ユニタリ表現論セミナー報告集 IX, 1989
pp.55-65

古典型対称対の巾零軌道の閉包について

東京電機大学（工）　太田琢也　(Takuya Ohta)

§0. 序　　G を複素簡約可能代数群、$\mathfrak{g}$ をその Lie 環、θ を代数群 G の対合とし、θ が引き起こす $\mathfrak{g}$ の対合をも θ で表す。$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ を $\mathfrak{g}$ の θ に関する Cartan 分解とし、$K_\theta := \{ g \in G;\ \theta(g) = g \}$とおく。このとき対 $(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$ を (G,θ) により定まる対称対と呼ぶ。また $\mathfrak{p}$ の巾零元の成す部分（代数）多様体を $N(\mathfrak{p})$ で表す。単純 Lie 環と有理二重点の対応を与える Briescorn-Slowdowy の理論（[B],[Sl]）の対称対への拡張が、関口次郎氏により試みられている([Se1])。ここで彼は「$N(\mathfrak{p})$ の生成的特異点(generic singularity) を決定せよ」という問題を提出している。しかし対称対では単純 Lie 環の準正則軌道(subregular orbit)に相当する $N(\mathfrak{p})$ の K_θ-軌道が決定しずらい事情があり、$N(\mathfrak{p})$ の K_θ-軌道の閉包の包含関係を決定することが必要になる。本稿の１つの目的は、古典型対称対についてこの包含関係を決定することにある。これと [Se1] の結果を合わせて、$\mathfrak{g}$ が単純かつ古典型である場合、$N(\mathfrak{p})$ の生成的特異点は A 型、または D 型の Arnol'd の単純特異点（[A] 参照）になっていることが判る。又、Djoković [D]の結果と合わせて、$\mathfrak{p}$ の巾零 K_θ-軌道達と対応する実 Lie 群 $G_{\mathbb{R}}$ の Lie 環 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ の巾零 $G_{\mathbb{R}}$-軌道達の間にある全単射（関口による）が閉包の包含関係を保存していることも判る。

本稿のもう１つの目的は、Kraft, Procesi の古典型 Lie 環の巾零軌道の閉包の特異点に関する結果 [KP2],[KP3] を古典型対称対に拡張することである。

§1. 巾零軌道の分類

(1.1) 有限次元ベクトル空間 V に線形な対合 $s: V \to V$ が与えられているとき、V を対合 s をもつ空間と呼ぶ。更に、V 上の非退化な双一次形式 $(\ ,\ )$ で、 $(u,v) = \varepsilon(v,u)$, $(su,v) = \omega(u,sv)$ $(u,v \in V)$ を満たすものが与えられているとき、V を (ε,ω)-空間と呼ぶことにする。 ここに $(\varepsilon,\omega)=(\pm 1,\pm 1)$である。 対合 s をもつ空間 V に対して次のようにおく。
$V_a:=\{v \in V;\ sv=v\}$, $V_b:=\{v \in V;\ sv=-v\}$, $\tilde{K}(V):=\{g \in GL(V); sgs = g\}$, $\tilde{\underline{k}}(V):=\{X\in gl(V);\ sXs=X\}$, $\tilde{\underline{p}}(V):=\{X\in gl(V);\ sXs=-X\}$, $\theta(g):=sgs\ (g\in GL(V))$
このとき $(GL(V),\tilde{\underline{k}}(V))$ は $(GL(V),\theta)$ から定まる対称対である。 更に、V が (ε,ω)-空間であるとき、$X \in gl(V)$ について、その $(\ ,\ )$ に関する随伴元を X^* で表し、次のようにおく。

$$G(V):=\{g\in GL(V);\ g^*= g^{-1}\},\quad \underline{g}(V):= \{ X\in gl(V);\ X^*= -X \},$$
$$K(V):=\{g\in G(V);\ \theta(g)=g\},\ \underline{k}(V):=\{X\in \underline{g}(V);\ \theta(X)=X\},$$
$$\underline{p}(V):=\{X\in \underline{g}(V);\ \theta(X)=-X \}.$$

