ユニタリ表現論セミナー報告集 IX, 1989
pp.47-54

Ｙａｎｇ－Ｂａｘｔｅｒ方程式と量子一般線型群の表現論

名大　理　　橋本　光靖
林　　孝宏

§０　序

量子群は、Ｙａｎｇ－Ｂａｘｔｅｒ方程式の解の対称性を記述するものとして現れた新しい代数系である。すなわち、神保道夫氏は、Ｋａｃ－Ｍｏｏｄｙリー環の q－アナログ $U_q g$ を定義すると共に、古典型のそれのベクトル表現 V に対し、Ｙａｎｇ－Ｂａｘｔｅｒ方程式の解 $R(x)$ を $\mathrm{End}_{U_q g}(V\otimes V)$ の元として構成した。さらに氏は、Ａ型の場合に、 $R(x)$ から岩堀ヘッケ環の $V\otimes\ldots\otimes V$ への作用を構成し、それが $U_q g$ の作用のｃｏｍｍｕｔａｎｔとして捉えられることを発見した（Ｗｅｙｌ相互律の q－アナログ）。一方、その後の伊達、神保、国場、三輪、尾角氏によるＦａｃｅ型格子模型の研究、土屋、蟹江氏による共形場理論の研究には、再びヘッケ環の表現が現れ、また量子群の表現論との「数値的な」関係が多く指摘されているが、その理論的究明は、未だなされていない。　我々はこの問題を踏まえ、最初の神保氏の視点とは逆に、Ｙａｎｇ－Ｂａｘｔｅｒ方程式の解から出発して量子群とその表現論を構成できるのではないかと考え、最も基本的と思われるＡ型の場合を主にして試みてみた。我々の基本的なアイデアは、 $GL(N)$ を構成するには、行列と行列式があれば十分であり、またその表現を得るには対称テンソルと交代テンソルがあれば十分であるということである。そのためこれら線型代数的概念の「量子的」対応物の探求が実質的な主題になる。但し、上述の物理的モデルとの関係上、パラメータ q が１のベキ根で表現の完全可約性の成り立たない場合を込めて考えていく必要があり、いきおい慎重な取扱いが必要となる。

§1　量子行列

R を単位元を持つ可換環、 V を有限階数自由 R-加群とするとき、次の条件を満たす $\beta_V \in GL(V\otimes V)$ を V 上のＹａｎｇ－Ｂａｘｔｅｒ（ＹＢ）作用素と呼ぶ。

$$\beta_1\beta_2\beta_1=\beta_2\beta_1\beta_2, \qquad \beta_1=\beta_V\otimes id_V, \beta_2=id_V\otimes\beta_V \in End(V\otimes V\otimes V)$$

また組 $V=(V,\beta_V)$ のことをＹａｎｇ－Ｂａｘｔｅｒ対と呼ぶ。

例１　一般に自由加群 V,W に対し、$\tau_{VW}:V\otimes W\to W\otimes V$ を $\tau_{VW}(v\otimes w)=w\otimes v$ で定める。(V,τ_{VV}) はＹＢ対である。

例２　（神保の $A_{N-1}{}^{(1)}$ 解） V を $\{u_i ; 1\leqq i\leqq N\}$ を基底とする自由 R-加群、q を R の０でない元とする。V 上のＹＢ作用素 β を $\beta(u_i\otimes u_i)=u_i\otimes u_i$, $\beta(u_i\otimes u_j)=qu_j\otimes u_i$, $\beta(u_j\otimes u_i)=qu_i\otimes u_j+(1-q^2)u_j\otimes u_i$ $(1\leqq i<j\leqq N)$ で定めることができる。

例１は例２で q=1 とおくと得られることに注意する。ＹＢ対 V は組紐群

$$B_k = \langle b_i\ (1\leqq i\leqq k-1) ;\ b_ib_{i+1}b_i=b_{i+1}b_ib_{i+1},\quad b_ib_j=b_jb_i\quad |i-j|\geqq 2 \rangle$$

