ユニタリ表現論セミナー報告集 IX, 1989
pp.82-89

$\mathfrak{p}$ 上の正則函数について

和田 涼子 (広大 総合科学部)

1. 準備

$\mathfrak{g}$ を reductive な complex Lie algebra とし $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ を $\mathfrak{g}$ の実形とする. $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{k}_{\mathbb{R}} \oplus \mathfrak{p}_{\mathbb{R}}$ を $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ の Cartan 分解とし $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ をその複素化によって得られる直和とする. $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$ の adjoint 群を各々 G, K で表わす. 写像 $\theta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ を

$$\theta = \begin{cases} 1 & \text{on } \mathfrak{k} \\ -1 & \text{on } \mathfrak{p} \end{cases}$$

で定義し, $K_\theta = \{ a \in G \,;\, a\theta = \theta a \}$ とおくと $\mathfrak{k}, \mathfrak{p}$ は K_θ で不変で K は K_θ の identity component になる. $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}$ を $\mathfrak{p}_{\mathbb{R}}$ の maximal abelian subalgebra とし, $\mathfrak{a}$ をその複素化とする. S' を $\mathfrak{p}$ 上の多項式函数の環とし, J' を K_θ-invariant な S' の元の環とする. [1] proposition 10 より J' は K-invariant な $\mathfrak{p}$ 上の多項式の環と一致する. Chevalley の結果より J' は同次多項式を生成元としてとれる. また生成元の数は $\mathfrak{a}$ の次元に等しい. S'_n を $\mathfrak{p}$ 上の n 次同次多項式の空間とする. S を $\mathfrak{p}$ 上の symmetric algebra

とし　$J=\{u\in S;\ au=u \text{ for } {}^{\forall}a\in K\}$, $J_+=\{u\in J,\ u\neq \text{const.}\}$ とおく．また $J_+'=\{f\in J';\ f\neq\text{const.}\}$とおく．$\mathcal{H}=\{f\in S';\ \partial(u)f=0 \text{ for } {}^{\forall}u\in J_+\}$を$\mathfrak{p}$上の調和多項式の空間とし，$\mathcal{H}_n=S_n'\cap\mathcal{H}$とする．$\mathfrak{p}$上のKo-invariantで非退化なsymmetric bilinear formで$\mathfrak{p}_{\mathbb{R}}$上でpositive definiteになるものを1つ固定して$B_{\mathfrak{p}}$とする．$\mathfrak{N}=\{x\in\mathfrak{p};\ f(x)=0 \text{ for } {}^{\forall}f\in J_+'\}$とするとき$\mathcal{H}_n=\langle B_{\mathfrak{p}}(x,a)^n;\ a\in\mathfrak{N}\rangle$である．次の定理が知られている．

定理（[1] Theorem 15）

$$S'=J'\otimes\mathcal{H}$$

$\mathcal{O}(\mathfrak{p})$を$\mathfrak{p}$上の正則函数の空間とする．$F\in\mathcal{O}(\mathfrak{p})$は$F=\sum_{n=0}^{\infty}F_n$（$F_n\in S_n'$）と一意的に同次多項式展開できて右辺は$\mathfrak{p}$上広義一様絶対収束する．$F_n$は

$$F_n(x)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|t|=\rho}\frac{F(tx)}{t^{n+1}}\,dt \qquad ({}^{\forall}\rho>0)$$

で与えられる．

2. 結果

$\mathcal{O}_0(\mathfrak{p})=\{F\in\mathcal{O}(\mathfrak{p});\ \partial(u)F=0 \text{ for } {}^{\forall}u\in J_+\}$で$\mathfrak{p}$上のharmonicな正則函数の全体を表わし，$\mathcal{O}(\mathfrak{N})=\mathcal{O}(\mathfrak{p})|_{\mathfrak{N}}$とおく．$\mathcal{O}_0(\mathfrak{p})$から$\mathcal{O}(\mathfrak{N})$への制限写像$\alpha: F\to F|_{\mathfrak{N}}$を考える．この

とき次が成り立つ.

