\{ v = \begin{bmatrix} X & Z \\ Z & Y \end{bmatrix} \in V \;\middle|\; \det v = XY - Z^2 = 0 \right\}$$ とすると，

$V \setminus S = \rho(G) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ となり，P.V.になる。また，

$$f(v) = XY - Z^2$$

とおくと，$f(\rho(g) \cdot v) = (\det g)^2 f(v)$ となり，$f(v)$が有理指標$\chi(g) = (\det g)^2$ に対応する(G, ρ, V)の相対不変式になっている。

このとき，(G, ρ, V) は"正則"という性質をもっているために，反傾表現$(G, \check{\rho}, \check{V})$も正則なP.V.になる．但し，ここで，反傾表現と言っているのは，V上の内積

$$\langle v, v' \rangle = \operatorname{tr} v v' = XX' + 2ZZ' + YY', \quad v = \begin{bmatrix} X & Z \\ Z & Y \end{bmatrix}, v' = \begin{bmatrix} X' & Z' \\ Z' & Y' \end{bmatrix} \in V$$

からくるpairing $\langle \ , \ \rangle : V \times \check{V} \longrightarrow \mathbb{C}$ について言っており，$\check{\rho}(g) = {}^t\rho(g)^{-1}$となる．また，このPairing$\langle \ , \ \rangle$で$v = \begin{bmatrix} X & Z \\ Z & Y \end{bmatrix} \in V$と$\check{v} = \begin{bmatrix} \check{X} & \check{Z} \\ \check{Z} & \check{Y} \end{bmatrix} \in \check{V}$とを同一視する。このとき，反傾表現の相対不変式も$\check{f}(\check{v}) = \check{X}\check{Y} - \check{Z}^2$，$\check{v} = \begin{bmatrix} \check{X} & \check{Z} \\ \check{Z} & \check{Y} \end{bmatrix}$

となるが，定数係数微分作用素$D = \frac{\partial^2}{\partial X \partial Y} - \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial Z^2}$ は，

$$D e^{\langle v, \check{v} \rangle} = \check{f}(\check{v}) e^{\langle v, \check{v} \rangle}$$

をみたし、さらに、

$$\check{P}(f^{s+1}) = (s+1)(s+\tfrac{3}{2})f^{s}\quad,\quad s\in\mathbb{C}$$

という性質をもつ。(ここに出てきた，$s\in\mathbb{C}$の多項式$(s+1)(s+\frac{3}{2})$のことを、$(GL(2), \square, Sym(3))$ の b-function と呼ぶ。)

以下では、以上の q-analogue を考察し、同様のことが、成立することを示す。

§1: $(A(GL_q(2)), \rho, A_{\square,q})$ の定義について

この§では、$(GL(2), \square, Sym(3))$に相当する "q-P.V" を構成する。$A(GL_q(2))$ を次で定義される$\mathbb{C}$上の Hopf algebraとする。

generators : x, u, v, y, t, t^{-1}

relations : $ux = qxu,\ vx = qxv,\ yu = quy,\ yv = qvy$

$$xy - \frac{1}{q}uv = yx - quv = t,\quad t\cdot t^{-1} = t^{-1}\cdot t = 1,\quad t, t^{-1}\text{は central}$$

Hopf algebra structure

$$\begin{pmatrix}\Delta(x) & \Delta(u)\\ \Delta(v) & \Delta(y)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\otimes 1 & u\otimes 1\\ v\otimes 1 & y\otimes 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\otimes x & 1\otimes u\\ 1\otimes v & 1\otimes y\end{pmatrix},\quad \Delta(t^{\pm}) = t^{\pm}\otimes t^{\pm}$$

$$\begin{pmatrix}\varepsilon(x) & \varepsilon(u)\\ \varepsilon(v) & \varepsilon(y)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad \varepsilon(t^{\pm}) = 1$$

$$\begin{pmatrix}S(x) & S(u)\\ S(v) & S(y)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t^{-1}y & -qt^{-1}u\\ -\frac{1}{q}t^{-1}v & t^{-1}x\end{pmatrix},\quad S(t^{\pm}) = t^{\mp}$$