このとき、$(\underline{g}(V),\underline{k}(V))$ は $(G(V),\theta|_{G(V)})$ から定まる対称対である。
$\dim V_a=m$, $\dim V_b=n$ とし、記述を簡単にするため $(gl(V),\tilde{\underline{k}}(V))$ にも $(\varepsilon,\omega)=\phi$ を付することにすれば、これらの対称対は、次の表Iにより与えられる（$G_{\mathbb{R}}$については(2.2)で触れる）。

表I

type	(ε,ω)	G	K_θ	$G_{\mathbb{R}}$	m,n
(AIII')	ϕ	$GL(m+n,\mathbb{C})$	$GL(m,\mathbb{C})\times GL(n,\mathbb{C})$	$U(m,n)$	——
(BDI)	(1, 1)	$O(m+n,\mathbb{C})$	$O(m,\mathbb{C})\times O(n,\mathbb{C})$	$O(m,n)$	——
(DIII)	(1,-1)	$O(2n,\mathbb{C})$	$GL(n,\mathbb{C})$	$O^*(2n)$	m=n
(CII)	(-1, 1)	$Sp(m+n,\mathbb{C})$	$Sp(m,\mathbb{C})\times Sp(n,\mathbb{C})$	$Sp(m,n)$	m,n: even
(CI)	(-1,-1)	$Sp(2n,\mathbb{C})$	$GL(n,\mathbb{C})$	$Sp(2n,\mathbb{R})$	m=n

(1.2) 先ず、(AIII')型対称対の巾零軌道の分類を[KP1]に従って復習しておく。 巾零元 $X\in\tilde{\underline{p}}(V)$ に対して、次のような V の基底を取ることが出来る。

$$\{ X^p a_i \ ;\ 1\le i\le r_1,\ 0\le p<\lambda_i\} \cup \{ X^q b_j \ ;\ 1\le j\le r_2,\ 0\le q<\mu_j\}$$

$$a_i\in V_a,\ b_j\in V_b,\quad X^{\lambda_i}a_i=0,\quad X^{\mu_j}b_j=0.$$

$\{ X^p a_i;\ 1\le p<\lambda_i\}$ (resp. $\{ X^q b_j;\ 1\le q<\mu_i\}$) に

$$\overbrace{\text{abab.....}}^{\lambda_i\ 個} \qquad (\text{resp. } \overbrace{\text{baba.....}}^{\mu_j\ 個})$$

を対応させることにより、これらの行の和として図形 η_X を得る。 この様な 図形を ab-図形と呼ぶ。 η_X は V の基底の取り方によらない。 更に、2つの巾零元 X, $Y\in\tilde{\underline{p}}(V)$ が $\tilde{K}(V)$ で共役であるための必要十分条件は、$\eta_X=\eta_Y$ が成立することである。 従って、$N(\underline{p})$ の K_θ-軌道を $[N(\underline{p})]_{K_\theta}$ で表せば、

$$[N(\tilde{\underline{p}}(V))]_{\tilde{K}(V)} \simeq D(m,n) := \{\ \text{ab-図形 } \eta \text{ で } n_a(\eta)=m,\ n_b(\eta)=n \text{ なるもの}\}$$

となる。 ここに $n_a(\eta)$, $n_b(\eta)$ は、それぞれ η の中に現れる a, b の個数である。

次に、$(\varepsilon,\omega)=(\pm1,\pm1)$ に対して、次の表II の ab-図形の和になっている ab-図形を (ε,ω)-図形と呼ぶことにする。

表II

(ε,ω)	(1,1)	(1,-1)	(-1,1)	(-1,-1)
ab-図形	ab...ba,	ba...ba ba...ba,	ab...ba ab...ba,	ba...ba,
	ba...ab,	ab...ab ab...ab,	ba...ab ba...ab,	ab...ab,
	ba...ba ab...ab,	ab...ba ba...ab,	ba...ba ab...ab,	ab...ba ba...ab,

又、 $D^{(\varepsilon,\omega)}(m,n) := \{\ \eta \in D(m,n);\ \eta$ は (ε,η)-図形$\}$とおく。 このとき (ε,ω)-空間 V から定まる対称対 $(\underline{g}(V),\underline{k}(V))$ について、$\underline{p}(V)$ の巾零 $K(V)$-軌道は、次のように分類される。