と密接な関係を持っている。実際,

$$b_i\to\beta_i:=id_V\otimes\cdots\otimes \overset{i\ \ i+1}{\beta_V}\otimes\cdots\otimes id_V$$

は明らかに B_k の $V\otimes...\otimes V$ （k個のテンソル積）上の表現を与える。

次に、ＹＢ対 V, W に対しその積 V×W 及び双対 $V^\vee$ をそれぞれ

$$V\times W = (V\otimes W, id_V\otimes\tau_{VW}\otimes id_W\circ\beta_V\otimes\beta_W\circ id_V\otimes\tau_{WV}\otimes id_W),$$
$$V^\vee = (V^*, (\beta^*)^{-1})$$

で定める。また次数付き環 SV, ΛV をそれぞれ

$$SV=TV/(Im(id-\beta_V)),\quad \Lambda V=TV/(Ker(id-\beta_V))$$

で定め、それぞれ V 上の<u>対称代数</u>、<u>交代代数</u>と呼ぶことにする。例1のYB対 (V,τ_{UU}) に対しては、これらは通常のそれと一致する。

V をYB対とし、$E=V\times V^{\vee}$ とおく。また u_i を V の基底 v_i をその双対基底とし $x_{ij}=u_i\otimes v_j$ とおく。このとき次が成り立つ。

<u>命題</u>(1) 対称代数 SE は余積 $\delta(x_{ij})=\Sigma_k x_{ik}\otimes x_{kj}$ と余単位元 $e(x_{ij})=\delta_{ij}$ により双代数になる。また V は $\omega(u_i)=\Sigma_j x_{ij}\otimes u_j$ により左 SE-余加群になる。
(2) SE の $V\otimes V$ への余作用は、β_U と可換。

例1のYB対に対しては、SE は $Mat(V)$ 上の多項式関数環に他ならない。そこで我々は、双代数 SE をYB対 V 上の<u>量子行列</u>と呼ぶことにする。

<u>例</u> (V,β_U) を $N=2$ のときの例2のYB対とする。すると R-代数として、

$$SV = \langle u_1,u_2\ ;\ u_1u_2=qu_2u_1\rangle,\qquad \Lambda V = \langle u_1,u_2\ ;\ qu_1u_2+u_2u_1=0\rangle$$

$$SE = \langle a,b,c,d\ ;\ ab-qba=ac-qca=cd-qdc=bd-qdb=0,\ bc=cb,\ ad-da=(q-q^{-1})bc\rangle$$

$$\Lambda E = \langle a,b,c,d\ ;\ aa=bb=cc=dd=0,\ qab+ba=qac+ca=qcd+dc=qbd+db=0,\ ad+da=0,\ bc+cb+(q-q^{-1})ad=0\rangle$$

である。商代数 $SE/(\det_q-1)$, $\det_q=ad-qbc$ はHopf代数の構造をもち通常量子群 $SL_q(2)$ と呼ばれているものに一致する（N が一般でも同様）。但し、x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22} をそれぞれ a, b, c, d とおいた。

<u>定理</u> $(S_kE)^*$ は $End_{B_k}(\otimes^k V)$ と R-代数として同型。

<u>§2 シュア加群</u>

以下 V は、§1例2のYB対を表すものとする。A を SV または ΛV とすると A 上のYB作用素 ϕ_A であって次の条件を満足するものがちょうどひとつ存在する。

$\phi_A(A_i\otimes A_j)=A_j\otimes A_i$, $\phi_{SV}\Big|_{S_1V\otimes S_1V} = q^{-2}\beta_U$, $\phi_{\Lambda V}\Big|_{\Lambda_1 V\otimes\Lambda_1 V} = -\beta_U$