//

さて、次に non-commutative $\mathbb{C}$-algebra $A_{\square,q}$ を、次の様に定義する：

$$A_{m.q} := \mathbb{C}[X, Z, Y] \Big/ \left\{ \begin{array}{l} ZX = q^2 XZ \ , \ YZ = q^2 ZY \\ YX - XY = [2](q - \frac{1}{q}) Z^2 \end{array} \right\}$$

但し、$[n] := \frac{1-q^{2n}}{1-q^2}$ とおく。

これについて、

algebra map $\rho : A_{m.q} \longrightarrow A(GL_q(2)) \otimes A_{m.q}$

を、generators $X, Z, Y \in A_{m.q}$ について、次の様に定義する

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} \rho(X) = x^2 \otimes X + [2] xu \otimes Z + u^2 \otimes Y \\ \rho(Z) = xv \otimes X + (t + (q + \frac{1}{q}) uv) \otimes Z + uy \otimes Y \\ \rho(Y) = v^2 \otimes X + [2] vy \otimes Z + y^2 \otimes Y \end{array} \right.$$

このとき、

<u>lemma 1-1</u>

$\rho : A_{m.q} \longrightarrow A(GL_q(2)) \otimes A_{m.q}$ は、algebra map として、well-defined であり、また $A_{m.q}$ 上の left $A(GL_q(2))$-comodule map でもある。

§2: $(A(GL_q(2)), \rho, A_{m.q})$ の相対不変式について

<u>Proposition 2-1</u>

$F_0 = XY - \frac{1}{q} Z^2 \in A_{m.q}$ について、

$$Z(A_{m.q}) = \mathbb{C}[F_0]$$ が成立する。

但し、$Z(A_{m.q})$ は $A_{m.q}$ の centers のなす algebra で、$\mathbb{C}[F_0]$ は F_0 の生成する多項式環である。

Definition

$\rho : A_{m,q} \longrightarrow A(GL_q(2)) \otimes A_{m,q}$ について.

$F \in A_{m,q}$ が, $(A(GL_q(2)), \rho, A_{m,q})$ の相対不変式であるとは,

$$\rho(F) = t^m \otimes F \qquad \text{for some } m \in \mathbb{Z}$$

となるときをいう。

すると、次の定理が成立する。

Theorem 2-2

$R.I.(A_{m,q}\,;\,n) := \{ f \in A_{m,q} \;;\; \rho(f) = t^n \otimes f \}$ とおくと,

$R.I.(A_{m,q}\,;\,2m+1) = \{0\}$

$R.I.(A_{m,q}\,;\,2m) = \mathbb{C} \cdot F_0^m \qquad (m \geq 0)$

$R.I.(A_{m,q}\,;\,2m) = \{0\} \qquad (m < 0)$

(上記の意味で F_0 を, $(A(GL_q(2)), \rho, A_{m,q})$ の基本相対不変式と呼ぶ。)

このとき, $A_{m,q}$ に $\frac{1}{F_0}$ を付加した algebra $A_{m,q}[\frac{1}{F_0}]$ を考える.

さらに, $\rho : A_{m,q} \longrightarrow A(GL_q(2)) \otimes A_{m,q}$ を

$\rho(\frac{1}{F_0}) = t^{-2} \otimes (\frac{1}{F_0})$ として, $A_{m,q}[\frac{1}{F_0}]$ 上の left $A(GL_q(2))$-comodule

$$\rho : A_{m,q}[\tfrac{1}{F_0}] \longrightarrow A(GL_q(2)) \otimes A_{m,q}[\tfrac{1}{F_0}]$$

に拡張できる. こうして, Theorem 2-2 は次の様に改良される.