<u>命題</u> J の生成元 $P_1, \cdots, P_r$ が $\mathfrak{J}_{\mathbb{R}}$ 上で実数値をとる同次多項式であるようにとれるとき 制限写像 α は $O_0(\mathfrak{J})$ から $O(\eta)$ への線型同型である.

命題の証明に次の補題が必要である.

補題([3] P.9 Remark, Lemma 1) $H_n(\mathbb{C}^d)$ を $\mathbb{C}^d$ 上の n 次同次多項式の空間とする. $\mathbb{C}^d$ 上の多項式の空間上の内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を

$$\langle z^\alpha, z^\beta \rangle = \begin{cases} 0 & (\alpha \neq \beta) \\ \alpha ! & (\alpha = \beta) \end{cases}$$

で定義する. このとき次が成り立つ.

1) $Q_1, \cdots, Q_m$ を $\mathbb{C}^d$ 上の任意の同次多項式とし $J_n(\mathbb{C}^d) = \{ Q_1\phi_1 + \cdots + Q_m\phi_m \in H_n(\mathbb{C}^d) ;\ \phi_j$ は同次多項式$\}$, $\mathcal{H}_n(\mathbb{C}^d) = \{ h \in H_n(\mathbb{C}^d) ;\ Q_j^*(D)h = 0 \quad \text{for } j = 1, \cdots, m \}$ とする (ここで $Q(z) = \Sigma a_\alpha z^\alpha$ のとき $Q^*(z) = \Sigma \overline{a_\alpha} z^\alpha$ とおく).

このとき

$$H_n(\mathbb{C}^d) = J_n(\mathbb{C}^d) \oplus \mathcal{H}_n(\mathbb{C}^d)$$

となり $\langle\ ,\ \rangle$ について $\mathcal{H}_n(\mathbb{C}^d) \perp J_n(\mathbb{C}^d)$ である.

2) $F \in O(\mathbb{C}^d)$ の同次多項式展開を $F = \sum_{n=0}^{\infty} F_n$ ($F_n \in H_n(\mathbb{C}^d)$) とする. $|F_n| = \langle F_n, F_n \rangle^{1/2}$ とおくとき

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} (\|F_n\|/\sqrt{n!})^{1/n} = 0 \iff F \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^d) \text{ かつ } \Sigma F_n \text{ は}$$
F に広義一様収束.

命題の証明. $\dim \mathfrak{g} = d$ とする. $\forall f \in \mathcal{O}(\mathcal{N}) = \mathcal{O}(\mathfrak{g})|_{\mathcal{N}}$ のとき $f = F$ on $\mathcal{N}$ なる $F \in \mathcal{O}(\mathfrak{g})$ が存在する.

$(J'_+S')_n = J'S' \cap S'_n$ とする. F の同次多項式展開を $F = \sum_{n=0}^{\infty} F_n$ ($F_n \in S'_n$) とすると [1] proposition 26 より $S'_n = (J'_+S')_n \oplus \mathcal{H}_n$ だから $F_n = H_n + G_n$, $H_n \in \mathcal{H}_n$, $G_n \in (J'_+S')_n$ と一意的に書ける. $e_1, \dots, e_d \in \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ を $B_{\mathfrak{g}}$ についての正規直交基底とし, $\varphi : \sum_{j=1}^{d} x_j e_j \longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}$ とすると $I_j|_{\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}} \in \mathbb{R}$ より $I_j \circ \varphi^{-1}$ は $\mathbb{C}^d$ 上の実係数の同次多項式になり $F_n \circ \varphi^{-1}$, $H_n \circ \varphi^{-1}$, $G_n \circ \varphi^{-1} \in H_n(\mathbb{C}^d)$, $F_n \circ \varphi^{-1} = H_n \circ \varphi^{-1} + G_n \circ \varphi^{-1}$ で,

$$(I_j \circ \varphi^{-1})(D)\,(H_n \circ \varphi^{-1}) = 0 \quad (\text{for } j = 1, \dots, r)$$

$$G_n \circ \varphi^{-1} = \sum_{j=1}^{r} (I_j \circ \varphi^{-1})\, \phi_{n,j} \quad (\phi_{n,j} \text{ は } \mathbb{C}^d \text{ 上の同次多項式})$$