$$\phi_A\circ m_A\otimes id_A = id_A\otimes m_A\circ(\phi_A)_1\circ(\phi_A)_2$$

$$\phi_A\circ id_A\otimes m_A = m_A\otimes id_A\circ(\phi_A)_2\circ(\phi_A)_1$$

但し、$m_A:A\otimes A\to A$ は積を表すものとする。次に ϕ_A を用いて $A\otimes A$ 上の（結合的な）積構造を $m_A\otimes m_A\circ id_A\otimes\phi_A\otimes id_A$ ：$(A\otimes A)\otimes(A\otimes A)\to A\otimes A$ で定める。すると R-代数の射 Δ_A ：$A\to A\otimes A$ であって $\Delta_A(u)=u\otimes 1+1\otimes u$ $(u\in A_1)$ を満たすものがちょうどひとつ定まる。さらに Δ_A は余結合律 $\Delta_A\otimes id_A\circ\Delta_A = id_A\otimes\Delta_A\circ\Delta_A$ を満足し、A は双代数に近い構造を持っているということができる。一方、§1の命題から A は SE-余加群であり、また ϕ_A, m_A, Δ_A は SE-余加群の射であることがわかるのでこれらを表現論に応用することができる。

ヤング図形、すなわち自然数の広義減少列 $Y=(y_1,\cdots,y_k)$ に対し $A_Y= A_{y_1}\otimes\cdots\otimes A_{y_k}$ (A=SV, ΛV or TV) とおき、SE-余加群 L_YV を次の合成写像の像として定義する。

$$d_Y\ :\ \Lambda_Y V \xrightarrow{\Delta\otimes\Delta\otimes\Delta} T_Y V \xrightarrow{\beta_U(\chi_Y)} T_{Y'}V \xrightarrow{m\otimes\cdots\otimes m} S_{Y'}V$$

但し、Δ：$\Lambda_y V\to T_y V$, m：$T_y V\to S_y V$ は、おのおの ΛV の余積、SV の積を繰り返したものとする。また Y' はヤング図形 Y の転置とする。さらに χ_Y は、対称群の元で、例えば Y=(4,3,1) なら

$$\begin{matrix}1&2&3&4\\5&6&7&\\8&&&\end{matrix}\quad\xrightarrow{\chi_Y}\quad\begin{matrix}1&4&6&8\\2&5&7&\\3&&&\end{matrix}$$

により決まるものとし、$\beta_U(\chi_Y)$ は、$\chi_Y=\sigma_{i1}\cdots\sigma_{i1}$, $\sigma_k=(k,k+1)$ を最短表示とするとき、$\beta_U(\chi_Y)=(\beta_U)_{i1}\cdots(\beta_U)_{i1}$ により一意に決まる写像を表すものとする。我々は、L_YV をシュア加群と呼ぶ。

ヤング図形 Y の各箱に 1 から rankV までの数を書き込んだもので、中の数が横方向に狭義増大、縦方向に狭義増大であるようなものを型 Y のスタンダードタブローと呼ぶ。例えば、

$$\begin{array}{llll} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 6 & \\ 3 & & & \end{array}$$

は、型 (4,3,1) のスタンダードタブローである。次にスタンダードタブロー T にたいし $L_Y V$ の元 $d_Y(\Lambda_T)$ を対応させる。ここで Λ_T は T により定まる $\Lambda_Y V$ の元で、例えば、上の例では、$\Lambda_T=u_1u_2u_4u_5\otimes u_1u_2u_6\otimes u_3$ となるようなものとする。次の定理は、シュア加群が、" defined over $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$" であることを意味している。

<u>定理</u> (1)シュア加群 $L_Y V$ は $\{d_Y(\Lambda_T) \mid T$ は型 Y のスタンダードタブロー$\}$ を基底とする自由 R-加群。
(2)$f:R\to R'$ を可換環の準同型で $f(q)=q'$ なるものとすると、$S(E\otimes_R R')$-余加群として、$L_Y(V\otimes_R R')$ と $(L_Y V)\otimes_R R'$ とは同型。

ところで、我々は、勝手な可換環 R と $q\in R^\times$ を相手にしているので、シュア加群は、一般には既約ではなくまた $S_k(E)^*$ も半単純環とは限らない。しかしながら§1の定理、及び岩堀ヘッケ環についての結果から次を得ることができる。