Theorem 2-2'

$R.I.(A_{m,q}[\frac{1}{F_0}]\,;\,n) := \{ f \in A_{m,q}[\frac{1}{F_0}] \;;\; \rho(f) = t^n \otimes f \}$ とおくと,

$R.I.(A_{m,q}[\frac{1}{F_0}]\,;\,2m) = \mathbb{C} \cdot F_0^m \qquad (m \in \mathbb{Z}^{\times})$

R.I.$\left(A_{\square,q}[\frac{1}{F_0}];\ 2n+1\right)=\{0\}$ $\qquad (n\in\mathbb{Z})$

//

§3: $(A(GL_q(2)),\ \rho,\ A_{\square,q})$ の"反傾表現"と"Pairing"

classical な議論で，$(G,\rho,V)=(GL(2),\square,Sym(3))$ の反傾表現 $\check{\rho}(g)$ は $\check{\rho}(g)={}^t\rho(g)^{-1}$ になっていたことに注意して，次の様に，"反傾表現" $(A(GL_q(2)),\ \check{\rho},\ \check{A}_{\square,q})$ を定義する。

$$\check{A}_{\square,q}=\mathbb{C}[\check{X},\check{Z},\check{Y}]\Big/\left\{\begin{array}{l}\check{Z}\check{X}=\frac{1}{q^2}\check{X}\check{Z}\ ,\quad \check{Y}\check{Z}=\frac{1}{q^2}\check{Z}\check{Y}\\ \check{Y}\check{X}-\check{X}\check{Y}=[2]\left(\frac{1}{q}-q\right)\check{Z}^2\end{array}\right\}$$

なる $\mathbb{C}$-algebra について，

algebra map $\check{\rho}:\check{A}_{\square,q}\longrightarrow A(GL_q(2))\otimes\check{A}_{\square,q}$ を

$$(*)'\left\{\begin{array}{l}\check{\rho}(\check{X})=t^{-2}y^2\otimes\check{X}-\frac{[2]}{q}t^{-2}vy\otimes\check{Z}+\frac{1}{q^2}t^{-2}v^2\otimes\check{Y}\\ \check{\rho}(\check{Z})=-qt^{-2}uy\otimes\check{X}-t^{-2}(t+(q+\frac{1}{q})uv)\otimes\check{Z}-\frac{1}{q}t^{-2}xv\otimes\check{Y}\\ \check{\rho}(\check{Y})=q^2t^{-2}u^2\otimes\check{X}-q[2]t^{-2}xu\otimes\check{Z}+t^{-2}x^2\otimes\check{Y}\end{array}\right.$$

として，定義する。

Remark

$(*)$を $\rho\begin{pmatrix}X\\Z\\Y\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}x^2 & [2]xu & u^2\\ xv & t+(q+\frac{1}{q})uv & uy\\ v^2 & [2]vy & y^2\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}X\\Z\\Y\end{bmatrix}$ と書いたときに，$(*)'$は，

$$\check{\rho}\begin{pmatrix}\check{X}\\ \check{Z}\\ \check{Y}\end{pmatrix}=\left\{\begin{bmatrix}1 & & \\ & \frac{1}{[2]} & \\ & & 1\end{bmatrix}{}^{t}S\left(\begin{bmatrix}x^2 & [2]xu & u^2\\ xv & t+(q+\frac{1}{q})uv & uy\\ v^2 & [2]vy & y^2\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}1 & & \\ & [2] & \\ & & 1\end{bmatrix}\right\}\otimes\begin{bmatrix}\check{X}\\ \check{Z}\\ \check{Y}\end{bmatrix}$$

と書けるように定義している。

//

さて、この場合、$(A(GL_q(2)), \check{\rho}, \check{A}_{\mathrm{III},q})$ の基本相対不変式 $\check{F}_0$ は、$\check{F}_0 = \check{X}\check{Y} - q^3\check{Z}^2 = \check{Y}\check{X} - \frac{1}{q}\check{Z}^2 \in \check{A}_{\mathrm{III},q}$ であり、