<u>命題 1</u> ([O1, Proposition 4], [O2, Proposition 2])

(i) $X, Y \in \underline{p}(V)$ が $\tilde{K}(V)$ で共役ならば、$K(V)$ で共役である。 従って、埋め込み

$$[N(\underline{p}(V))]_{K(V)} \hookrightarrow \quad [N(\tilde{\underline{p}}(V))]_{\tilde{K}(V)} \overset{\sim}{\longrightarrow} D(m,n)$$

を得る。

(ii) (i) の埋め込の像は、$D^{(\varepsilon,\omega)}(m,n)$ に一致する:

$$[N(\underline{p}(V)]_{K(V)} \overset{\sim}{\longrightarrow} D^{(\varepsilon,\omega)}(m,n).$$

以下、$D^{\phi}(m,n) := D(m,n)$ とおき、これに従って、一般の ab-図形を ϕ-図形とも呼ぶことにする。 $(\varepsilon,\omega) = \phi$, $(\pm 1, \pm 1)$ に対して、$\eta \in D^{(\varepsilon,\omega)}(m,n)$ に対応する $\underline{p}$ $(=\tilde{\underline{p}}(V)$ 又は $\underline{p}(V))$ の巾零 K_{θ} $(= \tilde{K}(V)$ 又は $K(V))$-軌道を $C_{\eta}^{(\varepsilon,\omega)}$ で表すことにする。

§2. 閉包の包含関係

(2.1) <u>定義</u> (i) ab-図形 η に対して、その第一列を除いて得られる ab-図形を η' で表す。 $\eta^{(k)}(k=1,2,...)$ を帰納的に $\eta^{(k)} := (\eta^{(k-1)})'$ により定める。

(ii) $\eta, \sigma \in D^{(\varepsilon,\omega)}(m,n)$について、$n_a(\sigma^{(k)}) \le n_a(\eta^{(k)})$, $n_b(\sigma^{(k)}) \le n_b(\eta^{(k)})$ が任意の $k \ge 1$ に対して成立するとき、 $\sigma \le \eta$ と書く。

<u>注意1</u> (i) $X \in C_\eta^{(\varepsilon,\omega)}$について、次が成立する：

$\mathrm{rk}(X^{2i-1}|_{V_a}: V_a \to V_b) = n_b(\eta^{(2i-1)})$, $\mathrm{rk}(X^{2i-1}|_{V_b}: V_b \to V_a) = n_a(\eta^{(2i-1)})$,

$\mathrm{rk}(X^{2i}|_{V_a}: V_a \to V_a) = n_a(\eta^{(2i)})$, $\mathrm{rk}(X^{2i}|_{V_b}: V_b \to V_b) = n_b(\eta^{(2i)})$.

(ii) $(\varepsilon,\omega) = (\pm 1, \pm 1)$ のとき、表IIにより、η が (ε,ω)-図形なら、η' は $(-\varepsilon,-\omega)$-図形である。

このとき、巾零軌道の閉包の包含関係は、次のように記述される。

定理1 $\sigma, \eta \in D^{(\varepsilon,\omega)}(m,n)$ $((\varepsilon,\omega)=\phi, (\pm 1, \pm 1))$ について、

$$C_\sigma^{(\varepsilon,\omega)} \subset \overline{C_\eta^{(\varepsilon,\omega)}} \longleftrightarrow \sigma \le \eta$$

が成立する。ここに、閉包はザリスキ閉包である。

定理1 $(\to)$ の部分の証明は容易なので、$(\varepsilon,\omega)=\phi$ の場合に証明を与えておく。 $(\varepsilon,\omega)=(\pm 1, \pm 1)$ の場合も同様である。

先ず、次の $\tilde{K}(V)$-同変写像を考える。

$$\varphi_b^{2i-1}: \tilde{\underline{p}}(V) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_a, V_b), \quad X \mapsto X^{2i-1}|_{V_a},$$

$$\varphi_a^{2i-1}: \tilde{\underline{p}}(V) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_b, V_a), \quad X \mapsto X^{2i-1}|_{V_b},$$

$$\varphi_a^{2i}\ : \tilde{\underline{p}}(V) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_a, V_a), \quad X \mapsto X^{2i}|_{V_a},$$

$$\varphi_b^{2i} \ : \tilde{\underline{p}}(V) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_b, V_b), \quad X \longmapsto X^{2i}|_{V_b} .$$

