ユニタリ表現論セミナー報告集 XI, 1991
pp.18-24

Character and character cycle

落合 啓之(立教大・理)

実半単純代数群 $G_{\mathbb{R}}$ の admissible 表現の指標は、$G_{\mathbb{R}}$ 上の不変固有超函数、つまり Harish-Chandra 方程式系の解である。このことから $\{(g,x)\in G_{\mathbb{R}}\times X \mid gx=x\}$ に台をもつ $(\dim G_{\mathbb{R}})$ 次元の cycle が定義される。([HK], [K])
このサイクルを $G_{\mathbb{R}}$ の複素化 $G_{\mathbb{C}}$ の flag variety X の上のいくつかの軌道分解を用いて表わす。一方、表現から、$(\mathfrak{g}, K_{\mathbb{R}})$-加群、Beilinson-Bernstein 対応、Riemann-Hilbert 対応、Milković-Uzawa-Vilonen 対応(または松木 duality)を経由して得られる X 上の $G_{\mathbb{R}}$-共変な層の複体からも、同じ空間上のサイクルが定義される([KS])。この両者が一致することが予想されている。

§1

$G_{\mathbb{R}}$ を実半単純代数群、$K_{\mathbb{R}}$ をその極大 compact 部分群、θ を対応する Cartan involution とする。Lie 環は対応する(実の)Lie 環を $\mathfrak{g}_0, \mathfrak{k}_0$、その複素化を $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$ などと書く。$U(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}$ の universal enveloping algebra、$Z(\mathfrak{g})$ をその中心とする。自明な無限小指標とは、代数準同型

$$\chi : Z(\mathfrak{g}) \longrightarrow Z(\mathfrak{g})/(Z(\mathfrak{g})\cap U(\mathfrak{g})\mathfrak{g}) \cong \mathbb{C}$$

。

ここでは、'表現' として、<u>自明な無限小指標をもつ Harish-Chandra 加群</u>を考えることにする。

このような表現 V の指標(character)は次のように定義される超函数(generalized function)である。V の globalization $(\pi, \widetilde{V})$ をとり，$G_{\mathbb{R}}$ 上の compact 台 C^∞-関数 f に対して，$\widetilde{V}$ 上の作用素

$$\pi(f) = \int_{G_{\mathbb{R}}} f(g)\pi(g)dg$$

を定義する。(dg は，たとえば Haar 測度)

このとき $f\,dg \longmapsto \mathrm{trace}\ \pi(f)$ は $G_{\mathbb{R}}$ 上の超函数を定めている。

これは $\widetilde{V}$ によらないので，V の指標といおう。(たとえば [Kn])。

指標は，$G_{\mathbb{R}}$ 上の $G_{\mathbb{R}}$ の随伴作用で不変で，また $Z(\mathfrak{g})$ は χ で作用する。即ち固有値 χ の不変固有超函数である。このことを $G_{\mathbb{R}}$ 上の微分方程式系，または $\mathcal{D}_{G_{\mathbb{C}}}$-加群で表わしたのが，Harish-Chandra 方程式系 $\mathcal{M}$ である。$\mathcal{M}$ の詳しい解析により，不変固有超函数の空間は計算できて，([HK],[H])

$$\Gamma(G_{\mathbb{R}}; \underline{Hom}_{\mathcal{D}_{G_{\mathbb{C}}}}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{G_{\mathbb{R}}}))$$

$$= H^0(\mathbb{R}\Gamma(G_{\mathbb{R}}; \mathbb{R}\underline{Hom}_{\mathcal{D}_G}(\mathcal{M}, \mathbb{R}\Gamma_{G_{\mathbb{R}}}(\mathcal{O}_{G_{\mathbb{C}}}) \otimes or_{G_{\mathbb{R}}}[\dim G_{\mathbb{R}}])))$$

$$\mathcal{M} = \mathbb{R}\rho_* \mathcal{O}_{\widetilde{G_{\mathbb{C}}}}$$

ここで $\widetilde{G_{\mathbb{C}}} = \{(g,x) \in G_{\mathbb{C}} \times X \mid gx = x\}$，$\rho : \widetilde{G_{\mathbb{C}}} \longrightarrow G_{\mathbb{C}}$: 才一成分への射影

$$= H^0(\mathbb{R}\Gamma(G_{\mathbb{C}}; \mathbb{R}\Gamma_{G_{\mathbb{R}}}(\mathbb{R}\rho_* \mathbb{C}_{\widetilde{G_{\mathbb{C}}}}) \otimes or_{G_{\mathbb{R}}}[\dim G_{\mathbb{R}}]))$$