$\check{\rho}(\check{F}_0) = \chi^{-2} \otimes \check{F}_0$ となる。やはり、この場合も、§2の Proposition 2-1, Theorem 2-2, Theorem 2-2′ と同様の命題が成立し、$(A(GL_q(2)), \rho, A_{\mathrm{III},q})$ と同格のものであることがわかる。

$(A(GL_q(2)), \rho, A_{\mathrm{III},q})$ と $(A(GL_q(2)), \check{\rho}, \check{A}_{\mathrm{III},q})$ がそろったところで、$A_{\mathrm{III},q}$ と $\check{A}_{\mathrm{III},q}$ の pairing を考えることにする。

Definition

$A_{\mathrm{III},q} \otimes \check{A}_{\mathrm{III},q}$ 上の bilinear form を

$$\Omega = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}\, \xi_i \otimes \check{\xi}_j \quad \in A_{\mathrm{III},q} \otimes \check{A}_{\mathrm{III},q}$$

但し、$\xi_1 = X$, $\xi_2 = Z$, $\xi_3 = Y$, $\check{\xi}_1 = \check{X}$, $\check{\xi}_2 = \check{Z}$, $\check{\xi}_3 = \check{Y}$ とする。//

このとき、

Proposition 3-4

$A(GL_q(2))$-coinvariant な bilinear form Ω は、次のものの定数倍である。

$$\Omega_0 = X \otimes \check{X} + \frac{[2]}{q^2} Z \otimes \check{Z} + \frac{1}{q^4} Y \otimes \check{Y}$$

//

§4：微分表現と $(A(GL_q(2)), \rho, A_{m,q})$ の b-function

$A(GL_q(2))$ と，以下で定義する Hopf algebra $U_q(sl(2)) \otimes \mathbb{C}[t]$ との Pairing を考えるにあたり，次のような補助的な Hopf algebra $\tilde{A}(GL_q(2))$ を導入する。

generators：x, u, v, y, T, T^{-1}

relations：$ux = qxu$，$vx = qxv$，$yu = quy$，$yv = qvy$

$$xy - \frac{1}{q}uv = yx - quv = T^2$$

Hopf algebra structure

$$\begin{pmatrix} \Delta(x) & \Delta(u) \\ \Delta(v) & \Delta(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\otimes 1 & u\otimes 1 \\ v\otimes 1 & y\otimes 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\otimes x & 1\otimes u \\ 1\otimes v & 1\otimes y \end{pmatrix}, \quad \Delta(T^{\pm}) = T^{\pm}\otimes T^{\pm}$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon(x) & \varepsilon(u) \\ \varepsilon(v) & \varepsilon(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon(T^{\pm}) = 1$$

$$\begin{pmatrix} S(x) & S(u) \\ S(v) & S(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^{-2}y & -qT^{-2}u \\ -\frac{1}{q}T^{-2}v & T^{-2}x \end{pmatrix}, \quad S(T^{\pm}) = T^{\mp}$$

//

$\tilde{A}(GL_q(2))$ を，次の同型で，$A(SL_q(2)) \otimes \mathbb{C}[T, T^{-1}]$ と同一視する。

$A(SL_q(2))$ の generators を $\tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{y}$ とすると，

$$\begin{array}{ccc} \tilde{A}(GL_q(2)) & \xrightarrow{\sim} & A(SL_q(2)) \otimes \mathbb{C}[T, T^{-1}] \\ \varphi & \longmapsto & \tilde{\varphi} \otimes T \\ T^{-1}\varphi & \longleftarrow & \tilde{\varphi} \otimes 1 \\ T & \longleftrightarrow & T \end{array}$$

但し，$\varphi = x, u, v, y$ とする。

さて、$A^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(A(SL_q(2))\otimes\mathbb{C}[T,T^{-1}],\ \mathbb{C})$ なる $A(SL_q(2))\otimes\mathbb{C}[T,T^{-1}]$ の dual space は、次で定義される積により $\mathbb{C}$-algebra とみなせる。：$(\varphi\circ\psi)(a) = (\varphi\otimes\psi)\circ\Delta(a)$, $a\in A$, $\varphi,\psi\in A^*$.

