ユニタリ表現論セミナー報告集 IX, 1989
pp.36-46

スピン表現に対応する R–matrix について

京大数理研　尾角 正人 (Masato Okado)

§1. はじめに

最近では、 Quantum R–matrix は 数理物理学の人のみならず 数学の人にも大変なじみの深いものになった。これは、Quantum R–matrix と 他の諸分野とのいろいろな関連が見い出されてきたからであろう。思い付くままに挙げてみても、量子群、q–analysis、C^*– 代数、リンクの不変量、 共形場理論などたくさんある。Quantum R–matrix は アフィン・リー環 $X_n^{(1)}$ と その classical part X_n の有限次元既約表現 π の pair $(X_n^{(1)}, \pi)$ によって定まる。実は、twisted のアフィン・リー環に対応する Quantum R–matrix も考えることができるが、ここでは non–twisted に話を限ろう。 Drinfeld[1] によって、 universal R–matrix が与えられているが、今までに具体的な形がわかっているのは π が自然表現の時 [2,3] と $X_n = A_n$ で π が一般の表現の時であった。 A 型の一般の表現に対応する Quantum R–matrix は fusion procedure によって構成される [4]。これは、最も基本的な自然表現に対応する R–matrix を "積み上げる" ことによってなされるのであった。では、B 型や D 型で最も基本的な表現は何であろうか? スピン表現である。そこで本稿では、$X_n = B_n, D_n$, $\pi =$ スピン表現 の場合に この Quantum R–matrix を書き下すことにしたい。話は、B 型の場合を中心に進め D 型の場合は結果のみ記すことにする。詳細は ただ今準備中である [5]。尚、 G_2 の場合にも Quantum R–matrix が求められている [6]。これは、 国場氏が報告の予定である。

§2. $U_q(B_n)$ と そのスピン表現

記号は [7] のものを採用することにする。$\mathfrak{h}$ を B_n の Cartan 部分代数とし、$\epsilon_j\ (j=1,\cdots,n)$ を $\mathfrak{h}^*$ の正規直交基とする。q を nonzero の複素数とするとき、$U_q(B_n)$ は 次のような関係式を満たす生成元 $X_j^{\pm}, H_j, (j=1,\cdots,n)$ によって生成される associative な $\mathbf{C}$– 代数として定義される。

$$[H_i,H_j]=0, \qquad [H_i,X_j^{\pm}]=\pm(\alpha_i,\alpha_j)X_j^{\pm},$$
$$[X_i^+,X_j^-]=\delta_{ij}\frac{q^{2H_i}-q^{-2H_i}}{q^2-q^{-2}},$$
$$\sum_{k=0}^{1-a_{ij}}(-)^k\begin{bmatrix}1-a_{ij}\\ k\end{bmatrix}_{q_i}\left(X_i^{\pm}\right)^{1-a_{ij}-k}X_j^{\pm}\left(X_i^{\pm}\right)^k=0 \quad (i\neq j).$$

ここで、$\alpha_j=\epsilon_j-\epsilon_{j+1}\ (1\le j<n)$, $\epsilon_n\ (j=n)$, $q_i=q^{(\alpha_i,\alpha_i)}$, $a_{ij}=2(\alpha_i,\alpha_j)/(\alpha_i,\alpha_i)$ であり、

$$\begin{bmatrix}m\\ n\end{bmatrix}_t=\prod_{j=1}^{n}\frac{t^{m-n+j}-t^{-(m-n+j)}}{t^j-t^{-j}}.$$

周知のことであろうが、$U_q(B_n)$ は $q\to 1$ の時、B_n の展開環となる。

さて、肝心な点は $U_q(B_n)$ が 次のような comultiplication Δ をもつ ホップ代数であることとである。

$$\Delta: U_q(B_n)\longrightarrow U_q(B_n)\otimes U_q(B_n),$$
$$\Delta(H_i)=H_i\otimes 1+1\otimes H_i,$$
$$\Delta(X_i^{\pm})=q^{H_i}\otimes X_i^{\pm}+X_i^{\pm}\otimes q^{-H_i}.$$

