ユニタリ表現論セミナー報告集 IX, 1989
pp.13-24

A, B, C, D型 の $U_q(\mathfrak{g})$ の PBW-Th について

阪大理 山根 宏之

Introduction. $\mathfrak{g}$ を $\mathbb{C}$ 上の simple Lie algebra. $U(\mathfrak{g})$ を universal enveloping algebra $U_q(\mathfrak{g})$ ($q \in \mathbb{C}^{\times}$) をその q-analogue quantized universal enveloping algebra とする $U_q(\mathfrak{g})$ についてはすでに Lusztig [L1] が PBW-型の basis をもつ事を示している。しかし Lusztig の basis はあくまで generators (root vectors の q-analogue 達) の間にある特別な total order を指定してやって積をとる時は常にその順序でとらなければならない (Lusztig 以外の人がやった PBW-定理も
みんなある種の total order がいる様である [R], [KR]). この講演の最初の定理は $\mathfrak{g}$ が A, B, C, D型のときには どんな total order の下でも PBW-型の basis になっている generators を与える事である. もう少し詳しく述べると Lusztig の generators の定義をを少し modify してやってその様な generators を得る事で出来. さらに統一的な 6重の degree で filtration が定義でき. gr$(U_q(\mathfrak{g}))$

をとれば それは (q-)symmetric algebra になっている。このことから $U_q(\mathfrak{g})$ ($q\in\mathbb{C}^\times$) が零因子をもたない左(右)ネター環である事がいえる

qを不定元, $\mathcal{A}=\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$, $U_\mathcal{A}$ を Lusztig が与えた "Kostant $\mathcal{A}$-form" とする $U_\mathcal{A}$ についてもこのレポートで与えられた generators で PBW-型の $\mathcal{A}$-basis がとれる。しかもこのときも total order は任意のものでよい。

$\phi_l\in\mathcal{A}$ を l 次円分多項式とする $\mathcal{B}=\mathcal{A}/(\phi_l)$ ($=\mathbb{Z}[\zeta_l]$), $\mathbb{B}$ ($=\mathbb{Q}(\zeta_l)$) を $\mathcal{B}$ の商体とする。$u_\mathcal{B}$ (resp. $u_\mathbb{B}$) を $U_\mathcal{A}$ から得られる有限次元 Hopf $\mathcal{B}$ (resp. $\mathbb{B}$)-algebra とする (see Lusztig [ ]) このとき $u_\mathcal{B}$ は $u_\mathbb{B}$ の lattice になっている。$u_\mathcal{B}, u_\mathbb{B}$ についても上の generators で PBW-型の basis が与えられ、その積の順序は自由に選べる

F を標数 $p>0$ の体, G を $\mathfrak{g}$ に対応する F 上の代数群 $\tilde{G}$ を G の covering とする。$U_\mathbb{Z}$ を $U(\mathfrak{g})$ の Kostant $\mathbb{Z}$-form とする
(これは $\mathbb{C}$ 上で考える)
u_F を $U_\mathbb{Z}\otimes_\mathbb{Z} F$ から得られる "restricted enveloping algebra" とする。simple u_F-modules は同値類は全部で p^N コである事が知られていて、さらに $\tilde{G}$ の既約有理加群, G の既約射影加群の構造が入る 逆に全ての $\tilde{G}$ の既約有理加群, G の既約有理射影加群はこれらを $\tilde{G}, G$ の automorphism でひねってテンソル積をとって得られる事が知られている (Steinberg の定理) ところがこの

テンソル積

この modules の次元など本質的な事で分っていない事も残っている.