$X \in C^{\phi}_{\eta}$, $Y \in C^{\phi}_{\sigma}$, $C^{\phi}_{\sigma} \subset \overline{C^{\phi}_{\eta}}$ とすれば、φ_b^{2i-1} の連続性より

$$Y^{2i-1}|_{V_a} = \varphi_b^{2i-1}(Y) \in \varphi_b^{2i-1}(\overline{\{\mathrm{Ad}(\tilde{K}(V))X\}}) \subset \overline{\{\mathrm{Ad}(\tilde{K}(V))(X^{2i-1}|_{V_a})\}}$$

である。 注意１,(i)により

$$n_b(\sigma^{(2i-1)}) = \mathrm{rk}(Y^{2i-1}|_{V_a}) \leq \mathrm{rk}(X^{2i-1}|_{V_a}) = n_b(\eta^{(2i-1)}).$$

同様のことを φ_a^{2i-1}, φ_a^{2i}, φ_b^{2i} に行えば、 $\sigma \leq \eta$ を得る。

次に、定理１ (⇐) の部分についてであるが、長くなるので、証明は載せられない。証明の方針だけ簡単に与えておく。 先ず、(ε,ω)-図形の退化 $\sigma < \eta$ は隣接しているとしてよい。 このとき、$\sigma < \eta$ から共通している行を全て除けば、高々４つの行から成る (ε,ω)-図形の退化 $\bar{\sigma} < \bar{\eta}$ を得る。この $\bar{\sigma} < \bar{\eta}$ について、$C^{(\varepsilon,\omega)}_{\bar{\sigma}} \subset \overline{C^{(\varepsilon,\omega)}_{\bar{\eta}}}$ を示せばよいことが容易に判る。更に、次の補題を用いる。

__補題１__ (ε,ω)-図形の退化 $\sigma \leq \eta$ において、σ, η の第１列は一致しているとする。 このとき、 $C^{(\varepsilon,\omega)}_{\sigma} \subset \overline{C^{(\varepsilon,\omega)}_{\eta}}$ ならば、$C^{(-\varepsilon,-\omega)}_{\sigma'} \subset \overline{C^{(-\varepsilon,-\omega)}_{\eta'}}$ (注意１,(ii) 参照) である。

この補題により、$(\varepsilon,\omega) \neq \phi$ の場合は $(\varepsilon,\omega) = (1,-1)$, $(-1,-1)$ の場合だけ考えればよいことになる。 以上２つの簡約化を行って出てきた (ε,ω)-図形の退化 $\sigma < \eta$ に対して、写像 $z : \mathbb{C} \longrightarrow \underline{p}$ で $z(0) \in C^{(\varepsilon,\omega)}_{\sigma}$, $z(t) \in C^{(\varepsilon,\omega)}_{\eta}$ ($t \in \mathbb{C}^{\times}$) なるものを構成することにより、証明は終る。尚、補題１は３節で行う議論から出るもので、そこで再び触れる。

(2.2) ここで実 Lie 環の巾零軌道との関連について触れておこう。一般に、(G,θ) から定まる対称対 $(\underline{g},\underline{k})$ に対して、θ と可換な複素共役 τ

から $G_{\mathbb{R}}:=\{g\in G;\ \tau(g)=g\}$ として定まる実型 $G_{\mathbb{R}}$があって、$\theta|_{G_{\mathbb{R}}}$が $G_{\mathbb{R}}$の Cartan対合になっているとき、$G_{\mathbb{R}}$を対称対 $(\underline{g},\underline{k})$ に対応する実 Lie 群と呼ぶことにする。 $G_{\mathbb{R}}$ の Lie環 $\underline{g}_{\mathbb{R}}$の巾零 $G_{\mathbb{R}}$-軌道の集合を $[N(\underline{g}_{\mathbb{R}})]_{G_{\mathbb{R}}}$で表すとき、次が成立する。