この Δ によって、diagonal embedding が定義されるので テンソル積表現を分解することが可能になる。

さて、$U_q(B_n)$ のスピン表現を復習しよう。そのための準備として、ベクトル空間 $\mathbf{C}^2=\mathbf{C}e_{\frac{1}{2}}\oplus\mathbf{C}e_{-\frac{1}{2}}$ に働く 2×2 行列 X^+, X^-, H を次のように定義する。

$$X^+e_\epsilon=e_{\epsilon+1},\quad X^-e_\epsilon=e_{\epsilon-1},\quad He_\epsilon=\epsilon e_\epsilon.$$

但し、$\epsilon=\pm\frac{1}{2}$ であり、もし $\epsilon'\neq\pm\frac{1}{2}$ の時は $e_{\epsilon'}$ は 0 と思うことにする。我々のスピン表現の表現空間 V_{sp} は

$$V_{\mathrm{sp}}=(\mathbf{C}^2)^{\otimes n}$$

で 次の pure tensor で張られている。

$$e_\alpha\overset{\mathrm{def}}{=}e_{\alpha_1}\otimes\cdots\otimes e_{\alpha_n}\qquad (\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in\{\pm\frac{1}{2}\}^n)$$

このベクトルは、weight $\alpha_1\epsilon_1+\cdots+\alpha_n\epsilon_n$ の weight vector となっている。$U_q(B_n)$ の生成元 $X_i^{\pm}, H_i\,(i=1,\cdots,n)$ は V_{sp} に次のように働く。

$$
\begin{aligned}
X_i^+ &= -1\otimes\cdots\otimes \overset{i}{X^+}\otimes \overset{i+1}{X^-}\otimes\cdots\otimes 1 \quad (i=1,\cdots,n-1),\\
X_n^+ &= \frac{1}{\sqrt{q+q^{-1}}}1\otimes\cdots\otimes \overset{n}{X^+},\\
H_i &= 1\otimes\cdots\otimes(\overset{i}{H}\otimes\overset{i+1}{1}-\overset{i}{1}\otimes\overset{i+1}{H})\otimes\cdots\otimes 1 \quad (i=1,\cdots,n-1),\\
H_n &= 1\otimes\cdots\otimes\overset{n}{H},\\
X_i^- &= {}^t(X_i^+) \quad (i=1,\cdots,n).
\end{aligned}
$$

次の章のために、X_0^+, H_0 も定義しておこう。

$$
\begin{aligned}
X_0^+ &= -X^-\otimes X^-\otimes\cdots\otimes 1,\\
H_0 &= -(H\otimes 1+1\otimes H)\otimes\cdots\otimes 1
\end{aligned}
$$

X_0^+ は $-\theta\,(\theta=$ highest root $=\epsilon_1+\epsilon_2)$ に対応する root vector である。

§3. Quantum R–matrix

以上の道具立てがそろった時、これらからどのように Quantum R–matrix を構成するかは [2] に述べられている。それによると Quantum R–matrix $R(x)$ とは、$\mathrm{End}_{\mathbf{C}}(V_{\mathrm{sp}}\otimes V_{\mathrm{sp}})$ の元であって、次の関係式を満たすもののことである。

(a) $\quad [R(x),\Delta(X)]=0 \qquad {}^{\forall}X\in U_q(B_n)$

(b) $\quad R(x)\bigl(xq^{H_0}\otimes X_0^+ + X_0^+\otimes q^{-H_0}\bigr)=\bigl(q^{H_0}\otimes X_0^+ + xX_0^+\otimes q^{-H_0}\bigr)R(x)$

このような $R(x)$ は 存在すれば定数倍を除いて unique であり、Yang–Baxter 方程式

$$
\bigl(R(x)\otimes 1\bigr)\bigl(1\otimes R(xy)\bigr)\bigl(R(y)\otimes 1\bigr)=\bigl(1\otimes R(y)\bigr)\bigl(R(xy)\otimes 1\bigr)\bigl(1\otimes R(x)\bigr)
$$

を満たすことがわかっている [2]。Quantum R–matrix を良く知っている方には、上の $R(x)$ は 実は $\check{R}(x)$ と書かれるものであることを申し添えておく。

さて、(a) からわかることは何であろうか? それは、$R(x)$ が $V_{\mathrm{sp}}\otimes V_{\mathrm{sp}}$ の各既約成分上で constant であるということである。[8] によって、q が generic であれば展開環の q–analogue の有限次元表現論は 単純リー環の表現論と全く parallel に進むことがわかっている。