$l=p$ (素数) $\tilde{u}_{\mathcal{B}} = u_{\mathcal{B}}/(K_i^p-1)$, $\tilde{u}_{\mathbb{B}} = u_{\mathbb{B}}/(K_i^p-1)$ とおく. $\tilde{u}_{\mathcal{B}}$ は free $\mathcal{B}$-module で $\tilde{u}_{\mathbb{B}}$ の lattice になっている. $\tilde{u}_{\mathbb{B}}$ の simple modules の同値類も全部で p^N 個である事が知られている.
$0 \to m \to \mathcal{B} \to \mathbb{F}_p \to 0$ (exact) とすると $\tilde{u}_{\mathcal{B}}/m\tilde{u}_{\mathcal{B}} = u_{\mathbb{F}_p}$ となっている. 従って $\tilde{u}_{\mathbb{B}}$-module を reduction して $u_{\mathbb{F}_p}$-module が得られる. そこで Lusztig は「simple-$\tilde{u}_{\mathbb{B}}$-module を reduction すれば simple $u_{\mathbb{F}_p}$-module になる」という予想を提出した

§1. $U_q(A)$ の定義と諸結果

ここで $U_q(A)$ を通常のものと q^2 を q, K_i^2 を K_i にとりかえて定義する. F を体

$A=(a_{ij})_{1\le i,j\le N}$ を Cartan 行列, $D = \begin{bmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_N \end{bmatrix}$, $d_i \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ を $DA = {}^t(DA)$ となるものとする. $q \in F^\times$ を $q^{2d_i}-1 \in F^\times$ であるものとする. このとき ass. F-alg $U_q = U_q(A) \ni 1$ を $\{e_i, f_i, k_i^{\pm 1} \mid (1\le i\le N)\}$ で生成され relation は次の (1.1)–(1.5) で与えられるものとする

$$k_i k_i^{-1} = k_i^{-1} k_i = 1 \qquad k_i k_j = k_j k_i \tag{1.1}$$

$$k_i e_j k_i^{-1} = q^{d_i a_{ij}}, \quad k_i f_j k_i^{-1} = q^{-d_i a_{ij}} \tag{1.2}$$

$$[e_i, f_j] = \delta_{ij} \frac{k_i - k_i^{-1}}{q - q^{-1}} \qquad (1.3)$$

$$\sum_{\nu=0}^{1-a_{ij}} (-1)^\nu \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ \nu \end{bmatrix}_{d_i} e_i^\nu e_j e_i^{1-a_{ij}-\nu} = 0 \qquad (i \neq j) \qquad (1.4)$$

$$\sum_{\nu=0}^{1-a_{ij}} (-1)^\nu \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ \nu \end{bmatrix}_{d_i} f_i^\nu f_j f_i^{1-a_{ij}-\nu} = 0 \qquad (i \neq j) \qquad (1.5)$$

ここで $m \geq n \geq 0$ に対して $\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}_t \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ を

$$[m]!_d = \prod_{h=1}^{m} \frac{q^{dh} - q^{-dh}}{q^d - q^{-d}} \qquad \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}_t = \frac{[m]!_d}{[m-n]!_d [n]_d!}$$

で定義する.

Prop. 1.1 (3角分割) (Y— [Y])

$$U_q(A) \cong U_q^- \otimes_F U_q^0 \otimes_F U_q^+ \quad (F\text{-vector sp. として同型})$$

ここで

$$U_q^0 = F[k_1^{\pm 1}, \cdots, k_N^{\pm 1}]$$

$U_q^- = \langle f_i, 1 \mid$ relation は (1.5) のみ $\rangle$

$U_q^+ = \langle e_i, 1 \mid$ relation は (1.4) のみ $\rangle$

□

Drinfeld の定義した $\mathbb{C}[[h]]$ 上の h-adic な $U_h(\mathfrak{g})$ については topologically free である事が分っている (谷崎 [ ])
このことから我々が今扱っている神保の $U_q(\mathfrak{g})$ は q が不定元ならば $U_q(\mathfrak{g})$ は $U_h(\mathfrak{g})$ に dense にうめ込める事が分かる この事から次が分かる

Prop. 1.2

$(i_1, \ldots, i_N) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^N$ とする

$N^F_{i_1 \cdots i_N}(q) := \mathrm{Span}_F \{ e_{j_1} \cdots e_{j_\ell} \mid \# \{ j_r = a \} = i_a \ (1 \leq a \leq N) \} \subset U_q^+$

とおく。このとき q 上超越的ならば

$$\dim_{\mathbb{C}} N^{\mathbb{C}}_{i_1 \cdots i_N}(q) = \dim_{\mathbb{C}} N^{\mathbb{C}}_{i_1 \cdots i_N}(1)$$

ここで U_1^+ を $U(\mathfrak{g})$ の U^+ とする.