$$= H^0(\mathbb{R}\Gamma(\widetilde{G_{\mathbb{C}}}; \mathbb{R}\Gamma_{\rho^{-1}(G_{\mathbb{R}})}(\mathbb{C}_{\widetilde{G_{\mathbb{C}}}}) \otimes or_{G_{\mathbb{R}}}[\dim G_{\mathbb{R}}]))$$

$$= H^0(\mathbb{R}\Gamma(\rho^{-1}(G_{\mathbb{R}}); \omega_{\rho^{-1}(G_{\mathbb{R}})} \otimes or_{G_{\mathbb{R}}})[-\dim G_{\mathbb{R}}])$$

$$= H^{-\dim G_{\mathbb{R}}}(\rho^{-1}(G_{\mathbb{R}}); \omega_{\rho^{-1}(G_{\mathbb{R}})} \otimes or_{G_{\mathbb{R}}})$$

$$= H_{\dim G_{\mathbb{R}}}(\rho^{-1}(G_{\mathbb{R}}); or_{G_{\mathbb{R}}})\text{。}$$

但し，or は向きづけ層，$\omega_A = a_A^! \mathbb{C}$ ($a : A \to$ 1点)。

これによって，指標に対し，$\rho^{-1}(G_{\mathbb{R}})$ 上の $or_{G_{\mathbb{R}}}$ 係数のサイクルが，定まる。これを σ_V あるいは単に σ と書く。(ここでの記号)。

このサイクルと指標のふつうの表示との関係をいおう。

$H_{\mathbb{R}}$ を $G_{\mathbb{R}}$ の θ-stable Cartan 部分群，$\mathfrak{a}_0$ をその Lie 環 $\mathfrak{h}_0$ の split part.

$\Delta^+=\Delta^+(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ を $\Delta^+(\mathfrak{g}_0,\mathfrak{a}_0)\subset\Delta(\mathfrak{g}_0,\mathfrak{a}_0)$ と compatible になるように入れた $\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ の正ルートとし，対応する $\mathfrak{g}$ の nilpotent 部分群を $\mathfrak{n}$.

$\mathfrak{b}=\mathfrak{h}+\mathfrak{n}$，対応する $G_{\mathbb{C}}$ の部分群を N, B とする。flag variety X は，このBを用いて $X=G_{\mathbb{C}}/B$ ととっておく。

$G_{\mathbb{C}}$, $G_{\mathbb{R}}$ の regular semisimple な元のなす open dense な部分集合を $G_{\mathbb{C},reg}$, $G_{\mathbb{R},reg}$ などと書く。$G_{\mathbb{C},reg}$ 上では，$p:\widetilde{G_{\mathbb{C}}}\longrightarrow G_{\mathbb{C}}$ は，Weyl 群 $W_{\mathbb{C}}=W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ でファイバーが parametrize される $|W_{\mathbb{C}}|$-重 covering になっている。特に，$g\in H_{\mathbb{R},reg}$ の fiber は，($x_0=eB\in G_{\mathbb{C}}/B$ として)

$p^{-1}(g)=\{wx_0\mid w\in W_{\mathbb{C}}\}$。さて $g\in H_{\mathbb{R},reg}$, $x\in p^{-1}(g)$ に対し，

$$\psi(g,x)=\det(1-g\,;\,T_x^*X)^{-1}$$ と定義すれば，
$$=\Big(\prod_{\alpha\in w\Delta^+}(1-e^{-\alpha})(g)\Big)^{-1}$$ となる。

すると不変固有超函数 Ⓗ の g での値は，対応するサイクル σ の $(g,wx_0)\in p^{-1}(g)$ での multiplicity $\sigma(g,wx_0)\in\mathbb{C}$ を用いて，

$$Ⓗ(g)=\sum_{w\in W_{\mathbb{C}}}\sigma(g,wx_0)\,\psi(g,wx_0)$$

と書ける。変形して，

$$Ⓗ(g)=\left.\frac{\sum_{w\in W_{\mathbb{C}}}\sigma(g,wx_0)(-)^{l(w)}e^{w\rho}}{\prod_{\alpha\in\Delta^+}(e^{\frac{\alpha}{2}}-e^{-\frac{\alpha}{2}})}\right|_g .$$

ρ は Δ^+ の和の半分，$l:W_{\mathbb{C}}\longrightarrow\mathbb{Z}_{\geq 0}$ は長さ。

$\sigma(g, wx_0)$ を計算するのが1つの目的である。

$\Delta_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) := \{\alpha \in \Delta \mid \theta\alpha = -\alpha\}$ を real root の集合,