<u>定理２</u>（関口[Se2]） 自然な全単射

$$[N(\underline{p})]_{K_\theta} \overset{\sim}{\longrightarrow} [N(\underline{g}_{\mathbb{R}})]_{G_{\mathbb{R}}}$$

がある。 本稿では、これを関口の全単射と呼ぶことにする。

この結果により、次のことが成立するのではないかと予想される。

<u>予想１</u> 関口の全単射は、閉包の包含関係を保存する。

定理２の証明には、２つの軌道の集合の間に、仲介として S={strictly normal S-triples} の $K_\theta\cap G_{\mathbb{R}}$-軌道の集合と云うものがはいる。ところが、$K_\theta\cap G_{\mathbb{R}}$ はコンパクト群であるために、S の軌道には（位相が入ったとしても）閉包の包含関係はないことになり、予想の証明は簡単ではないように思われる。 しかし、表I の実Lie群 $G_{\mathbb{R}}$については $[N(\underline{g}_{\mathbb{R}})]_{G_{\mathbb{R}}}$の閉包の包含関係は Djoković [D] により決定されている。 対応 $[N(\underline{p})]_{K_\theta} \overset{\sim}{\to} [N(\underline{g}_{\mathbb{R}})]_{G_{\mathbb{R}}}$ を具体的に調べ、定理１を用いることにより、次を得る。

<u>命題２</u> $(\varepsilon,\omega)=\phi$, $(\pm 1,\pm 1)$ に対する対称対 $(\underline{g},\underline{k})$ と対応する実 Lie 群 $G_{\mathbb{R}}$ について、予想１は正しい。 ここに $G_{\mathbb{R}}$ は表１で与えられる。

<u>注意２</u> $GL(n,\mathbb{C})$ の対合 $\theta(g)=({}^tg)^{-1}$, $\theta(g)=J^{-1}({}^tg)^{-1}J$ （J は非退

化な歪対称行列）から定まる対称対 $(\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}),\mathfrak{o}(n,\mathbb{C}))$, $(\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}),\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C}))$ と対応する実Lie群 $GL(n,\mathbb{R})$, $U^*(n)$ についても予想１が正しいことが容易に判る。

§3. 巾零軌道の閉包に現れる特異点のクラスについて

(3.1) <u>定義</u>　２つの点付き（代数）多様体 (X,x), (Y,y) 滑同値 (smoothly equivalent) であるとは、点付き多様体 (Z,z) 及び $z \in Z$ で滑らかな射

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\varphi} & X \\ {\scriptstyle\psi}\downarrow & & \\ Y & & \end{array}$$

が存在して、$\varphi(z)=x$, $\psi(z)=y$ となることを云う。

この関係は点付き多様体の間の同値関係を定める。(X,x) の同値類を $\mathrm{Sing}(X,x)$ で表す。　又、X に代数群 G が作用しているとき、x, $x' \in X$ が同じ G-軌道に含まれれば、$\mathrm{Sing}(X,x)=\mathrm{Sing}(X,x')$ であるから、この同値類を $\mathrm{Sing}(X,Gx)$ とも表す。

<u>注意３</u>　$\mathbb{C}$ 上の点付き多様体 (X,x), (Y,y) について、次が成立する。

「 $\mathrm{Sing}(X,x)=\mathrm{Sing}(Y,y)$ かつ $\dim_x X = \dim_y Y + r$ $(r \geq 0)$ 」

$\longleftrightarrow$ 「 古典位相での $x \in X$ のある近傍と、$(y,0) \in Y \times \mathbb{C}^r$ のある近傍は解析同型である」

従って、X の x における性質（滑らか、正規等）は、同値類 $\mathrm{Sing}(X,x)$ のみに依存する。

このとき、$(\varepsilon,\omega)=\phi$, $(\pm 1, \pm 1)$ に対応する対称対 $(\mathfrak{gl}(V),\tilde{\underline{k}}(V))$, $(\underline{g}(V),\underline{k}(V))$ について次が成立する。

<u>定理３</u>　$\sigma \leq \eta$ を (ε,ω)-図形の退化とし、σ と η の始めの k 行、ℓ 列 は一致しているとする。　更に、一致した k 個の行は (ε,ω)-図形を成