今の場合、$V_{\rm sp}\otimes V_{\rm sp}$ の既約分解は V_k を最高ウェイトが $\epsilon_1+\cdots+\epsilon_{n-k}$ $(0\le k<n)$, 0 $(k=n)$ であるような 最高ウェイト加群として、

$$V_{\rm sp}\otimes V_{\rm sp}=V_0\oplus V_1\oplus\cdots\oplus V_n$$

となることがわかる。よって、$R(x)$ は次のようにかかれる。

$$R(x)=\sum_{k=0}^{n}\rho_k(x)P_k$$

但し、$\rho_k(x)$ はスカラー、P_k は V_k への projector である。

さて、次に $\rho_k(x)$ を定めるという問題が残っているが これに答えるのが (b) である。これによって、$\rho_k(x)$ は定数倍を除いて一意的に定まる。以上、この procedure をたどれば Quantum R–matrix は 原理的には書き下すことができる。

§4. 計算

§3 の計算を $U_q(B_n)$ の場合に具体的に進めてみよう。まず、記号の準備をする。以下では、$V_{\rm sp}\otimes V_{\rm sp}$ の元は下の $\mathbf{C}$–linear map の像で表示する。

$$\begin{array}{cccc} V_{\rm sp}\otimes V_{\rm sp}= & (\mathbf{C}^2)^{\otimes n}\otimes(\mathbf{C}^2)^{\otimes n} & \longrightarrow & (\mathbf{C}^4)^{\otimes n} \\ & e_\alpha\otimes e_\beta & \mapsto & e_{\alpha_1\beta_1}\otimes\cdots\otimes e_{\alpha_n\beta_n} \end{array}$$

ここで、$\alpha,\beta\in\{\pm\frac{1}{2}\}^n$ である。$\mathbf{C}^4$ は $e_{++},e_{+-},e_{-+},e_{--}$ の 4 つのベクトルで張られている。$e_{\pm\pm}$ は $e_{\pm\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}}$ の略である。これからは、$V_{\rm sp}$ や V_k のことを $V_{\rm sp}^{(n)},V_k^{(n)}$ という風に書くが、これは ランク n を示したものである。$\mathbf{C}$–linear map ι_j^ϵ $(\epsilon=\pm\frac{1}{2},\ j=1,\cdots,n)$ を 次のように定義する。

$$\begin{array}{ccc} V_{\rm sp}^{(n-1)}\otimes V_{\rm sp}^{(n-1)} & \xrightarrow{\iota_j^\epsilon} & V_{\rm sp}^{(n)}\otimes V_{\rm sp}^{(n)} \\ e_{\alpha_1\beta_1}\otimes\cdots\otimes e_{\alpha_{n-1}\beta_{n-1}} & \mapsto & e_{\alpha_1\beta_1}\otimes\cdots\otimes \overset{j}{e_{\epsilon\epsilon}}\otimes\cdots\otimes e_{\alpha_{n-1}\beta_{n-1}}. \end{array}$$

さて、我々は $P_k^{(n)}$ の具体形を求めなければならないが、そのためには $V_k^{(n)}$ の直交基を計算する必要がある (Wigner Calculus)。ウェイト $\gamma=\gamma_1\epsilon_1+\cdots+\gamma_n\epsilon_n$ の ウェイト空間 $\left(V_k^{(n)}\right)_\gamma$ ごとに 直交基を与えよう。これは n について帰納的になされる。ここで、すべての j に対し $\gamma_j\in\{0,\pm1\}$ でなければ $\left(V_k^{(n)}\right)_\gamma=\{0\}$ であることに注意。

定理

(1) $\gamma \neq 0$ のとき、$\gamma_j = 2\epsilon$ ($\epsilon = \frac{1}{2}$ or $-\frac{1}{2}$) なる j をとり $\gamma' = \gamma_1\epsilon_1 + \cdots + \gamma_{j-1}\epsilon_{j-1} + \gamma_{j+1}\epsilon_j + \cdots + \gamma_n\epsilon_{n-1}$ とおくと

$$\left(V_k^{(n)}\right)_\gamma = \iota_j^\epsilon\left(V_k^{(n-1)}\right)_{\gamma'}$$

