

Parameter Shift in Normal Generalized Hypergeometric Systems.

東北大理 齋藤 睦 (Mutsumi Saito)

この小文では [5] の主定理と幾つかの例について解説する。

§1. 古典的場合.

この節では F をガウスの超幾何函数とする。即ち、原点の近傍で、

$$(1.1) \quad F(a, b; c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} x^n,$$

ここで、 $(a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1)$ である。この時 a, b, c をパラメーターと呼ぶ。パラメーターの一つが 1 だけずれているものを隣接している (contiguous) という。隣接している超幾何函数の間には二つのタイプの関係式 (contiguity relations) がある。一つのタイプは。

$$(1.2) \quad c F(a, b-1; c; x) + (a-b)x F(a, b; c+1; x) \\ = c F(a-1, b; c; x)$$

などのガウスの関係式と呼ばれるものがある [2]。このタイプの関係式の GHF (generalized hypergeometric functions) への一般化は青本先生によつて得られている [1]。もう一つのタイプは次の式がある [2]。

$$(1.3) \quad a F(a+1, b; c; x) = \left(x \frac{d}{dx} + a\right) F(a, b; c; x)$$

$$(1.4) \quad \begin{aligned} & (c-a) F(a-1, b; c; x) \\ & = \left[x(1-x) \frac{d}{dx} - bx + c - a\right] F(a, b; c; x) \end{aligned}$$

$$(1.5) \quad b F(a, b+1, c; x) = \left(x \frac{d}{dx} + b\right) F(a, b; c; x)$$

$$(1.6) \quad \begin{aligned} & (c-b) F(a, b-1; c; x) \\ & = \left[x(1-x) \frac{d}{dx} - ax + c - b\right] F(a, b; c; x) \end{aligned}$$

$$(1.7) \quad \begin{aligned} & \frac{(c-a)(c-b)}{c} F(a, b; c+1; x) \\ & = \left[(1-x) \frac{d}{dx} + c - a - b\right] F(a, b; c; x) \end{aligned}$$

$$(1.8) \quad \begin{aligned} & (c-1) F(a, b; c-1; x) \\ & = \left(x \frac{d}{dx} + c - 1\right) F(a, b; c; x) \end{aligned}$$

式 (1.3) と (1.4) より

$$(1.9) \quad \begin{aligned} & \left[x(1-x) \frac{d}{dx} - bx + c - a - 1\right] \left(x \frac{d}{dx} + a\right) F(a, b; c; x) \\ & = a(c-a-1) F(a, b; c; x) \end{aligned}$$

式 (1.5) と (1.6) より.

$$(1.10) \quad [x(1-x)\frac{d}{dx} - ax + c - b - 1](x\frac{d}{dx} + b) F(a, b; c; x) \\ = b(c - b - 1) F(a, b; c; x)$$

式 (1.7) と (1.8) より

$$(1.11) \quad [(1-x)\frac{d}{dx} + c - a - b - 1](x\frac{d}{dx} + c - 1) F(a, b; c; x) \\ = (c - a - 1)(c - b - 1) F(a, b; c; x)$$

を得る。従、2. パラメータ a に関する b -函数 b_a は $b_a(a, b, c) = a(c - a - 1)$, b に関する b_b は $b_b(a, b, c) = b(c - b - 1)$, c に関する b_c は $b_c(a, b, c) = (c - a - 1) \times (c - b - 1)$ である (と定義する)。次節以降 b -函数と式 (1.3-8) の正規 GHS への一般化を行なう。また上の b_a, b_b, b_c の因子として現われる $a, b, (c - a - 1), (c - b - 1)$ は丁度ニュートン多面体の余次元 1 の面を定義するものである。

§2. 正規 GHS.

Gelfand 等に従い GHS (generalized hypergeometric systems) を次の様に定義する [3]。 N 個のベクトル $X_j = (X_{1j}, \dots, X_{nj}) \in \mathbb{Z}^n$ ($j = 1, \dots, N$) が次の二つの条件を満たしていると仮定する。

i) $X_1, \dots, X_N$ は $\mathbb{Z}^n$ を加群として生成する。

ii) 或る $c_i \in \mathbb{Z}$ ($i=1, \dots, n$) が在りて、全ての x_j はアフィン超平面 $\sum_{i=1}^n c_i x_i = 1$ に乗っている。

パラメータ $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ に対し、 $V = \mathbb{C}^N = \{(v_1, \dots, v_N)\}$ 上に GHS M_α を

$$M_\alpha = W / W \left(\begin{array}{c} \sum_{j=1}^N x_{ij} \theta_j - \alpha_i \quad (i=1, \dots, n) \\ \square_a \quad (a \in L) \end{array} \right)$$