しているとする。 $\sigma \leq \eta$ から一致する k 行，ℓ 列を除くことにより得られる ab-図形の退化を $\bar{\sigma} \leq \bar{\eta}$ とすれば、$\bar{\sigma}$, $\bar{\eta}$ は $(\varepsilon',\omega'):=(-1)^{\ell}(\varepsilon,\omega)$-図形であって、次が成立する。

$$\mathrm{Sing}(\ \overline{C_{\eta}^{(\varepsilon,\omega)}},\ C_{\sigma}^{(\varepsilon,\omega)}) = \mathrm{Sing}(\ \overline{C_{\bar{\eta}}^{(\varepsilon',\omega')}},\ C_{\bar{\sigma}}^{(\varepsilon',\omega')})$$

ここで、$(\varepsilon,\omega)=\phi$ のときは、$(\varepsilon',\omega')=\phi$ と解釈するものとする。

<u>例</u> $\sigma = \begin{array}{l|l} \underline{\mathrm{aba}} & \underline{\mathrm{babab}} \\ \mathrm{aba} & \mathrm{bab} \\ \mathrm{bab} & \mathrm{aba} \\ \mathrm{aba} & \\ \mathrm{bab} & \\ \mathrm{ab} & \end{array}$, $\eta = \begin{array}{l|l} \underline{\mathrm{aba}} & \underline{\mathrm{babab}} \\ \mathrm{aba} & \mathrm{babab} \\ \mathrm{bab} & \mathrm{a} \\ \mathrm{aba} & \\ \mathrm{bab} & \\ \mathrm{ab} & \end{array}$, $\bar{\sigma} = \begin{array}{l} \mathrm{bab} \\ \mathrm{aba} \end{array}$, $\bar{\eta} = \begin{array}{l} \mathrm{babab} \\ \mathrm{a} \end{array}$

について、 $C_{\sigma}^{(-1,-1)}$, $C_{\eta}^{(-1,-1)}$ は対称対 $(sp(28,\mathbb{C}),gl(14,\mathbb{C}))$ の巾零軌道であり、 $C_{\bar{\sigma}}^{(1,1)}$, $C_{\bar{\eta}}^{(1,1)}$ は対称対 $(o(6,\mathbb{C}),o(3,\mathbb{C})+o(3,\mathbb{C}))$ の巾零軌道である。 このとき、

$$\mathrm{Sing}(\ \overline{C_{\eta}^{(-1,-1)}},\ C_{\sigma}^{(-1,-1)}) = \mathrm{Sing}(\ \overline{C_{\bar{\eta}}^{(1,1)}},\ C_{\bar{\sigma}}^{(1,1)})$$
$$= \mathrm{Sing}(\ \{\ x^2+xy^2=0\},(0,0)).$$

(3.2)　定理3の行の除去が可能であることは、切断(cross section)と云う概念を用いて証明されるが、これについては、触れない。 列の除去が可能であることについては、第2節の補題1とも関係するので、証明の方針を $(\varepsilon,\omega)=(\pm 1,\pm 1)$ の場合に与えておく。

V を対合 s_V 及び、双一次形式 $(\ ,\ )_V$ をもつ (ε,ω)-空間とし、$C_{\eta}^{(\varepsilon,\omega)} \subset \underline{p}(V)$ を (ε,ω)-図形 η に対応する巾零 K(V)-軌道とする。$D \in C_{\eta}^{(\varepsilon,\omega)}$ を固定し、$U:=\mathrm{Im}\ D \subset V$ とすれば、s_V は U を不変にするから、U の対合 $s_U:= s_V|_U$ を定める。 更に、U 上の双一次形式 $(\ ,\ )_U$ を $(Du,Dv)_U:= (u,Dv)_V$ $(u,v \in V)$ により定めることが出来て、U は $(-\varepsilon,-\omega)$-空間になる。 $X \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,U)$ に対して、$X^* \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(U,V)$ を $(Xv,u)_U= (v,X^*u)_V$ $(u \in U,\ v \in V)$ により定める。 又、