<u>定理</u> R は体とする。
(1)勝手な自然数 n に対して $[n]:=1+q^2+q^4+\cdots+q^{2(n-1)}$ が0でなければ、$(S_k E)^*$ は半単純でその既約表現の全体は、$\{L_Y V \mid Y=(y_1,\cdots,y_k)$ は $y_1\leqq \dim V$ なるヤング図形$\}$ で与えられる。
(2)フックレングスの積の q-アナログ $\Pi_{i,j}[y_i+y'_j-i-j+1]$ が0でないなら、$L_Y V$ は既約。

<u>§3 量子行列式と straightening formulas</u>

<u>定義</u> <u>行列式写像</u> $\Phi: \Lambda V\otimes\Lambda V^*\to SE$ を $\Phi=id\otimes ev\circ\omega\otimes id$ で定める。但し、ω は SE の ΛV への余作用、ev は ΛV と ΛV^* との間の標準的なペアリングを表すものとする。さらに、$a_1,\cdots,a_k\in\Lambda V$, $b_1\cdots,b_k\in\Lambda V^*$ に対し、$\Phi(a_1\otimes\cdots\otimes a_k\otimes b_1\otimes\cdots\otimes b_k)=\Phi(a_1\otimes b_1)\cdots\Phi(a_k\otimes b_k)$ とおく。

写像 Φ を ΛV の自由 R-基底 $\{u_{i_1}\cdots u_{i_k} \mid i_1<\cdots<i_k\}$ 及びその双対基底 $\{v_{i_1}\cdots v_{i_k} \mid i_1<\cdots<i_k\}$ で具体的に表すと次のようになる。

$$\Phi(u_{i_1}\cdots u_{i_k}\otimes v_{j_1}\cdots v_{j_m}) = \delta_{km}\Sigma_s(-q)^{l(s)}x_{i_1 j_{s(1)}}\cdots x_{i_k j_{s(k)}}$$

但し、右辺の和は、k 次対称群の元 s 全体をわたるものとし、また l(s) は元 s の長さを表すものとする。

<u>命題</u> 次の図式たちは、可換。

$$\begin{tikzcd}
\Lambda V\otimes\Lambda V\otimes\Lambda V^* \arrow[r, "m\otimes 1"] \arrow[d, "1\otimes 1\otimes\Delta"] & \Lambda V\otimes\Lambda V^* \arrow[d, "\Phi"] & \Lambda V\otimes\Lambda V^*\otimes\Lambda V^* \arrow[l, "1\otimes m"'] \arrow[d, "\Delta\otimes 1\otimes 1"] \\
\Lambda V\otimes\Lambda V\otimes\Lambda V^*\otimes\Lambda V^* \arrow[r, "\Phi"'] & SE & \Lambda V\otimes\Lambda V\otimes\Lambda V^*\otimes\Lambda V^* \arrow[l, "\Phi"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\Lambda V\otimes\Lambda V\otimes\Lambda V^*\otimes\Lambda V^* \arrow[r, "\Phi\otimes\Phi\circ 1\otimes\tau\otimes 1"] \arrow[d, "\phi\otimes(\phi^*)^{-1}"] & SE\otimes SE \arrow[d, "\psi"] \\
\Lambda V\otimes\Lambda V\otimes\Lambda V^*\otimes\Lambda V^* \arrow[r, "\Phi\otimes\Phi\circ 1\otimes\tau\otimes 1"'] & SE\otimes SE
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\Lambda V\otimes\Lambda V^* \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\Delta\otimes\Delta"] & SE \arrow[d, "\Delta"] \\
\Lambda V\otimes\Lambda V^* \arrow[r, "\Phi"'] & SE
\end{tikzcd}$$

但し、ψ は SE 上のＹＢ作用素であって、$S_1E\otimes S_1E$ への制限が $\beta_U\times\beta_{U^\vee}$ に一致し、ϕ_{SU} と同様の条件を満たすようなものとする。