で定義する。ここに W は V 上のワイル代数、 $\theta_j = v_j D_j$ 、 $D_j = \frac{\partial}{\partial v_j}$ 、 $\square_a = \prod_{a_j > 0} D_j^{a_j} - \prod_{a_j < 0} D_j^{-a_j}$ 及び、

$$L = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n \mid \sum_{j=1}^N a_j x_j = 0\}$$

である。また Q をニュートン多面体、即ち、 $x_1, \dots, x_N$ の $\mathbb{R}^n$ での凸包とし、

$$\mathcal{F} := \{ \Gamma \mid \Gamma \text{ は } Q \text{ の余次元 } 1 \text{ の面} \}$$

とおく。さらに、

$$\mathbb{Z}_{\geq 0} x_1 + \dots + \mathbb{Z}_{\geq 0} x_N$$

$$= (\mathbb{R}_{\geq 0} x_1 + \dots + \mathbb{R}_{\geq 0} x_N) \cap \mathbb{Z}^n$$

が成立しているものと仮定する。この条件を満たす GHS を正規と呼ぶ。各 $\Gamma \in \mathcal{F}$ に対し F_Γ を Γ を満たす線型型式として定義する。

- i) $F_\Gamma(X) = 0 \quad (\forall X \in \Gamma)$
- ii) $F_\Gamma(X_j) \geq 0 \quad (\forall j = 1, 2, \dots, N)$
- iii) F_Γ の係数は全々整数でその最大公約数は 1.

§3. b -函数の定義と定理.

さ2. $W[S]$ を非可換環 $\mathbb{C}[S_1, \dots, S_n] \otimes_{\mathbb{C}} W$ とする。
 こゝで、各 S_i は不定中心元である。各 j ($1 \leq j \leq N$)
 について I_j を $\sum_{i=1}^n \chi_{ij} \theta_j - S_i$ ($i=1, 2, \dots, n$) と
 $\square_a$ ($a \in L$) 及び D_j で生成された $W[S]$ の左イデアルとする。
 さ2. $\mathbb{C}[S] = \mathbb{C}[S_1, \dots, S_n]$ から $W[S]/I_j$
 へは 1 を 1 で代表される $W[S]/I_j$ の元を対応させる自然な
 $\mathbb{C}[S]$ -加群間の準同型写像がある。 B_j をその核とし、
 B_j に属する 0 でない多項式を D_j に対する b -函数と呼ぶ。
 この時、明らかに

命題 多項式 $b \in B_j$ に対し、或る $Q \in W$ が在りて任意
 の $\alpha \in \mathbb{C}^n$ に対し、 $b(\alpha) = Q D_j$ が M_α に於いて
 成立する。

実は、イデアル B_j は次の定理によつて完全に決定される。

定理 B_j は次の多項式 b_j で生成される単項イデアルである。

$$b_j(s) = \prod_{\substack{\Gamma \in \hat{\mathcal{F}}_j \\ F_\Gamma(X_j) > 0}} \prod_{k=0}^{F_\Gamma(X_j)-1} (F_\Gamma(s) - k)$$

注意 上述の命題より $Q_j \in W$ が存在して M_α に於いて $b_j(\alpha) = Q_j D_j$ が成立している。 M_α の解を積分表示 [4] 又は巾級数 [3] で書き表わし、それらに D_j, Q_j を作用させれば (1.3-8) の一般化を得る。 Q_j は具体例を与えられれば計算可能である。

定理の証明は省略し、以下、例を見てみよう。

§4. $p F_{p-1}$ の場合.

この節では、 $V = \mathbb{C}^{2p}$ で

$$M_{\alpha\beta} = \frac{W}{W} \left(\begin{array}{cc} \theta_i + \theta_{2p} - \alpha_i & (i=1, \dots, p) \\ \theta_{p+i} - \theta_{2p} - \beta_i & (i=1, \dots, p-1) \\ D_1 \cdots D_p - D_{p+1} \cdots D_{2p} \end{array} \right)$$

とする。この時、

$$\{F_r \mid r \in \mathcal{F}\} = \left\{ \begin{array}{ll} \alpha_{\tilde{\lambda}} & (1 \leq \tilde{\lambda} \leq p) \\ \alpha_{\tilde{\lambda}} + \beta_{\tilde{j}} & (1 \leq \tilde{\lambda} \leq p, 1 \leq \tilde{j} \leq p-1) \end{array} \right\}$$