(2) $\gamma = 0$ のとき、

$$\begin{aligned}\left(V_k^{(n)}\right)_0 =& (q^{-(2k-1)/2}e_{+-} + (-)^k q^{(2k-1)/2}e_{-+}) \otimes \left(V_{k-1}^{(n-1)}\right)_0 \\ &\oplus (q^{(2k+3)/2}e_{+-} + (-)^{k+1}q^{-(2k+3)/2}e_{-+}) \otimes \left(V_{k+1}^{(n-1)}\right)_0\end{aligned}$$

但し、$V_{-1}^{(n)} = V_0^{(n)}, V_k^{(n)} = \{0\}$ ($k \notin \{-1, 0, \cdots, n\}$) と解釈する。

さらに、(b) より $\rho_k(x)$ を決定する為には 次の補題があれば十分である。

補題

(1) $P_j^{(n)}(q^{H_0} \otimes X_0^+)P_k^{(n)} = 0, \quad P_j^{(n)}(X_0^+ \otimes q^{-H_0})P_k^{(n)} = 0 \qquad (j \neq k, k \pm 2)$

(2) $P_{k-2}^{(n)}(q^{H_0} \otimes X_0^+)P_k^{(n)} = -q^{4k-2}P_{k-2}^{(n)}(X_0^+ \otimes q^{-H_0})P_k^{(n)}$

$P_{k+2}^{(n)}(q^{H_0} \otimes X_0^+)P_k^{(n)} = -q^{-(4k+6)}P_{k+2}^{(n)}(X_0^+ \otimes q^{-H_0})P_k^{(n)}$

(3) $P_k^{(n)}(q^{H_0} \otimes X_0^+)P_k^{(n)} = P_k^{(n)}(X_0^+ \otimes q^{-H_0})P_k^{(n)}$

但し、$P_{-1}^{(n)} = P_0^{(n)}, P_k^{(n)} = 0$ ($k \notin \{-1, 0, \cdots, n\}$) である。

§5. B 型の R–matrix

B 型の Quantum R–matrix を書き下すことにしよう。$R(x)$ は $\mathrm{End}_{\mathbf{C}}(V_{\mathrm{sp}}^{(n)} \otimes V_{\mathrm{sp}}^{(n)})$ の元であるから $2^{2n} \times 2^{2n}$ 行列となるが、次の部分空間で不変である。

$$W_\gamma^{(n)} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbf{C} \text{ span of } \{e_\alpha \otimes e_\beta \mid \alpha + \beta = \gamma \in \{0, \pm 1\}^n\}$$

$|\gamma| = |\gamma_1| + \cdots + |\gamma_n|$ とおくと、$|\gamma| = n - k$ のとき

$$\begin{array}{ccc} W_\gamma^{(n)} & \simeq & (\mathbf{C}^2)^{\otimes k} \\ e_\alpha \otimes e_\beta & \mapsto & e_{\alpha_{j_1}} \otimes \cdots e_{\alpha_{j_k}} \end{array}$$

ここで、$j_1, \cdots, j_k$ は $\{j_1, \cdots, j_k\} = \{j \mid \gamma_j = 0\}$ $(j_1 < \cdots < j_k)$ から定める。

$R(x)$ の $W_\gamma^{(n)}$–block は 次のように与えられる。

$$\prod_{j=k+1}^{n} \frac{q^{2j-1} - xq^{-2j+1}}{q^{2j-1} - q^{-2j+1}} \overline{R}_k(x)$$

$$\overline{R}_k(x) = \sum_{j=0}^{k} \rho_j^{(k)}(x)\, Q_j^{(k)}$$

$$\rho_0^{(k)}(x) = \prod_{i=1}^{k} \frac{q^{2i-1} - xq^{-2i+1}}{q^{2i-1} - q^{-2i+1}}$$

$$\frac{\rho_j^{(k)}(x)}{\rho_0^{(k)}(x)} = \prod_{i=j,j-2,\cdots,2 \text{ or } 1} \frac{xq^{2i-1} - q^{-2i+1}}{q^{2i-1} - xq^{-2i+1}}$$

$$Q_j^{(k)} = u(-2j+1) \otimes Q_{j-1}^{(k-1)} + u(2j+3) \otimes Q_{j+1}^{(k-1)}$$

$$\left(Q_{-1}^{(k)} = Q_0^{(k)},\ Q_j^{(k)} = 0\ (j > k)\right)$$

$$u(j) = \frac{1}{q^j + q^{-j}} \begin{array}{c} \\ e_+ \\ e_- \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} e_+ & e_- \end{array} \\ \begin{pmatrix} q^j & (-)^{\frac{j-1}{2}} \\ (-)^{\frac{j-1}{2}} & q^{-j} \end{pmatrix} \end{array} \in \mathrm{End}_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}^2)$$