従って任意の $q \in F^\times$ に対しては

$$\dim_F N^F_{i_1 \cdots i_N}(q) \geqq \dim_{\mathbb{C}} N^{\mathbb{C}}_{i_1 \cdots i_N}(1)$$

□

<u>Remark</u>

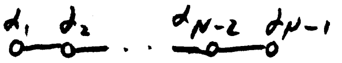
従って U_q^+ が "homogeneous" な (すなわち ある $N^F_{i_1 \cdots i_N}$ に入っている) PBW-型の元で張られている事を示せば Prop. 1.2 よりそれらは一次独立である事が分かる

§2. $A_{N-1}, B_N, C_N, D_{N+1}$ 型の U_q の PBW-Th

2.1. Fix $N \geq 1$. $A = A_{N-1}, B_N, C_N$, 又は D_{N+1} 型 のものとする

(Δ, E) をルート系 $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\} \subset \Delta$ を simple roots の集合とする Δ^+ を positive roots の集合とする

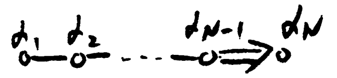
$\boxed{A_{N-1} \text{ 型}}$



$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix} \Big\updownarrow N-1 \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \Big\updownarrow N$$

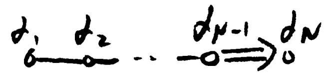
$$\Delta^+ = \{ \varepsilon_i - \varepsilon_j = \sum_{i \leq k < j} \alpha_k \ (1 \leq i < j \leq N) \}$$

$q + q^{-1} \in F^\times$ を仮定する

$\boxed{B_N\text{ 型}}$ 

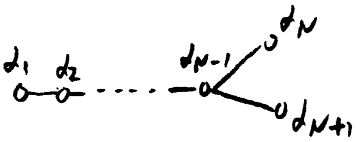
$$A=\begin{pmatrix}2&-1&&&\\-1&2&&&\\&&\ddots&&\\&&&2&-1\\&&&-2&2\end{pmatrix}\begin{matrix}\uparrow\\N\\\downarrow\end{matrix}\quad D=\begin{pmatrix}1&&&\\&\ddots&&\\&&1&\\&&&\frac{1}{2}\end{pmatrix},\quad \Delta^+=\left\{\begin{array}{ll}\varepsilon_i-\varepsilon_j=\sum\limits_{i\le k<j}\alpha_k & (1\le i<j\le N)\\ \varepsilon_i=\sum\limits_{i\le k\le N}\alpha_k & (1\le i\le N)\\ \varepsilon_i+\varepsilon_j=\sum\limits_{i\le k<j}\alpha_k+2\sum\limits_{j\le k\le N}\alpha_k & (1\le i<j\le N)\end{array}\right\}$$

$q+q^{-1}$, $q+1+q^{-1}\in F^\times$ を仮定する

$\boxed{C_N\text{ 型}}$ 

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&&&\\-1&2&&&\\&&\ddots&&\\&&&2&-2\\&&&-1&2\end{pmatrix}\begin{matrix}\uparrow\\N\\\downarrow\end{matrix},\quad D=\begin{pmatrix}1&&&\\&\ddots&&\\&&1&\\&&&2\end{pmatrix},\quad \Delta^+=\left\{\begin{array}{ll}\varepsilon_i-\varepsilon_j=\sum\limits_{i\le k<j}\alpha_k & (1\le i<j\le N)\\ \varepsilon_i+\varepsilon_j=\sum\limits_{i\le k<j}\alpha_k+2\sum\limits_{j\le k<N}\alpha_k+\alpha_N & (1\le i<j\le N)\\ 2\varepsilon_i=2\sum\limits_{i\le k<N}\alpha_k+\alpha_N & (1\le i\le N)\end{array}\right\}$$