が判かる。故に.

$$(4.1) \quad \begin{cases} b_{\tilde{\lambda}}(\alpha, \beta) = \alpha_{\tilde{\lambda}}(\alpha_{\tilde{\lambda}} + \beta_1)(\alpha_{\tilde{\lambda}} + \beta_2) \cdots (\alpha_{\tilde{\lambda}} + \beta_{p-1}) & (1 \leq \tilde{\lambda} \leq p) \\ b_{p+\tilde{\lambda}}(\alpha, \beta) = (\alpha_1 + \beta_{\tilde{\lambda}})(\alpha_2 + \beta_{\tilde{\lambda}}) \cdots (\alpha_p + \beta_{\tilde{\lambda}}) & (1 \leq \tilde{\lambda} \leq p-1) \\ b_{2p}(\alpha, \beta) = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdots \alpha_p \end{cases}$$

がある。さ2. $\Phi(\alpha, \beta, v)$ を $M_{\alpha\beta}$ の解とし、 X を $v_1 = v_2 = \cdots = v_p = -1$, $v_{p+1} = \cdots = v_{2p-1} = 1$ として定義される V の部分多様体とする。この時、

$$(4.2) \quad \begin{cases} D_{\tilde{\lambda}} \Phi(\alpha, \beta, v)|_X = -\theta_{\tilde{\lambda}} \Phi(\alpha, \beta, v)|_X \\ \quad = (\theta_{2p} - \alpha_{\tilde{\lambda}}) \Phi(\alpha, \beta, v)|_X & (1 \leq \tilde{\lambda} \leq p) \\ D_{p+\tilde{\lambda}} \Phi(\alpha, \beta, v)|_X = \theta_{p+\tilde{\lambda}} \Phi(\alpha, \beta, v)|_X \\ \quad = (\theta_{2p} + \beta_{\tilde{\lambda}}) \Phi(\alpha, \beta, v)|_X & (1 \leq \tilde{\lambda} \leq p-1) \end{cases}$$

だから $\Phi(\alpha, \beta, v)|_X$ は.

$$[(\theta_{2p} - \alpha_1) \cdots (\theta_{2p} - \alpha_p) - D_{2p}(\theta_{2p} + \beta_1) \cdots (\theta_{2p} + \beta_{p-1})] \Phi(\alpha, \beta, v)|_X = 0$$

を満たす。即ち、 $\Phi(\alpha, \beta, v)|_X$ は.

${}_pF_{p-1}(-\alpha_1, \dots, -\alpha_p; \beta_1+1, \dots, \beta_{p-1}+1; v_{2p})$ と同じ微分方

程式を充たす。 並に同変性より

$$(-v_1)^{\alpha_1} \cdots (-v_p)^{\alpha_p} v_{p+1}^{\beta_1} \cdots v_{2p-1}^{\beta_{p-1}}$$

$$\times {}_pF_{p-1}(-\alpha_1, \dots, -\alpha_p; \beta_1+1, \dots, \beta_{p-1}+1; (-1)^p \frac{v_{p+1} \cdots v_{2p}}{v_1 \cdots v_p})$$

は $M_{\alpha\beta}$ の解となる。 $\bar{\sigma}$, $\mathcal{J} = 2^{\{1, 2, \dots, p\}}$ とし、

$$Q_i := \sum_{R=0}^{p-1} \left(\sum_{\substack{I \in \mathcal{J} \\ |I|=R}} \prod_{j \in I} \theta_{p+j} \right) \theta_i^{p-R-1} \cdot v_i \\ + \prod_{j=1}^p v_{p+j} \cdot \prod_{\substack{1 \leq j \leq p \\ j \neq i}} D_j \quad (1 \leq i \leq p)$$

$$Q_{p+i} := \sum_{R=0}^{p-1} \left(\sum_{\substack{I \in \mathcal{J} \\ |I|=R}} \prod_{j \in I} \theta_j \right) \theta_{p+i}^{p-R-1} \cdot v_{p+i} \\ + \prod_{j=1}^p v_j \cdot \prod_{\substack{1 \leq j \leq p \\ j \neq i}} D_{p+j} \quad (1 \leq i \leq p)$$

とおけば、

$$(4.3) \quad b_i(\alpha, \beta) \Phi(\alpha; \beta; v) = Q_i D_i \Phi(\alpha; \beta; v) \quad (i=1, \dots, 2p)$$

が成立する。 今、

$$\left(x \frac{d}{dx} + a_i\right) {}_pF_{p-1}(a; b; x) \\ = a_i {}_pF_{p-1}(a+1_i; b; x) \quad (i=1, \dots, p)$$