$\overline{R}_k(x)$ を $k = 1, 2$ で書き下してみると 次のようになる。行列の足は k=1 のとき e_+, e_-, $k = 2$ のとき $e_+ \otimes e_+, e_+ \otimes e_-, e_- \otimes e_+, e_- \otimes e_-$ の順になっている。

$$\overline{R}_1(x) = \frac{1}{q - q^{-1}} \begin{bmatrix} q - q^{-1} & 1 - x \\ 1 - x & x(q - q^{-1}) \end{bmatrix}$$

$$\overline{R}_2(x) = \frac{1}{q^3 - q^{-3}} [A \quad B]$$

$$A = \begin{bmatrix} (q^3+q^{-1}) - x(q^{-3}+q^{-1}) & -(1-x) \\ -(1-x) & (q^3+q) - x(q^{-3}+q) \\ q^2(1-x) & \frac{(1-x)(q^2-q^{-2}x)}{q-q^{-1}} \\ \frac{(1-x)(q^2-q^{-2}x)}{q-q^{-1}} & q^{-2}x(1-x) \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} q^2(1-x) & \frac{(1-x)(q^2-q^{-2}x)}{q-q^{-1}} \\ \frac{(1-x)(q^2-q^{-2}x)}{q-q^{-1}} & q^{-2}x(1-x) \\ x(q^3+q^{-1}) - x^2(q^{-3}+q^{-1}) & -x(1-x) \\ -x(1-x) & x(q^3+q) - x^2(q^{-3}+q) \end{bmatrix}$$

§6. D 型の R–matrix

D 型の場合は、スピン表現が 2 つある。それぞれの表現空間は、

$$V_{\mathrm{sp}}^{(n)} = \mathbf{C} \text{ span of } \{e_\alpha \mid \alpha_1 \cdots \alpha_n = 2^{-n}\}$$
$$\overline{V}_{\mathrm{sp}}^{(n)} = \mathbf{C} \text{ span of } \{e_\alpha \mid \alpha_1 \cdots \alpha_n = -2^{-n}\}$$

となっている。これに伴って、R–matrix も (I) $R(x) \in \mathrm{End}_{\mathbf{C}}(V_{\mathrm{sp}}^{(n)} \otimes V_{\mathrm{sp}}^{(n)})$ と (II) $R(x) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(V_{\mathrm{sp}}^{(n)} \otimes \overline{V}_{\mathrm{sp}}^{(n)}, \overline{V}_{\mathrm{sp}}^{(n)} \otimes V_{\mathrm{sp}}^{(n)})$ の 2 種類を考えることができる。まず、記号を整理する。D 型の場合 $W_\gamma^{(n)}$ を次のように定義する。

$$W_\gamma^{(n)} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbf{C} \text{ span of } \{e_\alpha \otimes e_\beta \mid \alpha + \beta = \gamma,\ e_\alpha \otimes e_\beta \in V_{\mathrm{sp}}^{(n)} \otimes V_{\mathrm{sp}}^{(n)}\ (I),\ V_{\mathrm{sp}}^{(n)} \otimes \overline{V}_{\mathrm{sp}}^{(n)}\ (II)\}$$

$|\gamma| = n - k$ のとき、

$$\begin{array}{ccc} W_\gamma^{(n)} & \simeq & (\mathbf{C}^2)^{\otimes(k-1)} \\ e_\alpha \otimes e_\beta & \mapsto & e_{\alpha_{j_1}} \otimes \cdots \otimes e_{\alpha_{j_{k-1}}} \end{array}$$