前命題の最初の図式は、q=1 のときはラプラス展開に他ならない。また二つ目の図式は量子小行列式たちの交換関係を表す式と見ることができる。と言うのは、ＹＢ作用素 ψ は、$m_{SE}\circ\psi = m_{SE}$ と言う著しい性質を持っているからである。なお、これら二つの図式はかなり一般化できることがわかっている。

次に箱の数 $|Y|$ が k 個であるようなヤング図形 Y に対し

$$M_Y = \Sigma_{|W|=k,\ W\geq Y}\Phi(\Lambda_W V) \qquad M'_Y = \Sigma_{|W|=k,\ W>Y}\Phi(\Lambda_W V)$$

とおく。但し、ヤング図形 $Y=(y_1,\cdots,y_l)$, $W=(w_1,\cdots,w_m)$ に対し $W\geqq Y$ は、ある j に対して $w_j\geqq y_j$ かつ $w_i=y_i$ $(i<j)$ であることを意味するものとする。

Φ は、SE-両側余加群の射であるから、

$$0 \subset M_{(k)} \subset M_{(k-1,1)} \subset \cdots \subset M_{(1,\ldots,1)} = SE$$

は、SE の部分 SE-両側余加群の減少列である。

<u>定理</u>　次の図式を可換にするような同型射 $L_YV\otimes L_YV^* \to M_Y/M'_Y$ がちょうど一つ存在する

$$\begin{array}{ccc}
\Lambda_Y V\otimes\Lambda_Y V^* & \xrightarrow{\Phi} & M_Y \\
\downarrow d_Y\otimes d_Y & & \downarrow \mathrm{proj} \\
L_YV\otimes L_YV^* & \rightarrow & M_Y/M'_Y
\end{array}$$

特に R が体で各自然数 n に対し [n] が 0 でなければ、$SE=\oplus_Y L_YV\otimes L_YV^*$ である。

この定理の証明には、前命題の他、プリュッカー関係式、すなわち、次の形の完全列が重要な役割を果たす。

$$\oplus_W \Lambda_W V \xrightarrow{\Box_Y} \Lambda_Y V \xrightarrow{d_Y} L_Y V \rightarrow 0$$

ここで、$\Box_Y$ は ΛV の積 m と余積 Δ を用いて表されるある写像である。

またこの定理と同様にして次が証明される。

<u>定理</u>　SE-両側余加群として ΛE は、$\oplus_Y L_YV\otimes(L_YV)^*$ と up to filtration で同型。

ΛE の部分加群の構成には、行列式写像 Φ の代わりに $\Lambda V\otimes(SV)^*$ から ΛE へのある写像で前命題と類似の性質を満たすものが用いられる。

参考文献

[ABW] K.Akin, D.Buchsbaum and J.Weyman, Schur functors and Schur complexes, Adv. in Math. 72 (1988)

[HH] M.Hashimoto and T.Hayashi, Quantum multilinear algebra, preprint

[J] M.Jimbo, A q-analogue of U(gl(N+1)), Hecke algebra and the Yang-Baxter equation, Lett. in Math. Phys. 11 (1986) 247-252.

[JMO] M.Jimbo, T.Miwa and M.Okado, Solvable lattice models related to the vector representation of classical simple Lie algebras, Commun. in Math. Phys. 116, 507-525(1988)

[NYM] M.Noumi, H.Yamada and K.Mimachi,Zonal spherical functions for the quantum homogeneous space $SU_q(n+1)/SU_q(n)$, preprint.

[TK] A.Tsuchiya and Y.Kanie, Vertex operators on conformal field theory on P^1 and monodromy representations of braid groups, Adv.Stud.Pure Math. 16.(1988)

[UTS] K.Ueno, T.Takebayashi and Y.Shibukawa, Gelfand-Tsetlin basis for representations of the quantum group group $GL_q(N+1)$ and the basic quantum affine space, preprint.

[W] S.L.Woronowicz, Compact matrix pseudogroups, Commun.Math. Phys., 111 (1987)