$q+q^{-1}$, q^2+1+q^{-2}, $q^2+q^{-2}\in F^\times$ とする

$\boxed{D_{N+1}\text{ 型}}$ 

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&&&\\-1&2&&&\\&&\ddots&&\\&&&2&-2\\&&&-1&2\end{pmatrix}\begin{matrix}\uparrow\\N+1\\\downarrow\end{matrix}\quad D=\begin{pmatrix}1&&\\&\ddots&\\&&1\end{pmatrix},\quad \Delta^+=\left\{\begin{array}{ll}\varepsilon_i-\varepsilon_j=\sum\limits_{i\le k<j}\alpha_k & (1\le i<j\le N+1)\\ \varepsilon_i+\varepsilon_{N+1}=\sum\limits_{i\le k\le N-1}\alpha_k+\alpha_{N+1} & (1\le i<N+1)\\ \varepsilon_i+\varepsilon_j=\sum\limits_{i\le k<j}\alpha_k+2\sum\limits_{j\le k<N}\alpha_k+\alpha_N+\alpha_{N+1} & (1\le i<j\le N)\end{array}\right\}$$

$q+q^{-1}\in F^\times$ とする

従って

$$\Delta^+=\Delta_1\cup\Delta_2\cup\Delta_3\cup\Delta_4\cup\Delta_5 \quad (\text{disjoint union}) \text{ とできる}$$

Δ_5: C_N 型だけ

ここで $\Delta_1=\{\varepsilon_i-\varepsilon_j=\sum\limits_{i\le k<j}\alpha_k \quad (1\le i<j\le N)\}$

$$\Delta_2=\begin{cases}\phi & (A_N)\\ \{\alpha_N\} & (B_N,\ C_N)\\ \{\alpha_N,\alpha_{N+1}\} & (D_N)\end{cases}$$

$$\Delta_3=\left\{\begin{array}{l}\varepsilon_i'(c_N,c_{N+1})\\(1\le i\le N-1)\end{array}\;\middle|\;\sum_{i\le k\le N-1}\alpha_k+c_N\alpha_N+c_{N+1}\alpha_{N+1}\ \begin{array}{c}\uparrow\\\Delta^+\end{array}\quad \left(\begin{array}{l}B_N,\ C_N\text{ 型のときは}\\ c_{N+1}=0\end{array}\right)\right\}$$

$\Delta_4 = \{ \varepsilon_i + \varepsilon_j = \sum_{i \le k < j} \alpha_k + 2 \sum_{j \le k < N} \alpha_k + c_N \alpha_N + c_{N+1} \alpha_{N+1} \}$
$(1 \le i < j \le N-1)$

$\Delta_5 = \{ 2\varepsilon_i = \sum_{i \le k < N} \alpha_k + \alpha_N \}$
(C_N型だけ) $(1 \le i \le N-1)$

$\alpha \in \Delta^+$ を固定する。このとき $\alpha = \sum c_i \alpha_i$ とかける。

$g(\alpha) = \min\{ i \mid c_i \neq 0 \}$　　$u(\alpha) = \#\{ 1 \le i \le N-1 \mid c_i = 2 \}$

$\alpha \in \Delta^+$　$\alpha_i \in \Pi$ に対して $R(\alpha, \alpha_i) = (\mathbb{Z}\alpha + \mathbb{Z}\alpha_i) \cap \Delta_+$ とおく

このとき e_β $(\beta \in \Delta^+)$ $\in U_q^+$ を次によって定義する（$e_{\alpha_i} = e_i$ とおく）

Definition 2.1. $i < g(\alpha)$ と仮定する　（$[x, y] = xy - q yx$ とおく）

(i) $R(\alpha, \alpha_i) = \{ \alpha, \alpha + \alpha_i, \alpha_i \}$ のとき

(ア) $u(\alpha) = 0$ のとき $e_{\alpha+\alpha_i} = [e_\alpha, e_{\alpha_i}]_q$

(イ) $u(\alpha) > 0$ のとき $e_{\alpha+\alpha_i} = [e_{\alpha_i}, e_\alpha]_q$ とおく

（注 (イ)のときも q と q^{-1} をかえないのが Lusztig の定義）

(ii) $R(\alpha, \alpha_i) = \{ \alpha, \alpha+\alpha_i, \alpha+2\alpha_i, \alpha_i \}$ のとき（これは B_N 型のときのみおこる しかもこのとき $i = N$）