但し、$j_1, \cdots, j_k$ の決め方は B 型の場合と全く同じである。projection p^ϵ $(\epsilon = \pm 1)$ を次のように定める。

$$\begin{array}{ccc} (\mathbf{C}^2)^{\otimes k} & \xrightarrow{p^\epsilon} & (\mathbf{C}^2)^{\otimes(k-1)} \\ e_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes e_{\alpha_k} & \mapsto & \delta_{\epsilon, 2^k \alpha_1 \cdots \alpha_k} e_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes e_{\alpha_{k-1}} \end{array}$$

D 型の場合も、$R(x)$ は block に分かれている。γ を固定し $|\gamma| = n - k$ とおこう。$R(x)$ の $W_\gamma^{(n)}$–block は、

(I) のとき (k は偶数となる)、

$$\prod_{j=\frac{k}{2}+1}^{[\frac{n}{2}]} \frac{q^{4j-2} - xq^{-4j+2}}{q^{4j-2} - q^{-4j+2}} \overline{R}_k(x)$$

$$\overline{R}_k(x) = \sum_{\substack{j=0 \\ j\equiv 0\,(2)}}^{k} \rho_j^{(k)}(x)\bigl(p^+ \circ Q_j^{(k)} \circ p^+\bigr)$$

(II) のとき (k は奇数となる)、

$$\prod_{j=\frac{k+1}{2}+1}^{[\frac{n-1}{2}]} \frac{q^{4j} - xq^{-4j}}{q^{4j} - q^{-4j}} \overline{R}_k(x)$$

$$\overline{R}_k(x) = \sum_{\substack{j=1 \\ j\equiv 1\,(2)}}^{k} \rho_j^{(k)}(x)\bigl(p^- \circ Q_j^{(k)} \circ p^+\bigr)$$

ここで、[ ] は ガウス記号であり、$\rho_j^{(k)}(x)$ や $Q_j^{(k)}$ は (I),(II) で共通に次のように定義されている。

$$\rho_0^{(k)}(x) = \prod_{i=1}^{[\frac{k}{2}]} \frac{q^{4i-2} - xq^{-4i+2}}{q^{4i-2} - q^{-4i+2}}$$

$$\rho_1^{(k)}(x) = \prod_{i=1}^{[\frac{k-1}{2}]} \frac{q^{4i} - xq^{-4i}}{q^{4i} - q^{-4i}}$$

$$\frac{\rho_j^{(k)}(x)}{\rho_{j-2}^{(k)}(x)} = \frac{xq^{2j-2} - xq^{-2j+2}}{q^{2j-2} - xq^{-2j+2}}$$

$$Q_j^{(k)} = u(-2j+2) \otimes Q_{j-1}^{(k-1)} + u(2j+2) \otimes Q_{j+1}^{(k-1)} \qquad (0 < j \le k)$$

$$Q_0^{(k)} = p^+ \circ \bigl(u(2) \otimes Q_1^{(k-1)}\bigr) \circ p^+ + p^- \circ \bigl(u(2) \otimes Q_1^{(k-1)}\bigr) \circ p^-$$

$$\Bigl(Q_j^{(k)} = 0 \ (j > k)\Bigr)$$

$$u(j) = \frac{1}{q^j + q^{-j}} \begin{pmatrix} q^j & (-)^{\frac{j}{2}+\theta(j)} \\ (-)^{\frac{j}{2}+\theta(j)} & q^{-j} \end{pmatrix} \qquad (j \neq 0)$$

$$u(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

但し、$\theta(j) = 1 \ (j > 0),\ 0 \ (j < 0)$.

$\overline{R}_k(x)$ を、$k = 2, 3, 4$ で書き下してみよう。行列の足の順は B 型の時と同様。

$$\overline{R}_2(x) = \frac{1}{q^2 - q^{-2}} \begin{bmatrix} q^2 - q^{-2} & 1 - x \\ 1 - x & x(q^2 - q^{-2}) \end{bmatrix}$$

$$\overline{R}_3(x) = \frac{1}{q^4 - q^{-4}} \begin{bmatrix} 1 - q^{-4} & -(q^2 - q^{-2}) & q^4 - 1 & q^2 - q^{-2}x \\ -(q^2 - q^{-2}) & q^4 - 1 & q^2 - q^{-2}x & x(1 - q^{-4}) \\ q^4 - 1 & q^2 - q^{-2}x & x(1 - q^{-4}) & -x(q^2 - q^{-2}) \\ q^2 - q^{-2}x & x(1 - q^{-4}) & -x(q^2 - q^{-2}) & x(q^4 - 1) \end{bmatrix}$$

