ユニタリ表現論セミナー報告集 IX, 1989
pp.76-81

対称空間上のEisenstein積分とその応用
-対称空間G_C/G上のPlancherel公式-

職業訓練大　　　佐野　茂

§序

G_C を Harish-Chandra 類の複素可約リー群、τ を G_C の対合的自己同型写像とする。G_C^τ を τ により不変な元全体よりなる部分群とし、$(G_C^\tau)_o$ をその単位元を含む連結成分とする。 G を $(G_C^\tau)_o \subset G \subset G_C^\tau$ なる部分群とすると、$[G: G_o] < \infty$ を満足。G_C の Cartan自己同型写像 θ で $\theta\tau = \tau\theta$、$\theta(G) = G$ を満足するものをとる。

$\mathfrak{g}_C$ を G_C に対応する複素可約リー環、また $\mathfrak{g}_C$ 上の対応する対合的自己同型をそれぞれ同じ記号 τ, θ で表す。 τ による固有空間分解を $\mathfrak{g}_C = \mathfrak{g} + \mathfrak{q}$ 、そしてθによる固有空間分解を $\mathfrak{g}_C = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ とする。G_H を G_C の複素化とし、そのリー環を $\mathfrak{g}_H$とおく。 $\mathfrak{g}_H$ における $\mathfrak{g}_C$ の双対を $\mathfrak{g}_C{}^d = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{g} + i(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{q}) + i(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{g}) + \mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$、随伴を $\mathfrak{g}^a = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{g} + \mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$ $(i = \sqrt{-1})$ とおく、また $\mathfrak{k}$ の双対を $\mathfrak{k}^d = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{g} + i(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{g})$ とおく。K を $\mathfrak{k}$ に対応する G_Cの極大コンパクト部分群とする。K^d、$G_C{}^d$ を $\mathfrak{k}^d$、$\mathfrak{g}_C{}^d$ に対応する G_H の解析的部分群とする。

以下の§では対称空間 $\mathbf{X} = G_C/G$ 上で考える。この対称空間は可約リー群 $G \cong G \times G/G$ の実質的な意味で双対な空間と考えられる。すなわち、離散系列表現と連続系列表現において双対な現象がある。§1では連続系列表現と、対応する $\mathbf{X}$ 上の不変帯球超関数を与える。§2では離散系列表現もこめて一般の主系列表現を扱う。§3においてはEisenstein積分の概念とそのconstant termを議論し、§4ではPlancherel公式を考える。

§1. 連続系列

対称対 $(\mathfrak{g}_C, \mathfrak{g})$ はこの§ではsprit Cartan 部分空間 $\mathfrak{a}$ をもつとする。対応する極小放物的部分群を $P = MAN$ $(MA = Z_{G_C}(\mathfrak{a})$、$A = \exp\mathfrak{a})$ とおく。GP は G_C の開部分集合である。 Poisson核 $\exp H(g)$ を $g^{-1} \in GM\exp H(g)N$, $\exp H(g) = 0$ $(g^{-1} \notin GP)$ で定義する。 $\mathfrak{a}^*$ を $\mathfrak{a}$ の双対とし、$\mathcal{F}$ を $i\,\mathfrak{a}^*$ における W による1つの Weyl領域とする。G上の Haar測度 dg、$\mathbf{X}$上の G_C-不変な測度 $dx = d(gG)$ を与えて、$\mathbf{X}$上の不変帯球超関数を

$$\Phi_\lambda(f) = \int_{\mathbf{X}} \phi_\lambda(x)\ f(x)\ dx \qquad (f(x) \in C_c^\infty(\mathbf{X}))$$

但し

$$\phi_\lambda(x) = \int_G \exp(\rho-\lambda)\ H(hx)\ dh$$

で定義する。Wを$(\mathfrak{g}_c, \mathfrak{a}_c)$の Weyl群、$W_G$ を G の A への内部自己同型よりなる Weyl群 $W_G = N_G(A)/Z_G(A)$ とする。$\underline{W} = W/W_G$ とおき、そこでの和より不変帯球超関数$\Theta_\lambda = \sum_{w\in\underline{W}} \Phi_{w\lambda}$ を定義する。$\mathbf{X}'$と$\mathcal{F}'$をそれぞれ$\mathbf{X}$と$\mathcal{F}$の正則な元全体からなる部分空間とする。

命題1.1 Θ_λ は $A'(=A\cap\mathbf{X}')$ 上解析関数となり、$\lambda\in\mathcal{F}'$ に対し次式が成立

$$\Theta_\lambda\Big|_{A'} = \frac{\pi(\rho)\sum_{w\in\underline{W}} \varepsilon(w)\ e^{w\lambda(X)}}{\pi(\lambda)\ \Delta(\exp X)} \qquad (X\in\mathfrak{a})$$

但し、 $\pi(\rho) = c(\lambda)\ \pi(\lambda)$。

$\mathbf{X}$上の関数f(x)に対しGで積分して f(x) と一致する G_c 上のコンパクトな台をもつ関数を $f_o(g)$ とする。また、G_c 上の関数 h(g) に対し $h^\wedge(g) = \mathrm{conj}\ h(g^{-1})$ とおく。