$L:=\{X\in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,U);\ s_U X s_V = -X\}$ とおけば、$K(U)\times K(V)$ は L に作用する。射 $\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\pi} & \underline{p}(U) \\ \rho \downarrow & & \\ \underline{p}(V) & & \end{array}$ を $\pi(X):=XX^*$, $\rho(X):=X^*X$ により定めることが出来て、これらはそれぞれ $K(U)$, $K(V)$ 同変写像である。 更に、古典的不変式論により、π, ρ はそれぞれ $K(V)$,$K(V)$ による商写像（定義は[KP2]参照）になっていることが判る。 $\mathrm{Im}\, D = U$ より、$D_o:=[D:V \longrightarrow U] \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,U)$ であるが更 に、$D_o \in L$ である。 $I: U \longrightarrow V$ を包含写像とすれば、$(D_o)^* = I$ であって、$\rho(D_o) = ID_o = D \in C_{\eta}^{(\varepsilon,\omega)}$, $\pi(D_o) = D_o I = D|_U \in \underline{p}(U)$ である。 D を $U = \mathrm{Im}\, D$ に制限した $\underline{p}(U)$ の元 $D|_U$ の ab-図形は、D の ab-図形から第一列を除いたものになることから $\pi(D_o) \in C_{\eta'}^{(-\varepsilon,-\omega)}$ である。 更に、次が成立する。

<u>**補題３**</u> (ε,ω)-図形 σ は、$\sigma \le \eta$ を満たし、かつ σ と η の第一列は一致しているとする。 このとき、

$$\pi(\rho^{-1}(C_{\sigma}^{(\varepsilon,\omega)})) = C_{\sigma'}^{(-\varepsilon,-\omega)}$$

が成立する。 特に、$\pi(\rho^{-1}(C_{\eta}^{(\varepsilon,\omega)})) = C_{\eta'}^{(-\varepsilon,-\omega)}$ である。

この補題と、「群による商写像は、その群で不変な閉集合を閉集合に写す」と云う性質を用いると、第一節の補題１が証明される。 又、$N_\eta := \pi^{-1}(\overline{C_{\eta'}^{(-\varepsilon,-\omega)}})$ とおくと、$\rho(N_\eta) = \overline{C_{\eta}^{(\varepsilon,\omega)}}$ が判る。 写像

$$\begin{array}{ccc} N_\eta & \xrightarrow{\pi} & \overline{C_{\eta'}^{(-\varepsilon,-\omega)}} \\ \rho \downarrow & & \\ \overline{C_{\eta}^{(\varepsilon,\omega)}} & & \end{array}$$

が、補題３の (ε,ω)-図形 σ については $X \in \rho^{-1}(C_{\sigma}^{(\varepsilon,\omega)})$ で滑らかになることを示すことにより、定理３の列の除去の証明が終る。

文献

[A] V.I. Arnol'd, Normal forms for functions near degenerate critical points, the Weyl groups A_k, D_k, E_k and Lagrangian singularities. Func. Anal. Appl. 6, (1972),254-272.

[B] E. Breskorn, Singular elements of semi-simple algebraic groups. Actes Congrès intern. Math. Nice, tome 2 (1970), 279-284.

[D] D. Djoković, Closures of conjugacy classes in classical real linear Lie groups, Lect. notes in Math.848, Springer Verlag, 1980.

[KP1] H. Kraft and C. Procesi, Closures of conjugacy classes of matrices are normal, Invent. Math. 53(1979), 227-247.

[KP2] ——, Minimal singularities in GL_n, Invent. Math. 62(1981), 503-515.

[KP3] ——, On the geometry of conjugacy classes in classical groups, Comment. Math. Helv. 57(1982), 539-602.

[O1] T. Ohta, The singularities of the closures of nilpotent orbits in certain symmetric pairs, Tohoku Math. J. 38(1986), 441-468.

[O2] ——, Classification of admissible nilpotent orbits in the classical real Lie algebras, to appear in Journal of algebra.

[Se1] J. Sekiguchi, The nilpotent subvariety of vector space associated to a symmetric pair, Publ. RIMS Kyoto Univ. 20(1984), 155-212.

[Se2] ——, Remarks on real nilpotent orbits of a symmetric pair, J. Math. Soc. Japan 39, No1(1987), 127-138.

[Sl] P. Slowdowy, Simple singularities and simple algebraic groups, Lect. notes in Math. 815, Springer Verlage (1980).