$$\overline{R}_4(x) = \frac{1}{q^6 - q^{-6}} \begin{bmatrix} A & B \\ B & xA \end{bmatrix}$$

$$A =$$

$$\begin{bmatrix} q^6 - q^{-6} & q^{-4}(1 - x) & -q^{-2}(1 - x) & 1 - x \\ q^{-4}(1 - x) & (q^2 - q^{-2})(q^4 + 1 + q^{-4}x) & 1 - x & -q^2(1 - x) \\ -q^{-2}(1 - x) & 1 - x & (q^2 - q^{-2})(q^4 + x(1 + q^{-4})) & q^4(1 - x) \\ 1 - x & -q^2(1 - x) & q^4(1 - x) & x(q^6 - q^{-6}) \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 - x & -q^2(1 - x) & q^4(1 - x) & \frac{(1-x)(q^4 - q^{-4}x)}{q^2 - q^{-2}} \\ -q^2(1 - x) & q^4(1 - x) & \frac{(1-x)(q^4 - q^{-4}x)}{q^2 - q^{-2}} & q^{-4}x(1 - x) \\ q^4(1 - x) & \frac{(1-x)(q^4 - q^{-4}x)}{q^2 - q^{-2}} & q^{-4}x(1 - x) & -q^{-2}x(1 - x) \\ \frac{(1-x)(q^4 - q^{-4}x)}{q^2 - q^{-2}} & q^{-4}x(1 - x) & -q^{-2}x(1 - x) & x(1 - x) \end{bmatrix}$$

§7. おわりに

スピン表現の R–matrix に関連するこれからの課題をいくつか述べて本稿を終えることにする。

(1) 1 点関数を求める。

Quantum R–matrix は 2 次元の可解な vertex model を定義している。これの 1 点関数を計算する。$X_n = A_n, B_n, C_n, D_n$, $\pi =$ 自然表現の場合は 対応するアフィン・リー環の string function(C 型の時は ちょっと異なる) が 現れたが [9]、スピン表現の場合も同様のことが期待される。

(2) fusion procedure を実行する。

A 型では 自然表現の R–matrix を積み上げて 一般の表現の R–matrix を構成している ([4]、より一般の場合に [10])。B 型、D 型のときも可能なはずである。

(3) face model を構成する。

可解模型では、vertex model と並んで face model もおもしろい。スピン表現の face model も是非とも構成したいものである。自然表現の face model については [11]。

他にも centralizer algebra、リンクの不変量、共形場理論との関係 etc。

最後になったが、$q = 1$ のときの R–matrix が Reshetikhin[12] によって既に求められていることを付け加えておく。

文献

[1] V.G.Drinfeld, Quantum Groups, ICM Proceedings, Berkeley, 1986, pp.798-820.

[2] M.Jimbo, Commun.Math.Phys. **102** (1986) 537.

[3] V.V.Bazhanov, Phys.Lett. **B159** (1985) 321.

[4] P.P.Kulish, N.Yu.Reshetikhin and E.K.Sklyanin, Lett.Math.Phys. **5** (1981) 393.

[5] M.Okado, in preparation.

[6] A.Kuniba, "Quantum R matrix for G_2 and a solvable 173 vertex model,"preprint RIMS-664, 1989.

[7] N.Yu.Reshetikhin, "Quantized universal enveloping algebras, the Yang–Baxter equation and invariants of links I,"preprint LOMI E-4-87, 1988.

[8] G. Lusztig, Adv.Math. **70** (1988) 237.
M. Rosso, Commun.Math.Phys. **117** (1988) 581.

[9] E.Date, M.Jimbo, A.Kuniba,T.Miwa and M.Okado, Lett.Math.Phys. **17** (1989) 69.

[10] I.V.Cherednik, Sov.Math.Dokl. **33** (1986) 507.

[11] M.Jimbo, T.Miwa and M.Okado, Commun.Math.Phys. **116** (1988) 507.

[12] N.Yu.Reshetikhin, Seminar report of Leningrad branch of Steklov Math. Inst. **169** (1988) (in Russian).