$e_{\alpha+\alpha_i} = [e_\alpha, e_{\alpha_i}]_q$,　$e_{\alpha+2\alpha_i} = [e_{\alpha+\alpha_i}, e_{\alpha_i}]$ とおく

(iii) $R(\alpha, \alpha_i) = \{ \alpha, \alpha+\alpha_i, 2\alpha+\alpha_i, \alpha_i \}$ のとき（これは C_N 型のときのみおこる しかもこのとき $i = N$）

$e_{\alpha+\alpha_i} = [e_\alpha, e_{\alpha_i}]_{q^2}$,　$e_{2\alpha+\alpha_i} = [e_{\alpha+\alpha_i}, e_{\alpha_i}]$ とおく

(i) の(イ) だけ Lusztig と違うので彼の generators に対して成り立っていた条件が 今の e_α についてもある程度なり立つ

Lemma 2.2

$\alpha \in \Delta^+$　$\alpha_i \in \Pi$　$i < g(\alpha)$　$R(\alpha, \alpha_i) = \{\alpha, \alpha_i\}$ とする（$e_{\alpha_i} = e_i$ とおく）

$$[e_\alpha, e_{\alpha_i}] = \begin{cases} (q^{-1} - q)\, e_{\varepsilon_j - \varepsilon_N} \cdot e_{\varepsilon_i + \varepsilon_{N-1}} \\ \quad \left(\begin{array}{l} i = N-1,\ u(\alpha) > 0 \text{ のとき} \\ \text{このとき } \alpha_i = \alpha_{N-1} = \varepsilon_{N-1} - \varepsilon_N,\ \alpha = \varepsilon_i + \varepsilon_j\ (1 \le i < j \le N-2) \text{ である} \end{array} \right) \\ 0 \quad (\text{otherwise}) \end{cases}$$

（注・Lusztig のときは常に 0 になる）

□

ところが

$\alpha = \varepsilon_i + \varepsilon_k$, $\beta = \varepsilon_j - \varepsilon_k$, $1 \le i < j \le k \le N$ のとき

$$e_{\alpha+\beta} = \begin{cases} [e_\alpha, e_\beta]_q & (k = N) \\ [e_\beta, e_\alpha]_q & (k \neq N) \end{cases}$$

なのであるが Lusztig の場合には $(q\text{-})$ bracket で書けない。ここが Lusztig の generators の一番いやらしい所の様である

2.2　A_{N-1} 型のときの復習（see [Y]）

今から B_N, C_N, D_{N+1} 型の U_q^+ に filter を入れてやりたいのだがそれは A_{N-1} 型において定義した filter のより性質を徹底的に利用して行なわれる

この §2.2 では U_q^+ を A_{N-1} 型のものとする

e_α ($\alpha = \varepsilon_i - \varepsilon_j \in \Delta^+$ $(1 \le i < j \le N)$) に対して次の $(q\text{-})$commutator relation が成り立ったのであった。

$$[e_{\varepsilon_i-\varepsilon_j}, e_{\varepsilon_i-\varepsilon_k}]_{q^{-1}} = [e_{\varepsilon_i-\varepsilon_k}, e_{\varepsilon_j-\varepsilon_k}]_{q^{-1}} = 0 \qquad (1\le i<j<k\le N)$$

$$[e_{\varepsilon_i-\varepsilon_l}, e_{\varepsilon_j-\varepsilon_k}] = [e_{\varepsilon_i-\varepsilon_j}, e_{\varepsilon_k-\varepsilon_l}] = 0 \qquad (1\le i<j<k<l\le N)$$

$$(*)\ [e_{\varepsilon_i-\varepsilon_k}, e_{\varepsilon_j-\varepsilon_l}] = (q^{-1}-q)\, e_{\varepsilon_i-\varepsilon_l} e_{\varepsilon_j-\varepsilon_k} \qquad (1\le i<j<k<l\le N)$$

$$(**)\ [e_{\varepsilon_i-\varepsilon_j}, e_{\varepsilon_j-\varepsilon_k}]_q = e_{\varepsilon_i-\varepsilon_k} \qquad (1\le i<j<k\le N)$$