命題1.2 $\mathbf{X}$上の C_c^∞-関数 f(x) で $\mathrm{supp}\ f \subset G[A]$ を満足するものは

$$\int_{\mathcal{F}'} \Theta_\lambda(f_o^\wedge * f_o)\ |\pi(\lambda)|^2\ d\lambda = \int_{\mathbf{X}} |f(x)|^2\ dx$$

が成立。

最初の仮定より可約リー群 G は幾つかの離散系列をもつが、この結果よりその離散系列の系列数と G_c/G の連続系列の重複数は一致することが分かる。

§2. 一般の主系列

$\Pi=\{j_1, j_2, \ldots, j_m\}$ を $K\cap G$ で互いに共役とならない $\mathfrak{q}$ の Cartan 部分空間の極大系とする。各 j_l $(l=1,2,\ldots,m)$ に対して $\mathfrak{b}_l=j_l\cap\mathfrak{k}$、$\mathfrak{a}_l=j_l\cap\mathfrak{p}$ とおく。j_l に対応する放物的部分群 P_l を $P_l=M_lB_lN_l$ ($M_l B_l=Z_{G_c}(\mathfrak{b}_l)$)とおく。$GP_l$ が $G\backslash G_c$ の閉軌道のときは離散系列に、そして開軌道のときは連続系列に対応する。M_l は Harish-Chandra類の τ-不変な可約リー群となり、$M_l/M_l\cap G$ は連続系列をもつ対称空間となる。$\mathfrak{m}_l$ を M_l のリー環とし、$(\mathfrak{a}_l, \mathfrak{m}_l)$ より与えられる Weyl群を W^* とする。$i\,\mathfrak{a}_l^*$ の W^* による1つの Weyl領域を $\mathcal{F}_l$ とし、$\lambda\in\mathcal{F}_l'$ にたいし、$\Theta^l{}_\lambda$を §1 で与えた $M_l/M_l\cap G$ 上の不変帯球超関数とする。GP_l 上の Poisson 核$\exp U(g)$ を $g^{-1}\in Gm(g)\exp U(g)N_l$ ($m(g)\in M_l\cap G\backslash M_l$、$\exp U(g)\in B_l\cap G\backslash B_l$)、$\exp U(g)=0$ $(g^{-1}\notin GP_l)$で定義する。$B_l\cap G\backslash B_l$ の離散系列表現を、$\mathfrak{b}_l{}^*$のlatticeでパラメータ ω を与えよう。このとき、$\mathbf{X}$上の不変帯球超関数 $\Theta^l{}_{\lambda,\omega}$を

$$\Theta^l{}_{\lambda,\omega}(f)=\int_{\mathbf{X}}\theta^l{}_{\lambda,\omega}(x)\ f(x)\ dx \qquad (f(x)\in C_c^\infty(\mathbf{X}))$$

但し

$$\theta^l{}_{\lambda,\omega}(x)=\int_G \Theta^l{}_\lambda(m(hx))\ \exp(\rho-\omega)U(hx)\ dh$$

で定義する。$W_G{}^l$ を $W_G{}^l=N_G(j_l)/Z_G(j_l)$ とおく。W_lを $(j_l, \mathfrak{g}_c)$ の Weyl群とし、W^*と $W_G{}^l$ とを W_l に自然にうめこみ張られる部分群を $W_l{}^*$とする。ここで、$\Sigma(j_l)$ の虚ルートより与えられる Cayley変換と $K\cap G$ の作用で j_l より移る Cartan部分空間の系列を $\Pi_l=\{j_l,\ldots\}$ $(\subset\Pi)$をとる。J_lをj_lに対応する $\mathbf{X}$ のCartan部分空間とする。このとき

命題2.1 $\Theta^l{}_{\lambda,\omega}$ の $J_l\cap G\backslash J_l'$ 上の解析関数は

$$\Theta^l{}_{\lambda,\omega}\Big|_{J_l\cap G\backslash J_l'}=\begin{cases}\dfrac{\pi(\rho)\sum_{w\in W_l{}^*}\varepsilon(w)\ e^{w(\lambda,\omega)(X)}}{\pi(\lambda,\omega)\ \Delta(\exp X)} & X\in j_l\\[2ex] 0 & X\in j\ (j\in\Pi\backslash\Pi_l)\end{cases}$$

となる。

§3. Eisenstein積分

§2の記号を用いる。放物的部分群 $P_l=M_lB_lN_l$ に対してEisenstein

積分を次のように定義しよう。$\varphi\in C^\infty(M_l/M_l\cap G)$ を $\varphi(hwnam)=\varphi(m)$ で拡張し、$g\in G_C$ にたいし $g\in Gw(g)N_l B(g)M_l$ $(B(g)\in B_l\cap G\backslash B_l$、$G_C=\cup_w GwP_l^{-1})$ により $B(g)$ を与える。このとき

$$E(P_l:\varphi:x)=\int_G \alpha(h)\ \varphi(xh)\ \exp(\rho-\omega)B(xh)\ dh \qquad \alpha\in C_c^\infty(G)$$

