ユニタリ表現論セミナー報告集 IX, 1989
pp.1-12

$\mathcal{D}$-加群に於ける局所化定理

東北大理 齋藤 睦 (Mutsumi Saito)

§0. 序

代数的準射影多様体 X に代数的トーラス T が作用している という状況の下、T-同変な $\mathcal{D}_X$-加群の指標公式を目標にしつつ、或る種の同変グロタンディック群に於ける局所化定理を与える。有限性の条件としてはホロノミー性を採用する。これは、ホロノミー性が順像や逆像をとるという操作に対し、保存されるからである。考える同変グロタンディック群は、X＝T の時に局所化した後で自明になるべきだが、単にT-同変ホロノミー $\mathcal{D}_T$-加群のグロタンディック群を考えたのでは、この性質を充たさない。大きすぎるのである。そこで、関係式を増やす事にする。即ち、T-同変 $\mathcal{O}_X$-加群としての完全系列が在る時、関係があるという事にする。$\mathcal{D}$-加群を考えているにもかかわらず、その $\mathcal{D}$-加群構造を忘れてしまうというのは言語道断ではあるが、とりあえずう

まくいく。理由は、ホロノミー $\mathcal{D}$-加群に於いてその $\mathcal{O}$-加群構造がかなり多くの情報を含んでいるからである。最後に、X が正性条件を充たすという条件付きで指標を定義し、局所化定理を応用する。

§1. いろいろな定義

本稿では、全てが複素数体 $\mathbb{C}$ 上代数的に定義されているものとし、登場する多様体は全て準射影 (quasiprojective) とする。多様体 X に対し、$\mathcal{O}_X$ を X の構造層とし $\mathcal{D}_X$ を X 上の線型微分作用素の成す層とする。多様体間の射 $f: X \to Y$ に対し、$\mathbb{L}f^*$, $\int_f$ をそれぞれ両側有界な $\mathcal{D}$-加群複体の導来圏 $D^b(\mathcal{D})$ に於ける逆像関手と、順像関手とする。即ち、$\mathcal{M} \in D^b(\mathcal{D}_X)$, $\mathcal{N} \in D^b(\mathcal{D}_Y)$ に対し、導来圏の中で

$$\mathbb{L}f^*(\mathcal{N}) = \mathcal{O}_X \overset{\mathbb{L}}{\underset{f^{*}\mathcal{O}_Y}{\otimes}} \mathcal{N}$$

$$\int_f (\mathcal{M}) = \mathbb{R}f_*(\mathcal{D}_{Y \leftarrow X} \overset{\mathbb{L}}{\underset{\mathcal{D}_X}{\otimes}} \mathcal{M})$$

である。$\mathcal{D}$-加群に関する詳しい事は、例えば [Bo], [H], [O] を参照されたい。

次に、同変 (equivariant) $\mathcal{D}$-加群の定義をしたい。多様体 X 上に代数群 G が作用しているとし、$p, q: G \times X \to X$ をそれぞれ、射影と群作用を表わすものとする。

定義　G－同変$\mathcal{D}_X$－加群とは、$\mathcal{D}_X$－加群 $\mathcal{M}$ と $\mathcal{O}_G \boxtimes \mathcal{D}_X$－加群としての同型 $\alpha : q^*\mathcal{M} \xrightarrow{\sim} p^*\mathcal{M}$ との組の事で、さらにαは群作用の結合性（associativity）を表わすコサイクル条件を充たさなければならない。　（[Mu]参照。）

注意　$\mathcal{O}_G \boxtimes \mathcal{D}_X$－加群としての同型の代わりに、$\mathcal{D}_{G\times X}$－加群としての同型を考えれば、強同変といった概念になるが、我我の目的の為には上の定義の方が適している。

同様に、G－同変$\mathcal{D}_X$－加群複体とは、複体 $\mathcal{M} \in D^b(\mathcal{D}_X)$ と $D^b(\mathcal{O}_G \boxtimes \mathcal{D}_X)$ に於ける同型 $\alpha : q^*\mathcal{M} \xrightarrow{\sim} p^*\mathcal{M}$ との組で、同様のコサイクル条件を充たすものである。