$\deg_1 : \Delta^+ \to \mathbb{Z}_{\ge 0}$ を $\deg_1(\varepsilon_i-\varepsilon_j) = i(j-i)$ で定義する

e_α に $\deg_1(\alpha)$ で重みを入れる。このとき(*),(**)の左辺の重みと右辺の重みを較べてやると

(*)について

$$\{i(k-i)+j(l-j)\} - \{i(l-i)+j(k-j)\} = ik+jl-il-jk = (j-i)(l-k) > 0$$

(**)について

$$\{i(j-i)+j(k-j)\} - i(k-i) = ij+jk-j^2-ik = (j-i)(k-j) > 0$$

従って $\deg_1$ で U_q^+ の filtration が定義できている Prop. 1.2 より

Prop. 2.3 A_{N-1}型のとき

$\prod_{\alpha\in\Delta^+} e_\alpha^{n_\alpha}$ ($n_\alpha \ge 0$ 積の順序は任意) は U_q^+ の basis をなす □

2.3. $\alpha\in\Delta^+$ $\alpha = \sum c_i\alpha_i$ に対して $h(\alpha) = \sum c_i$

$\tilde{\alpha}, \tilde{\tilde{\alpha}} \in \Delta^+\cup\{0\}$ を $\tilde{\alpha} = \sum_{\substack{1\le i\le N-1\\ c_i\ne 0}} \alpha_i$ $\quad \tilde{\tilde{\alpha}} = \sum_{\substack{1\le i\le N-1\\ c_i=2}} \alpha_i$ とおく

$\tilde{\alpha}, \tilde{\tilde{\alpha}}$ は A_{N-1} 型の $\Delta^+(\cup\{0\})$ の元でもある

$\widehat{\tilde{\alpha}-\tilde{\tilde{\alpha}}}$

$\deg_i : \Delta^+ \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を次で定義する
($1 \leq i \leq 5$)

C_N型だけ

	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	Δ_5
$\deg_1$	$\deg_1(\alpha)$	1	$\deg_1(\tilde{\alpha})$	$\deg_1(\tilde{\alpha})+\deg_1(\tilde{\tilde{\alpha}})$	$2\deg_1(\tilde{\alpha})$
$\deg_2$	$h(\alpha)$	0	$h(\tilde{\alpha})$	$2h(\tilde{\tilde{\alpha}})$	$2h(\tilde{\alpha})$
$\deg_3$	0	0	0	$\deg_1(\tilde{\alpha}-\tilde{\tilde{\alpha}})$	0
$\deg_4$	0	0	$(c_N+c_{N+1})g(\alpha)$	0	$g(\alpha)$
$\deg_5$	$h(\alpha)$	0	0	0	0

5重 degree $\prod_{i=1}^{5}\deg_i : \Delta^+ \to (\mathbb{Z}_{\geq 0})^5$ の下で（$(\mathbb{Z}_{\geq 0})^5$ に辞書式順序を入れておく）で考えれば A_{N-1}型と同様にして次の事が分かる

Prop. 2.3

$\prod_{\alpha\in\Delta^+} e_\alpha^{n_\alpha}$ ($n_\alpha \geq 0$ 順序は任意) は U_q^+ の basis $\square$

$\deg_0 : \Delta^+ \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を $\deg_0(\alpha) = h(\alpha)$ で定義する.

$f_\alpha \in U_q^-$ も e_α ($\alpha \in \Delta^+$) と同様に定義する.