及び

$$\left(x \frac{d}{dx} + b_i - 1\right) {}_pF_{p-1}(a; b; x) \\ = (b_i - 1) {}_pF_{p-1}(a; b-1_i; x) \quad (i=1, \dots, p-1)$$

はすぐ判かるのぞ。 (4.1-3) より

$$\begin{aligned}
& -a_i(b_1-a_i-1)\cdots(b_{p-1}-a_i-1) {}_pF_{p-1}(a; b; x) \\
& = Q_{i|X} \left(x \frac{d}{dx} + a_i\right) {}_pF_{p-1}(a; b; x) \\
& = Q_{i|X} \cdot a_i {}_pF_{p-1}(a+1_i; b; x) \quad (1 \leq i \leq p)
\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}
& (b_i-a_1-1)(b_i-a_2-1)\cdots(b_i-a_{p-1}-1) {}_pF_{p-1}(a; b; x) \\
& = Q_{p+i|X} \left(x \frac{d}{dx} + b_i-1\right) {}_pF_{p-1}(a; b; x) \\
& = (b_i-1) Q_{p+i|X} {}_pF_{p-1}(a; b-1_i; x) \quad (1 \leq i \leq p-1)
\end{aligned}$$

即ち.

$$\begin{aligned}
& Q_{i|X} {}_pF_{p-1}(a; b; x) \\
& = -(b_1-a_i)(b_2-a_i)\cdots(b_{p-1}-a_i) {}_pF_{p-1}(a-1_i; b; x) \\
& \quad (1 \leq i \leq p)
\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}
& b_i Q_{p+i|X} {}_pF_{p-1}(a; b; x) \\
& = (b_i-a_1)(b_i-a_2)\cdots(b_i-a_p) {}_pF_{p-1}(a; b+1_i; x) \\
& \quad (1 \leq i \leq p-1)
\end{aligned}$$

を得る。こゝで $a \in \mathbb{C}^p$, $b \in \mathbb{C}^{p-1}$ と 1_i は i -th 成分が 1 で他の成分が 0 のベクトルである。一応、

$b_{2p}(\alpha, \beta)$ からは.

$$\begin{aligned}
& Q_{2p|X} \cdot {}_pF_{p-1}(a; b; x) \\
& = (-1)^p b_1 \cdots b_{p-1} {}_pF_{p-1}(a_1-1, \dots, a_{p-1}-1; b_1-1, \dots, b_{p-1}-1; x)
\end{aligned}$$

を得る。

§5. A型.

この節では. $V = \{(v_{ij}) \mid 1 \leq i \leq p, p \leq j \leq n\}$ 2.

$$M_{\alpha\beta} = \frac{W}{W} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^p \theta_{ij} - \alpha_j & (p \leq j \leq n) \\ \sum_{j=p}^n \theta_{ij} - \beta_i & (1 \leq i \leq p) \\ D_{ij} D_{i'j'} - D_{i'j} D_{ij'} & (i \neq i', j \neq j') \end{pmatrix}$$

とする。但し、 $\sum_{j=p}^n \alpha_j = \sum_{i=1}^p \beta_i$ と仮定する。この時、

$$\{F_r \mid r \in \mathcal{F}\} = \left\{ \begin{array}{ll} \alpha_j & (p \leq j \leq n) \\ \beta_i & (1 \leq i \leq p) \end{array} \right\}$$

が判かる。故に、

$$b_{ij}(\alpha, \beta) = \alpha_j \beta_i \quad (1 \leq i \leq p, p \leq j \leq n)$$

である。従って

$$Q_{ij} := \left(\sum_{s=1}^p \sum_{t=p}^n v_{it} v_{sj} D_{st} \right)$$

とおけば、 $M_{\alpha\beta}$ に対して

$$b_{ij}(\alpha, \beta) = Q_{ij} D_{ij} \quad (1 \leq i \leq p, p \leq j \leq n)$$

が成立する。

§6. D型 (の一つ)

この節では. $V = \mathbb{C}^{2^{n-2}} = \{(\alpha_i) \mid i = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(n-1)\},$

$$M_\alpha = \frac{W}{W} \left(\begin{array}{l} \theta_i - \theta_{-i} - \alpha_i \quad (i=1, 2, \dots, n-1) \\ \sum_{i=1}^{n-1} (\theta_i + \theta_{-i}) - \alpha_n \\ D_1 D_{-1} = D_2 D_{-2} = \dots = D_{n-1} D_{-(n-1)} \end{array} \right)$$