$H_{\mathbb{R}}'' := \{g \in H_{\mathbb{R}} \mid e^{\alpha}(g) \neq 1 \quad \text{for } \forall\alpha \in \Delta_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})\}$ とすると,

任意の $g \in H_{\mathbb{R}}''$ (の連結成分) に対して, ある正ルート $\Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ が

$g \in H_{\mathbb{R}}^- = \{g \in H_{\mathbb{R}} \mid e^{\alpha}(g) < 1 \quad \text{for } \forall\alpha \in \Delta_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \cap \Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})\}$

なるようにとれる。この $\Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ から, $\mathfrak{n}, \mathfrak{b}, N, B$ を作ったとする。

<u>定理</u>　σ を 表現 V の指標 $\Theta(V)$ に対応するサイクルとする。

$g \in H_{\mathbb{R}}^- \cap H_{\mathbb{R}, reg} \cap (H_{\mathbb{R}}$ の原点の連結成分$)$ の時,

$$\sigma(g, wx_0) = \chi(\mathbb{R}\Gamma_{V(w)} \mathcal{F}^*).$$

ここで, $\mathcal{F}$ は, V に対し, Beilinson-Bernstein 対応と Riemann-Hilbert 対応で対応する X 上の $K_{\mathbb{C}}$-共変な層の複体, $\mathcal{F}^*$ はその dual

$$\mathcal{F}^* = \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{F}, \mathbb{C}_X)。$$

また, X を B-軌道分解した各 Bruhat cell を $V(w)$ と書く。$X = \coprod_{w \in W_{\mathbb{C}}} V(w)$。

χ は一般に Y 上の層の複体 $\mathcal{F}$ に対して,

$\chi(\mathcal{F}) = \chi(\mathbb{R}\Gamma(Y, \mathcal{F})) = \sum_{i=0}^{\infty} (-)^i \dim_{\mathbb{C}} H^i(Y, \mathcal{F})$ で定められる

Euler-Poincaré 標数。

証明は, まず Osborne 予想 ([HeSc]) を用いて左辺を $\mathfrak{n}$-homology のことばで表わす。次に $\mathfrak{n}$-homology を局所化し, D-加群の解層で表わす[V]。Bruhat cell は, 途中で Intertwining operator の計算で出てくる ([BB])。

§2

今度は、X 上の $G_{\mathbb{R}}$-共変な層の複体 $\mathcal{F}'$ に対して、同じ空間に値をもつサイクルを定めよう([KS])。$\mathcal{F}'$ が $G_{\mathbb{R}}$-共変ということは、

$\mu, pr : G_{\mathbb{R}} \times X \to X$, $\mu(g,x) = gx$, $pr(g,x) = x$ とした時、

$\varphi : \mu^{-1}\mathcal{F}' \to pr^{-1}\mathcal{F}'$ という morphism があって、cocycle 条件をみたすというものである(正しくは [MV])。このとき次のような morphism がある。

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{R}\Gamma(X, \mathbb{R}\underline{Hom}(\mathcal{F}', \mathcal{F}')) \\
&= \mathbb{R}\Gamma(X, \delta^{!}(\mathcal{F}' \boxtimes \mathbb{D}\mathcal{F}')) \\
&\longrightarrow \mathbb{R}\Gamma(X, \delta^{!}\, \mathbb{R}\alpha_{*}\alpha^{-1}(\mathcal{F}' \boxtimes \mathbb{D}\mathcal{F}')) \\
&= \mathbb{R}\Gamma(\rho^{-1}(G_{\mathbb{R}}), \mathbb{R}\Gamma_{\rho^{-1}(G_{\mathbb{R}})}(\mu^{-1}\mathcal{F}' \otimes pr^{-1}\mathbb{D}\mathcal{F}')) \\
&\xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}\Gamma(\rho^{-1}(G_{\mathbb{R}}), \mathbb{R}\Gamma_{\rho^{-1}(G_{\mathbb{R}})}(pr^{-1}\mathcal{F}' \otimes pr^{-1}\mathbb{D}\mathcal{F}')) \\
&\longrightarrow \mathbb{R}\Gamma(\rho^{-1}(G_{\mathbb{R}}), \mathbb{R}\Gamma_{\rho^{-1}(G_{\mathbb{R}})}(pr^{-1}\omega_X)) \\
&= \mathbb{R}\Gamma(\rho^{-1}(G_{\mathbb{R}}) ; \omega_{\rho^{-1}(G_{\mathbb{R}})} \otimes or_{G_{\mathbb{R}}}[-\dim G_{\mathbb{R}}])
\end{aligned}
$$

ここで $\delta : X \hookrightarrow X \times X$: diagonal embedding

$\alpha : G_{\mathbb{R}} \times X \longrightarrow X \times X$, $\alpha(g,x) = (\mu(g,x), pr(g,x)) = (gx, x)$

$\mathbb{D}\mathcal{F}' = \mathbb{R}\underline{Hom}_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{F}', \omega_X)$,

$\boxtimes$ は exterior product.