U_q の上に 6重degree d を f_α, e_α に対しては $(\prod_{i=0}^{5}\deg_i)(\alpha)$

$k_i^{\pm}$ に対しては $(0,0,0,0,0,0)$ で定義する

Theorem 2.4.

(i) $\prod_{\beta\in\Delta^+} f_\beta^{m_\beta} \cdot \prod_{i=1}^{N} k_i^{r_i} \cdot \prod_{\alpha\in\Delta^+} e_\alpha^{n_\alpha}$ は U_q の basis

iii) 6重 degree で filter を定義してやれば $gr(U_q)$ は
(q-)symmetric algebra となる. 従って U_q は零因子をもたないネター環

□

§3 Kostant A-form (see [L1] [L2])

q を不定元, $A = \mathbb{Z}[q^{\frac{1}{2}}, q^{-\frac{1}{2}}]$, U_q を $\mathbb{C}(q^{\frac{1}{2}})$ 上の algebra とする

$$e_i^{(n)} = \frac{e_i^n}{[n]!_{d_i}}, \quad f_i^{(n)} = \frac{1}{[n]!_{d_i}} \quad \begin{bmatrix} k_i\,;\,0 \\ t \end{bmatrix} = \prod_{s=1}^{t} \frac{k_i q^{d_i(1-s)} - k_i^{-1} q^{d_i(s-1)}}{q^{d_i s} - q^{-d_i s}}$$

$(t \geq 0)$

とおく

U_A を $\{e_i^{(n)}, f_i^{(n)}\ (n \geq 0)\ k_i^{\pm}\}$ で生成される U_q の A-subalg. とする. U_A をここでは Kostant A-form と呼ぶ

$\alpha \in \Delta^+$ に対して d_α を α がワイル群の下で $\alpha_i \in \Pi$ と共役
$\overset{\shortparallel}{\Sigma c_i\alpha_i}$
ならば $d_\alpha = d_i$ とおく さらに $e_\alpha^{(n)} \in U_q^+$ を

$$\mathfrak{e}_\alpha^{(n)} = \begin{cases} \dfrac{e_\alpha^{(n)}}{[n]_{d_\alpha} \cdot (q^s + q^{-s})^n} & \left(\begin{array}{l} B_N \text{型のとき } c_N = 2 \text{ ならば } s = \frac{1}{2} \\ C_N \text{型のとき } c_{g(i)} = 2 \text{ ならば } s = 1 \end{array}\right) \\ \dfrac{e_\alpha^{(n)}}{[n]_{d_\alpha}} & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

$f_\alpha^{(n)}$ も同様に定義する

Theorem 3.1

$$\prod_{\beta\in\Delta^+} f_\beta^{(m_\beta)} \cdot \prod_{i=1}^{N} k_i^{\delta_i} \begin{bmatrix} K_i ; 0 \\ t \end{bmatrix} \cdot \prod_{\alpha\in\Delta^+} e_\alpha^{(n_\alpha)}$$ は U_A の A-basis

(注 この場合 積のとり方は任意　ところが Lusztig の場合は任意ではない

□

後は u_B, U_B, $\tilde{u}_B$, $\tilde{U}_B$ の場合にも我々の generators $e_\alpha^{(n_\alpha)}$ $f_\alpha^{(n_\alpha)}$, $\begin{bmatrix} K_i ; 0 \\ t \end{bmatrix}$, k_i^{2l} で PBW-型の basis を構成する事ができる. しかもその時. 積のとり方は任意の total order の下でよい

参考文献

[L1] Lusztig Quantum groups at roots of 1

[L2] ——, Finite dimensional Hopf algebras arising from quantum groups

[R] ——, An analogue of P.B.W. Theorem and the Universal R-matrix for $U_h(sl(N+1))$

[TK] Takeuchi, The q-bracket product and the P-B-W theorem for quantum enveloping algebras of classical types (A_n), (B_n), (C_n) and (D_n)

[TN] Tanisaki, Harish Candra Isomorphisms for Quantum Algebras

[Y] Yamane, A Poincaré-Birkhoff-Witt theorem for quantized universal enveloping algebras of Type A_N