とする。また $J = 2^{\{1, 2, \dots, n-1\}}$ とし、 $J \in J$ に対し、 J' を J の $\{1, 2, \dots, n-1\}$ における補集合とする。
この時、

$$\{F_J \mid J \in J\} = \left\{ \frac{1}{2} (\alpha_n + \sum_{i \in J} \alpha_i - \sum_{j \in J'} \alpha_j) \mid J \in J \right\}$$

が判かる。故に、

$$2^{2^{n-2}} \cdot b_R(\alpha) = \prod_{\substack{J \in J \\ J \ni R}} (\alpha_n + \sum_{i \in J} \alpha_i - \sum_{j \in J'} \alpha_j) \quad (R > 0)$$

$$2^{2^{n-2}} \cdot b_{-R}(\alpha) = \prod_{\substack{J \in J \\ J \ni R}} (\alpha_n + \sum_{j \in J'} \alpha_j - \sum_{i \in J} \alpha_i) \quad (R > 0)$$

である。さて、 $k_1, \dots, k_{n-1}$ を $k_1 = k > 0$.

$\{k_1, \dots, k_{n-1}\} = \{1, 2, \dots, n-1\}$ となるように取り、

固定する。 $I_n = \{1, 2, \dots, n-1\} - \{k_1, \dots, k_n\}$ 及び

$J_n = 2^{I_n}$ とおき、 $J \in J_n$ に対して J' を J の I_n での補集合とする。また、 $s \geq 1$ に対して

$$d_s = \prod_{j \in \mathcal{J}_s} (\sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j + \sum_{j \in \mathcal{J}'} \theta_{-j})$$

及び

$$e_s = \prod_{j \in \mathcal{J}_{s+1}} (\theta_{\mathcal{R}_{s+1}} + \theta_{-\mathcal{R}_{s+1}} + \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j + \sum_{j \in \mathcal{J}'} \theta_{-j})$$

とおく。特に、 $d_{n-2} = \theta_{\mathcal{R}_{n-1}} \cdot \theta_{-\mathcal{R}_{n-1}}$ とある。 ≤ 2 .

$$d_s = \prod_{j \in \mathcal{J}_{s+1}} (\theta_{\mathcal{R}_{s+1}} \cdot \theta_{-\mathcal{R}_{s+1}})$$

$$+ (\theta_{\mathcal{R}_{s+1}} + \theta_{-\mathcal{R}_{s+1}} + \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j + \sum_{j \in \mathcal{J}'} \theta_{-j}) (\sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_j + \sum_{j \in \mathcal{J}'} \theta_{-j})$$

$$= \sum_{n=0}^{|\mathcal{J}_{s+1}|-1} \sum_{\substack{\text{異なる} \\ \mathcal{J}_1, \dots, \mathcal{J}_n \in \mathcal{J}_{s+1}}} \prod_{t=1}^n [(\theta_{\mathcal{R}_{s+1}} + \theta_{-\mathcal{R}_{s+1}} + \sum_{j \in \mathcal{J}_t} \theta_j + \sum_{j \in \mathcal{J}'_t} \theta_{-j}) (\sum_{j \in \mathcal{J}_t} \theta_j + \sum_{j \in \mathcal{J}'_t} \theta_{-j})] \\ \times (\theta_{\mathcal{R}_{s+1}} \theta_{-\mathcal{R}_{s+1}})^{|\mathcal{J}_{s+1}|-n}$$

$$+ e_s d_{s+1}$$

とあるから.

$$d_1 = \sum_{t=1}^{n-3} \left(\prod_{u=1}^{t-1} e_u \right) \left\{ \sum_{n=0}^{|\mathcal{J}_{t+1}|-1} \sum_{\substack{\text{異なる} \\ \mathcal{J}_1, \dots, \mathcal{J}_n \in \mathcal{J}_{t+1}}} \prod_{w=1}^n [(\theta_{\mathcal{R}_{t+1}} + \theta_{-\mathcal{R}_{t+1}} + \sum_{j \in \mathcal{J}_w} \theta_j + \sum_{j \in \mathcal{J}'_w} \theta_{-j}) (\sum_{j \in \mathcal{J}_w} \theta_j + \sum_{j \in \mathcal{J}'_w} \theta_{-j})] (\theta_{\mathcal{R}_{t+1}} \theta_{-\mathcal{R}_{t+1}})^{|\mathcal{J}_{t+1}|-n} \right\}$$

$$+ e_1 e_2 \dots e_{n-3} d_{n-2}$$

を得る。

また. M_α について

$$b_R(\alpha) = \prod_{j \in J_1} (\theta_R + \sum_{j \in J} \theta_j + \sum_{j \in J'} \theta_{-j}),$$

$$= \sum_{n=0}^{|J_1|} \sum_{\substack{\text{相異なる} \\ J_1, \dots, J_n \in J_1}} \left\{ \prod_{s=1}^n \left(\sum_{j \in J_s} \theta_j + \sum_{j \in J'_s} \theta_{-j} \right) \right\} \theta_R^{|J_1|-n}$$