とおく。

次に対称空間上にconstant termの概念を考える。$P=M_l B_l N_l$ に対してその双対を $P^d = M_l^d A_l^d N_l^d$ とおくと、$M_l^d\cong M_l$、$N_l^d\cong N_l$。次の空間

$$C^\infty(P^{-1}/G)=\{\ f\in C^\infty(\mathbf{X}):\ \mathrm{supp}\ f\subset P_l^{-1}/G\}$$
$$C^\infty((P^d)^{-1}/K^d)=C^\infty(G_c^d/K^d)$$

において、対応を考える

$$\eta:C^\infty(P^{-1}/G)\ \overset{\text{local}}{\cong}\ C^\infty((P^d)^{-1}/K^d))\ :\ f\to f^\eta$$

また、M_l 上における対応を η_l で表す。$f\in\mathcal{A}(\mathbf{X})$ に対し $M_l/M_l\cap G$ 上のconstant term を

$$\lim_{\substack{a\to\infty\\ P^d}}\ \{\ d_{P^d}(am)\ f^\eta(am)\ -\ f^\eta{}_{P^d}(am)\ \}\ =\ 0$$

を用いて $f_P=\eta_l^{-1}(f^\eta{}_{P^d})$ で定義する。このとき

命題3.1 $\mathfrak{b}$をcompact part にもつ放物的部分群をP, P′とすると

$$E_{P'}(P:\varphi:bm)\ =\sum_{s\in W(\mathfrak{b})}(c(s,\omega)\varphi)(m)\ e^{s\omega(\log b)}$$

を満足する定数 $c(s,\omega)$ が存在。

§4. Plancherel公式

この§では§2で与えた主系列表現の不変帯球超関数$\Theta^l{}_{\lambda,\omega}$を用いてPlancherel公式を考える。放物的部分群$P_l=M_l B_l N_l$に対する不変帯球超函数$\Theta^l{}_{\lambda,\omega}$はEisenstein積分に次ぎの様に対応する。

命題4.1 $\lambda\in\mathfrak{F}_l$、$\omega\in(B_l/B_l\cap G)^\wedge$ に対して

$$\langle \Theta^{l}{}_{\lambda,\omega}\ ,\ l(x)f\rangle = E(P_l : \varphi_f : x)$$

但し

$$\varphi_f = \int_{M_l/M_l \cap G} \int_{N_l \times B_l / B_l \cap G} \Theta_\lambda(m) \exp\{(\omega - \rho)(\log b)\} f(nbm_o m)\ dndb^* dm^*$$
$$(xh = h_o w n_o b_o m_o)$$

が成立。

適当に測度を正規化すると次の形でPlancerel公式を得る。

定理4.2　$f \in C_c^\infty(\mathbf{X})$に対し

$$\int_{\mathbf{X}} |f(x)|^2\ dx$$
$$= \sum_{l=1}^{m} \sum_{\omega \in (B_l/B_l \cap G)^\wedge} \int_{\mathcal{F}_l{}'} \langle \Theta^{l}{}_{\lambda,\omega}\ ,\ f_o{}^\wedge * f_o\rangle\ |\pi(\lambda,\omega)|^2\ d\lambda$$

が成立。

証明の方針。 各不変帯球超関数 $\Theta^{l}{}_{\lambda,\omega}$ を命題4.1によりEisensein積分に、そしてconstant termをとることにより $M_l/M_l \cap G$ 上の議論に帰着させる。ここでは、命題1.2が成立するが、関数空間を各放物的部分群により分解し、各Cartan部分空間に対応する表現系列ごとに逆フ-リエ変換を求める。これを合わせることにより公式を得る。

-文献-

[1] Harish-Chandra: (1) Harmonic Analysis on Real Reductive Groups I, J.Func.Anal. 19(1975), 104-204,
(2) Harmonic Analysis on Real Reductive Groups II, Invent. Math. 36(1976), 1-55,
(3) Harmonic Analysis on Real Reductive Groups III, Ann. of Math. 104(1976), 117-201.

[2] 大島利雄：半単純対称空間上の調和解析、数学、37(1985), 97-112.

[3] Sano.S: (1) Distribution sphériques invariantes sur l'espace semi-smple et son c-dual, Lecture Notes in Math. No.1243, Springer(1985), 283-309.

(2) Une intégral invariante sur l'algèbre de Lie symétrique semi-simple, Advanced Studies in Pure Math., 14(1988), 449-517.
(3) 対称空間のEisenstein積分, Seminar Reports of Unitary Representation , 8(1988), 99-108.
(4) Distributions sphériques invariantes de la série discrète sur l'espace symétrique semi-simple réel G_C/G_R.Sci. Papers College of Arts and Sciences,Univ. of Tokyo, 39 (1989), 57-71.