これにより、$id_{\mathcal{F}'} \in \Gamma(X, \underline{Hom}(\mathcal{F}', \mathcal{F}'))$ の行き先を

$C(\varphi) \in H_{\dim G_{\mathbb{R}}}(\rho^{-1}(G_{\mathbb{R}}) ; or_{G_{\mathbb{R}}})$ と書いて、

$\mathcal{F}'$ の(または $\mathcal{F}'$ の $G_{\mathbb{R}}$ 作用に関する) character cycle という。

<u>定理</u>. $\mathcal{F}'$ の character cycle を σ とする。

$g \in H_{\mathbb{R}}^{-} \cap H_{\mathbb{R},reg} \cap$ ($H_{\mathbb{R}}$の原点の連結成分) の時.

$\sigma(g, wx_0) = \chi(\mathbb{R}\Gamma_{V(w)}\mathcal{F}')$.

証明は [K] に本質的に書かれている。

さて. X の $K_{\mathbb{C}}$-軌道とその上の local system は. Beilinson-Bernstein の standard module および既約なものを与える。一方 X の $G_{\mathbb{R}}$-orbit とその上の local system は Zuckerman の構成により.やはり standard module および.既約表現の分類を与える。この2つの分類のデータの間には.松木対応といわれる性質のよい全単射があり.これによって対応する表現の間に duality がなりたつことが示されている ([HMSW])。これに示唆されて. X 上の $K_{\mathbb{C}}$-共変な層の複体の. category $D^b_{K_{\mathbb{C}}}(X)$ と. $G_{\mathbb{R}}$-共変なもの $D^b_{G_{\mathbb{R}}}(X)$ の間に category 同値があることが Kashiwara によって予想され.最近証明された。([K], [MUV]).

$\mathcal{F} \in D^b_{K_{\mathbb{C}}}(X)$ に対し.この category 同値で対応する $\mathcal{F}' \in D^b_{G_{\mathbb{R}}}(X)$ をとり.それぞれ §1, 2 で対応する cycle を考える。Kashiwara の予想 [K] は.<u>この2つの cycle が一致する</u>というものである。

上の計算により.この予想の一部を示すことができる。

文　献

[BB] A.Beilinson and J.Bernstein, Localisation de g-modules, C.R.Acad.Sci.Paris, 292 (1981),15-18.

[BB] A.Beilinson and J.Bernstein, A generalization of Casselman's submodule theorem, PM 40. Birkhauser, 1983,35-52.

[BK] J.L.Brylinski and M.Kashiwara, Kazhdan-Lusztig conjecture and holonomic systems, Invent.Math.,64 (1981),387-410.

[HMSW] H.Hecht, D.Milicic, W.Schmid and J.Wolf, Localization and standard modules for real semisimple groups, I, Invent.Math., 90 (1987),297-332.

[HS] H.Hecht and W.Schmid, Characters, asymptotics, and n-homology of Harish-Chandra modules, Acta Math.,151 (1983),49-151.

[H] 堀田良之，Springer対応と Harish-Chandra方程式，数学，37(1985)，193-207.

[HK] R.Hotta and M.Kashiwara, The invariant holonomic systems on a semisimple Lie algebra, Invent.Math.,75 (1984),327-358.

[K] M.Kashiwara, Open problems in group representation theory, Proceedings of Taniguchi Symposium held in 1986.

[K] M.Kashiwara, Character, character cycle, fixed point theorem and group representaion, Adv.Stud.Pure Math. 14 (1988),369-378.

[KS] M.Kashiwara and P.Schapira, Sheaves on manifolds, Springer, 1990.

[Kn] A.Knapp, Representation theory of semisimple groups, Princeton Univ. Press, 1986.

[MUV] I.Milkovic, T.Uzawa and K.Vilonen, unpublished

[MV] I.Milkovic and K.Vilonen, Charactereristic varieties and characer sheaves, Invent.Math.,93 (1988),405-418.

[T] 谷崎俊之，半単純リー群の表現と D 加群，数学，41(1989),30-43

[U] T.Uzawa, Invariant hyperfunction sections of line bundles, Thesis, Yale

[V] D.Vogan, Irreducible characters of semisimple Lie groups III, Invent.Math.,71 (1983),381-417.

[概説] D-加群概説，数理解析研究所講究録，667/668, 1988.