であるから.

$$Q_R = \sum_{n=0}^{|J_1|-1} \sum_{\substack{\text{相異なる} \\ J_1, \dots, J_n \in J_1}} \left\{ \prod_{s=1}^n \left(\sum_{j \in J_s} \theta_j + \sum_{j \in J'_s} \theta_{-j} \right) \right\} \theta_R^{|J_1|-n-1} \cdot u_R$$

$$+ \sum_{t=1}^{n-3} \left(\prod_{u=1}^{t-1} e_u \right) \left\{ \sum_{n=0}^{|J_{t+1}|-1} \sum_{\substack{\text{相異なる} \\ J_1, \dots, J_n \in J_{t+1}}} \prod_{w=1}^n \left[\left(\theta_{R_{t+1}} + \theta_{-R_{t+1}} + \sum_{j \in J_w} \theta_j + \sum_{j \in J'_w} \theta_{-j} \right) \right. \right.$$

$$\left. \times \left(\sum_{j \in J_w} \theta_j + \sum_{j \in J'_w} \theta_{-j} \right) \right] \left(\theta_{R_{t+1}} \theta_{-R_{t+1}} \right)^{|J_{t+1}|-n-1} u_{R_{t+1}-R_{t+1}} D_{-R} \right\}$$

$$+ e_1 e_2 \dots e_{n-3} u_{R_{n-1}} u_{-R_{n-1}} \cdot D_{-R}$$

とおけば. M_α 上で $b_R(\alpha) = Q_R D_R$ ($R > 0$) が成立する. また. 上の Q_R の右辺で R を $-R$ に換えたものを Q_{-R} とすると. M_α 上で $b_{-R}(\alpha) = Q_{-R} D_{-R}$ ($R > 0$) が成立する.

§7. 注意.

先ず §4 で $p=2$ の場合と、§1 で述べた事実が符合することを確かめられたい。また、この小文で定義した b -函数は、従来の b -函数と異なるが、 b -函数と呼ばせていただいた。最後に §4 から §6 で述べた場合の正規性や集合子については [6] を参考にされたい。

参考文献

- [1] K. Aomoto, Les équations aux différences linéaires et les intégrales des fonctions multiformes, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 26 (1975), 271-297.
- [2] A. Erdélyi et al., Higher transcendental functions. vol. I, McGraw-Hill, 1953.
- [3] I.M. Gelfand, M.I. Graev and A.V. Zelevinsky, Holonomic systems of equations and series of hypergeometric type, Dokl. Akad. Nauk. SSSR 295 (1987), 14-19; English translation, Soviet Math. Dokl. 36 (1988), 5-10.

[4] I. M. Gelfand, M. M. Kapranov and A. V. Zelevinsky, Generalized Euler integrals and A-hypergeometric functions, Adv. in Math. 84 (1990) 255-271.

[5] Mutsumi Saito, Parameter shift in normal generalized hypergeometric systems, preprint.

[6] Mutsumi Saito, Normality of affine toric varieties associated with compact Hermitian symmetric spaces, preprint.

Frobenius Reciprocity in Operator Algebra

YAMAGAMI Shigeru

e-mail: e22236@cctu.cc.tohoku.ac.jp

問題の背景. フローベニウスの名を冠して呼ばれる相互律と言えば unique identification であろうが, ここで問題にしたいのは誘導表現に関係した相互律についてである. しかも群の誘導表現ではなく環の誘導表現についてこの問題を考えたい. ということで, まず環の誘導表現の歴史から話を始めよう.

群の表現と群環の表現とは本質的に (より正確には, カテゴリー的に) 同じものであるから, 誘導表現の概念を環の言葉で書き直そうと考えるのは自然 (陳腐?) な発想ではある. ところが, これがそれ程古い話ではないらしく (新しくもないが), Rieffel の C^* -環の誘導表現の論文の introduction を読むと, Higman (1955) が最初であるという (Kirillov の本では, この辺の事が, 誰を引用するでもなく, 当然のごとく書かれてある). 少し, 数学的に書けば, A を環, B をその部分環とし, B の表現とは, left B -module M であると思うと, M の A への誘導表現とは, $A \otimes_B M$ のことと認識する.