となるので 補題1 ① より

(*) $\quad \|F_n \circ \varphi^{-1}\| \geqq \|H_n \circ \varphi^{-1}\|$

(*) と補題1 (2) より $\widetilde{H} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n \circ \varphi^{-1}$ は広義一様収束し $\widetilde{H} \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^d)$ となる. よって $H(x) = \widetilde{H}(x_1, \dots, x_d)$ とおくと $H \in \mathcal{O}(\mathfrak{g})$ で $H(x) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)$ は広義一様収束だから $\partial(u)H = \sum_{n=0}^{\infty} \partial(u) H_n = 0$ for $\forall u \in J_+$. ゆえに $H \in \mathcal{O}_0(\mathfrak{g})$. $z \in \mathcal{N}$ のとき $F_n(z) = H_n(z)$ だから $f_n(z) = H_n(z)$ on $\mathcal{N}$ となり $\alpha H = f$

であるから α は全射である．

$F \in \mathcal{O}_0(\rho)$，$F = \sum_{n=0}^{\infty} F_n$ （$F_n \in S'_n$）とおくと $\forall j = 1, \cdots, r$ について $\partial(I_j)F = \sum_{n=0}^{\infty} \partial(I_j)F_n = 0$．　I_j は同次だから $\partial(I_j)F_n$ は同次多項式になる．従って同次多項式展開の一意性より $\partial(I_j)F_n = 0$ （$j = 1, \cdots, r$）である．よって $F_n \in \mathcal{H}_n$ がいえる．　$\alpha F = 0$ とすると $\forall z \in \mathfrak{n}$ について $F(z) = 0$ で，$\forall t \in \mathbb{C}$ について $tz \in \mathfrak{n}$ だから

$$F_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|t|=\rho} \frac{F(tz)}{t^{n+1}}\, dt = 0 \quad (\text{for } \forall z \in \mathfrak{n})$$

が成り立つ．[1] Theorem 14 より $F_n \equiv 0$ on $\mathfrak{n}$ ならば $F_n \in J'_+S'$ であるから $F_n \in \mathcal{H}_n \cap J'_+S' = \{0\}$．よって $F_n \equiv 0$，つまり $F \equiv 0$ となるから α は単射である．(証明終)．

3．問題と例

次のような問題を考える．

(1)　$J' = \mathbb{C}[I_1, \cdots, I_r]$ のとき $F \in \mathcal{O}(\rho)$ は

$$F = \sum_{n_1, \cdots, n_r, k} I_1^{n_1} \cdots I_r^{n_r} h_{n_1 \cdots n_r, k} \qquad (h_{n_1, \cdots, n_r, k} \in \mathcal{H}_k)$$

という形に書けるか（[1] Theorem 15 を $\mathcal{O}(\rho)$ に拡張するとどうなるか?）．

(2)　$\mathfrak{k}_{\mathbb{R}}$ の adjoint 群を $K_{\mathbb{R}}$ とする．$F_n \in S'_n$，$F_n = H_n + G_n$，（$H_n \in \mathcal{H}_n$，$G_n \in (J'_+S')_n$）のとき H_n を $\mathfrak{k}_{\mathbb{R}}$-orbit 上の積分の有限個の和で書けるか．

ex 1. $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(d,1)$ $(d \geqq 3)$ のとき

$$K_{\mathbb{R}} = \mathrm{Ad}\ SO(d,1,\mathbb{R}),\quad \mathfrak{p} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 0 & \begin{smallmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{smallmatrix} \\ \hline x_1 \cdots x_d & 0 \end{array}\right) : x_j \in \mathbb{C} \right\}$$

$I(x) = \mathrm{tr}\, x\, {}^t x = \sum_{j=1}^{d} x_j^2$ は生成元になる $(x \in \mathfrak{p})$.