このとき、e, f, k, k^{-1}, τ を次の様に定義する.

$$e\begin{pmatrix}\tilde{x} & \tilde{u}\\ \tilde{v} & \tilde{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad f\begin{pmatrix}\tilde{x} & \tilde{u}\\ \tilde{v} & \tilde{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad k^{\pm}\begin{pmatrix}\tilde{x} & \tilde{u}\\ \tilde{v} & \tilde{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sqrt{q}^{\pm} & 0\\ 0 & \sqrt{q}^{\mp}\end{pmatrix}$$

$$\tau\begin{pmatrix}\tilde{x} & \tilde{u}\\ \tilde{v} & \tilde{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad e(T)=f(T)=0,\quad \tau(T)=\frac{1}{2},\quad k^{\pm}(T)=1$$

このような、$e, f, k, k^{-1}, \tau\in A^*$ で生成され、次の relation をもつ A^* の $\mathbb{C}$-subalgebra を $U_q(sl(2))\otimes\mathbb{C}[\tau]$ とする.

<u>relations</u> $\quad kek^{-1} = qe,\quad kfk^{-1} = \frac{1}{q}f,\quad [e,f] = \frac{k^2-k^{-2}}{q-q^{-1}}$

τは central.

そうしたとき、$U_q(sl(2))\otimes\mathbb{C}[\tau]$ は、次の Hopf algebra structure をもち、Hopf algebra となる。

$$\begin{cases}\Delta(e) = e\otimes k + k^{-1}\otimes e\\ \Delta(f) = f\otimes k + k^{-1}\otimes f\\ \Delta(k^{\pm}) = k^{\pm}\otimes k^{\pm}\\ \Delta(\tau) = \tau\otimes 1 + 1\otimes\tau\end{cases}\qquad \begin{cases}\varepsilon(e) = \varepsilon(f) = \varepsilon(\tau) = 0\\ \varepsilon(k^{\pm}) = 1\\ S(\tau) = -\tau,\quad S(e) = -qe\\ S(f) = -\frac{1}{q}f,\quad S(k^{\pm}) = k^{\mp}\end{cases}$$

このとき、次の diagram

```latex
\begin{tikzcd}
A(GL_q(2)) \arrow[r, hook] \arrow[drr, leftrightarrow, "\text{pairing}"'] & \tilde{A}(GL_q(2)) \arrow[r, "\sim"] & A(SL_q(2))\otimes\mathbb{C}[T,T^{-1}] \arrow[r] & A(SL_q(2)) \arrow[r] & 0 \\
 & & U_q(sl(2))\otimes\mathbb{C}[\tau] \arrow[u, "\text{pairing}"'] & U_q(sl(2)) \arrow[l, hook'] \arrow[u, "\text{pairing}"'] & 0 \arrow[l]
\end{tikzcd}
```

により、$A(GL_q(2))$ と $U_q(sl(2))\otimes\mathbb{C}[\tau]$ との pairing $\langle\ ,\ \rangle$ がわかる。

即ち、$\begin{pmatrix}\langle e,x\rangle & \langle e,u\rangle \\ \langle e,v\rangle & \langle e,y\rangle\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\langle f,x\rangle & \langle f,u\rangle \\ \langle f,v\rangle & \langle f,y\rangle\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}\langle k^{\pm},x\rangle & \langle k^{\pm},u\rangle \\ \langle k^{\pm},v\rangle & \langle k^{\pm},y\rangle\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{q}^{\pm} & 0\\0&\sqrt{q}^{\mp}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\langle \tau,x\rangle & \langle \tau,u\rangle \\ \langle \tau,v\rangle & \langle \tau,y\rangle\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$\langle e,t\rangle=\langle f,t\rangle=0$, $\langle k^{\pm},t\rangle=1$, $\langle\tau,t\rangle=1$ となる。