これは, あくまでも代数としての誘導表現であり, 局所コンパクト群の表現を含むものではない (有限群の場合は含まれる). 作用素環的な誘導表現の概念はさらに時代が下って, Rieffel 及び Fell によって初めて確立された. Rieffel と Fell との関係は今一つ良くわからないが (独立 or 共同?), いずれにせよ, imprimitivity theorem の essence の理解を目標として, C^* -環の (あるいはバナッハ環の) 誘導表現を bimodule の言葉で定式化している. 実際, 作用素環的に翻訳された imprimitivity theorem の証明は非常に簡単なもので, 何等測度論的な工夫を要しない formal なものである. このように, 実にあっけなく誘導表現論の基本定理が証明されてしまったのであるが, その後のあまり (ほとんど) 発展のない状態がしばらく続いた.

最近になって (といっても既に数年はたつが) Ocneanu が factor-subfactor の構造を記述する不変量として Paragroup と呼ばれるグラフ的不変量を発見した. Paragroup は factor-subfactor から作られる bimodule に関する表現論的關係として記述される. その際 II_1 型因子環の作用する bimodule に関しての Frobenius Reciprocity が不変量を定義する上で本質的な役割をはたしている.

Ocneanu の理論は, 未だ証明の付いた形では発表されておらず, 上記 Frobenius Reciprocity については結果の記述すら曖昧である. そこで以下, この部分の正確な記述と証明, その一般化などについて述べてみたい.

Notations and Conventions. In the following, von Neumann algebras, say N , are assumed to satisfy

- (i) the center of N is finite-dimensional, i.e., N is the direct sum of finitely many factors.
- (ii) N admits a faithful finite trace τ , i.e., $\exists$ a continuous positive linear functional $\tau : N \rightarrow \mathbb{C}$ such that

$$\tau(x) \geq 0 \quad \text{for } x \geq 0 \quad \text{with } x = 0 \text{ iff } x = 0.$$

Given a von Neumann algebra N , a left N -module, denoted as ${}_N X$, is defined to be a Hilbert space X with a continuous $*$ -representation of N on X . If we denote by $L^2(N)$ the regular representation (space) of N , then $L^2(N)$ is a left N - and right N -module at the same time. Any left N -module ${}_N X$ is projective in the following sense: $\exists$ index I , $\exists$ a projection $p \in \text{Mat}_I(N)$ such that

$${}_N X \cong {}_N (L^2(N)^{\oplus I}) p,$$

where $L^2(N)^{\oplus I}$ is the direct sum of $L^2(N)$ indexed by I and is regarded as the set of row vectors in matrix notation. Then $p \in \text{Mat}_I(N)$ multiplies from the left through the combination of matrix multiplication and the right action of N on $L^2(N)$. Define the dimension of ${}_N X$ by

$$\dim_N X = \sum_i \tau(p_{ii}) \in [0, +\infty], \quad p = (p_{ij})_{i,j \in I}.$$

This definition does depend on τ but not on the choice of realizations. When N is a factor, dimension is the complete invariant for the isomorphism class of representations of N . Similar definition works for right N -modules.

Let X_N be a right N -module and ${}_N Y$ be a left N -module. We can construct a Hilbert space $X \otimes_N Y$ functorially so that it contains the algebraic tensor product $X \otimes_N Y$ of N -modules as a dense subset. A concrete description can be achieved in the following way: Since ${}_N Y$ admits a projective realization, it suffices to consider the case ${}_N Y = {}_N L^2(N)$ and, in this case, we set $X \otimes_N L^2(N) = X$. $X \otimes_N Y$ is called the relative tensor product of N -modules.

Let A, B be von Neumann algebras and assume that a Hilbert space X is a left A -module and a right B -module at the same time so that left and right actions commute each other. Such an X is denoted by ${}_A X_B$ and is called an A - B bimodule. The index of bimodule is defined by

$$[X] = (\dim_A X)(\dim X_B).$$

A bimodule X is called of finite type if $[X] < +\infty$, i.e., $\dim_A X < +\infty$ and $\dim X_B < +\infty$.

For bimodules ${}_A X_B$ and ${}_A Y_B$, the space of intertwiners between them is denoted by $\text{Hom}({}_A X_B, {}_A Y_B)$.