このとき $F \in \mathcal{O}(\mathfrak{p})$ は $F(x) = \sum I^l(x)\, S_{2l+k,k}(x)$ $(S_{2l+k,k} \in \mathcal{H}_k)$ の形に展開できる. また $F_n \in S_n'$ に対して

$$H_n(g) = \dim \mathcal{H}_n \int_{SO(d)/SO(d-1)} F_n(g')\, I_{n,d}(g'^{-1}g)\, dg'$$

ここで $I_{n,d}$ は Legendre の多項式 (c.f. [2] [4]).

ex 2. $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2,2)$ のとき

$$K_{\mathbb{R}} = \mathrm{Ad}\, SO(2,2,\mathbb{R}),\quad \mathfrak{p} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 0 & X \\ \hline {}^tX & 0 \end{array}\right) : X \in M(2,\mathbb{C}) \right\}$$

$I_1(x) = \mathrm{tr}\, x\, {}^t x$, $Q_1(x) = \det X$ が J' の生成元になるから

$I = \frac{1}{2}(I_1 + Q_1)$, $Q = \frac{1}{2}(I_1 - Q_1)$ も J' の生成元になる.

$x = \begin{pmatrix} x_1 + x_4 & x_2 + x_3 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_4 \end{pmatrix}$ とおくと $I(x) = x_1^2 + x_2^2$, $Q(x) = x_3^2 + x_4^2$

となり, この場合は $F \in \mathcal{O}(\mathfrak{p})$ は $F = \sum_{n,l,k} I^l Q^k h_{n,l,k}$ $(h_{n,l,k} \in \mathcal{H}_{n-2l-2k})$ と展開できることがわかる. また $S = \{ x \in \mathfrak{p}_{\mathbb{R}},\ I(x) = Q(x) = 1 \}$ とおくと $S \cong K_{\mathbb{R}}$ で, H_n は F_n の S 上の積分で表わせる.

ex 3. $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(2,\mathbb{C})$ のとき

$$K_{\mathbb{R}} = \mathrm{Ad}\ SO(2,\mathbb{R}),\quad \mathfrak{p} = \{ X \in M(2,\mathbb{C}),\ {}^tX = X \}$$

$x = \begin{pmatrix} \sqrt{2}x_1 & x_2 \\ x_2 & \sqrt{2}x_3 \end{pmatrix} \in \mathfrak{z}$, $B_{\mathfrak{z}}(x, y) = \frac{1}{8} \operatorname{tr} x^t y$ とおくと

$\operatorname{tr} x$ と $\det x$ が J' の生成元になるので

$$P(x) = (\operatorname{tr} x)^2 - \det x = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{tr} x = x_1 + x_3$$

も J' の生成元で $B_{\mathfrak{z}}(x, y) = \sum_{j=1}^{3} x_j y_j$ となるから

$$h_n^{\pm}(x) = (x_1 - x_3 \pm \sqrt{2} i x_2)^n \quad (\text{複号同順})$$

とおくと $\mathcal{H}_n = \langle h_n^+, h_n^- \rangle$ である.

$S = \{ x \in \mathfrak{z}_{\mathbb{R}} \, ; \, P(x) = Q(x) = 1 \}$ とおくと $S \cong K_{\mathbb{R}}$ で

$P_n(x) = h_n^+(x) + h_n^-(x)$ とおくとき $F_n \in S_n'$ に対して $H_n \in \mathcal{H}_n$ は

$$H_n(g) = \int_{K_{\mathbb{R}}} F_n(g') P_n(g(g')^{-1}) \, dg' \qquad (g \in K_{\mathbb{R}})$$

と表わせる.

この場合も $F \in \mathcal{O}(\mathfrak{z})$ のとき $F = \sum P^l Q^k h_{n,l,k}$ ($h_{n,l,k} \in \mathcal{H}_{n-2l-k}$) という形に展開できる.

References

1. B. Kostant and S. Rallis, Orbit and representations associated with symmetric spaces, Amer. J. Math., 93, 1971, 753-809.

2. M. Morimoto, Analytic functionals on the Lie sphere, Tokyo J. Math., 3 (1980), 1-35.

3. H. S. Shapiro, Fischer's decomposition, revisited, preprint.

4. R. Wada and M. Morimoto, A uniqueness set for the differential operator $\Delta_z + \lambda^2$, Tokyo J. Math., 10 (1987), 93-105.