このとき、次のような微分表現を考える。

Definition

$$\nabla:(U_q(sl(2))\otimes\mathbb{C}[\tau])\otimes A_{\mathrm{III},q}\longrightarrow A_{\mathrm{III},q}$$
$$\varphi\otimes a\longmapsto(\varphi\circ S^{-1}\otimes I)P(a)$$

を、$U_q(sl(2))\otimes\mathbb{C}[\tau]$ の $A_{\mathrm{III},q}$ への action とする。このとき、$(\varphi\circ S^{-1}\otimes I)\cdot P$ を ∇_φ と書き、a の φ における微分表現という。//

$U_q(sl(2))\otimes\mathbb{C}[\tau]\ni e, f, k, k^{-1}, \tau$ の $X^l Z^m Y^n\in A_{\mathrm{III},q}$ における微分表現は、次の通りである。

lemma 4-1

$$\nabla_e(X^lZ^mY^n)=-\frac{[m]}{q^{l+m+1}\sqrt{q}}X^lZ^{m-1}Y^{n+1}-\frac{[2l]}{q^{l+m}\sqrt{q}}X^{l-1}Z^mY^n$$

$$\nabla_f(X^lZ^mY^n)=-\frac{[2m]}{q^{l+m-2}\sqrt{q}}X^lZ^{m+1}Y^{n-1}-\frac{[m]}{q^{l+m-1}\sqrt{q}}X^{l+1}Z^{m-1}Y^n$$

$$\nabla_k(X^lZ^mY^n)=q^{n-l}X^lZ^mY^n\ ,\quad \nabla_{k^{-1}}(X^lZ^mY^n)=q^{l-n}X^lZ^mY^n$$

$$\nabla_\tau(X^lZ^mY^n)=-(l+m+n)X^lZ^mY^n$$

$$(\ \nabla_{q^\tau}(X^lZ^mY^n)=q^{-(l+m+n)}X^lZ^mY^n\ )$$

さて、このとき、classical な議論で、$\check{P}$ と $g\in G$ との作用の関係より、$\rho(\check{P}(x)) = (t^{-2}\otimes I)(I\otimes P)(\rho(x))$ をみたすような、$A_{m,q}$ 上の endomorphism $\check{P}$ を考える。その観察より、

$$\check{P}(X^l Z^m Y^n) = q^{2m}\frac{[2l][2n]}{[2]^2} X^{l-1}Z^m Y^{n-1} - \frac{[m][m-1]}{q[2]^2} X^l Z^{m-2} Y^n$$

とおくと、$s\in\mathbb{Z}_{>0}$ について、

$$\check{P}(F_0^{s+1}) = \check{P}\left(\left(XY - \frac{1}{q}Z^2\right)^{s+1}\right) = \frac{[2s+2][2s+3]}{q[2]^2}F_0^s$$

となり、"b-function の q-analogue" $\frac{[2s+2][2s+3]}{q[2]^2}$ が得られる。

取鳥での講演では、出来たら、Pが具体的に、$A_{m,q}$ 上のよい性質をもつ微分作用素を使ってどのように書けるのかと言うことについても触れたいと思っている。

[参考文献]

1) Sato-Kimura ; A classification of irreducible prehomogeneous vector spaces and their relative invariants. Nagoya Math. J. 65, 1977, 1-155.

2) 佐藤幹夫述, 新谷卓郎記 :「概均質ベクトル空間の理論」数学の歩み 15号 (1970), 85-157

3) 神保道夫 :「量子群とヤン・バックスター方程式」シュプリンガー・フェアラーク東京

4) Hibi-Wakayama : A q-analogue of Capelli's identity for GL(2). Advances in Mathematics. to appear.

5) Masuda-Mimachi-Nakagami-Noumi-Ueno : Representations of the Quantum Group $SU_q(2)$ and the Little q-Jacobi Polynomials ; J. of Funct. Anal. vol. 99. No. 2. 1991. 357-386. //

◎なお, ここに書いた内容は更に詳しくまとめた論文を、現在準備中である。

—1991. 10. 29. (火)—