Lemma. If $[X] < +\infty$ and $[Y] < +\infty$, then

$$\dim \text{Hom}({}_A X_B, {}_A Y_B) < +\infty.$$

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}\text{-}\mathcal{T}\mathcal{E}\mathcal{X}$

As a last definition of this part, we define conjugate modules: If we denote by X^* the dual space of a Hilbert space X , then $X^* = {}_B X_A^*$ when $X = {}_A X_B$. In fact, the action is defined by

$$\langle bx^*a, x \rangle = \langle x^*, axb \rangle.$$

Reciprocity. Let A , B , and C be von Neumann algebras described above, and ${}_A X_B$, ${}_B Y_C$, and ${}_A Z_C$ be bimodules of finite type. Then

$$\text{Hom}({}_A Z_C, {}_A X \otimes_B Y_C) \cong \text{Hom}({}_B X^* \otimes_A Z_C, {}_B Y_C).$$

More precisely, an intertwiner $T \in \text{Hom}({}_A Z_C, {}_A X \otimes_B Y_C)$ and its Frobenius transform $S \in \text{Hom}({}_B X^* \otimes_A Z_C, {}_B Y_C)$ is related by

$$(S(\xi^* \otimes_A \zeta)|\eta) = (T(\zeta)|\xi \otimes_B \eta).$$

A key point in the proof of this fact is the following:

Lemma. *Let ${}_A X_B$ and ${}_B Y_A$ be bimodules of finite type. Then we have the following $*$ -preserving (i.e., the adjoints of intertwiners correspond to conjugate vectors in Hilbert spaces) linear isomorphisms:*

$$\begin{array}{ccccc} (X \otimes_B Y)^A & \cong & \text{Hom}({}_A Y_B^*, {}_A X_B) & \cong & (Y \otimes_A X)^B, \\ \varphi & \longleftrightarrow & \Phi & \longleftrightarrow & \psi \end{array}$$

where, for an A - A bimodule ${}_A Z_A$, Z^A is defined by

$$Z^A = \{\zeta \in Z; a\zeta = \zeta a \quad \forall a \in A\},$$

and φ , ψ , Φ are related by

$$(\xi \otimes_B \eta|\varphi) = (\xi|\Phi(\eta^*)) = (\eta \otimes_A \xi|\psi).$$

In fact, once the above lemma is assured, the proof of the reciprocity can be done as follows:

$$\begin{aligned} \text{Hom}({}_A Z_C, {}_A X \otimes_B Y_C) &\cong ((X \otimes_B Y) \otimes_C Z^*)^A \\ &= (X \otimes_B (Y \otimes_C Z^*))^A \\ &\cong ((Y \otimes_C Z^*) \otimes_A X)^B \\ &= (Y \otimes_C (Z^* \otimes_A X))^B \\ &\cong \text{Hom}({}_B X^* \otimes_A Z_C, {}_B Y_C). \end{aligned}$$

□

As an example, consider the case of finite groups: Let G be a finite group and H be a subgroup of G . If we set $A = \mathbb{C}G$, $B = \mathbb{C}H$, $C = \mathbb{C}$, and $\ell^2(G)$, then

$${}_A X \otimes_B Y = \text{ind}_H^G Y, \quad {}_B X^* \otimes_A Z = {}_B |Z$$

and hence

$$\begin{aligned} \text{Hom}({}_A Z_C, {}_A X \otimes_B Y_C) &= \text{Hom}_G(Z, \text{ind}_H^G Y) \\ \text{Hom}({}_B X^* \otimes_A Z_C, {}_B Y_C) &= \text{Hom}_H(Z, Y). \end{aligned}$$

Thus the above isomorphism is reduced to the classical Frobenius reciprocity.

One of good points in the above proof is that we have no need of characters and in fact we can weaken the assumption on von Neumann algebras. Unfortunately, to do so, we need much of modular theory and it is omitted here.

REFERENCES

1. J. M. G. Fell, *A new look at Mackey's imprimitivity theorem*, Lecture Notes in Mathematics, 266, Springer, 1972.
2. F. M. Goodman, P. de la Harpe, and V. Jones, *Coxeter-Dynkin Diagrams and Towers of Algebras*, Springer, 1989.
3. A. A. Kirillov, *Elements of the Theory of Representations*, Springer, 1976.
4. A. Ocneanu, *Quantum Symmetry, Differential Geometry of Finite Graphs and Classification of Subfactors*, Univ. Tokyo, Seminary Notes 45 (1991).
5. M.A. Rieffel, *Induced representations of C^* -algebras*, Adv. Math. 13 (1974), 176-257.