G－同変$\mathcal{D}_X$－加群複体の圏を$D^b_G(\mathcal{D}_X)$，G－同変$\mathcal{O}_X$－加群複体の圏を$D^b_G(\mathcal{O}_X)$と書くことにする。

§2．いろいろな関手

$\mathcal{D}$－加群の逆像は、$\mathcal{O}$－加群としての逆像であるから、

補題1　$f : X \longrightarrow Y$ を滑らかなG－多様体の圏の射とする。この時、関手

$$\mathbb{L}f^* : D^b_G(\mathcal{D}_Y) \longrightarrow D^b_G(\mathcal{D}_X),$$
$$\mathbb{L}f^* : D^b_G(\mathcal{O}_Y) \longrightarrow D^b_G(\mathcal{O}_X)$$

が存在し、両者は、忘却関手を通して両立する。

$f^!\mathcal{M}$ を $\mathbb{L}f^*\mathcal{M}[\dim X - \dim Y]$ で定義すれば、当然、全く上と同様の主張が云える。

<u>補題2</u> $f: X \to Y$ を滑らかな G－多様体の間の射とする。この時、もし複体 $\mathcal{M} \in D^b(\mathcal{D}_X)$ が G－同変であれば、$\int_f \mathcal{M}$ もまた G－同変である。

<u>説明</u> 複体 $\mathcal{N} \in D^b(\mathcal{O}_G \boxtimes \mathcal{D}_X)$ に対し、

$$\int_{1\times f} \mathcal{N} := \mathbb{R}(1\times f)_*(\mathcal{O}_G \boxtimes \mathcal{D}_{Y\leftarrow X} \overset{\mathbb{L}}{\underset{\mathcal{O}_G\boxtimes\mathcal{D}_X}{\otimes}} \mathcal{N})$$

と定義すれば、これは $\int_{1\times f} : D^b(\mathcal{D}_{G\times X}) \longrightarrow D^b(\mathcal{D}_{G\times Y})$ と両立する。一方、仮定から $D^b(\mathcal{O}_G \boxtimes \mathcal{D}_X)$ の中での同型 $\alpha : q_X^* \mathcal{M} \xrightarrow{\sim} p_X^* \mathcal{M}$ が在るが、これは $D^b(\mathcal{O}_G \boxtimes \mathcal{D}_Y)$ の中での同型 $\int_{1\times f} \alpha : \int_{1\times f} q_X^* \mathcal{M} \xrightarrow{\sim} \int_{1\times f} p_X^* \mathcal{M}$ を導く。さらに、底空間変換定理から $\int_{1\times f} p_X^* \mathcal{M} \simeq p_Y^* \int_f \mathcal{M}$ 及び $\int_{1\times f} q_X^* \mathcal{M} \simeq q_Y^* \int_f \mathcal{M}$ であるから、結局、$\int_f \mathcal{M}$ もまた G－同変である。

多様体 X の閉部分集合 Z と X 上の層 $\mathcal{F}$ が在った時、局所コホモロジー $\Gamma_Z(\mathcal{F})$ が考えられる。即ち、X の開部分集合 U に対し、

$$\Gamma_Z(\mathcal{F})(U) := \{ s \in \Gamma(U, \mathcal{F}) \mid \operatorname{supp}(s) \subset Z \}$$

というものである。 さらに、二つの閉部分集合 $Z_1 \subset Z_2 \subset X$ が在った時、商 $\Gamma_{Z_2}(\mathcal{F}) / \Gamma_{Z_1}(\mathcal{F})$ を $\Gamma_{Z_2/Z_1}(\mathcal{F})$ と書く。 明らかに $\Gamma_{Z/\phi}(\mathcal{F}) = \Gamma_Z(\mathcal{F})$ である。

<u>補題3</u> G－多様体 X の二つの G－不変な閉部分集合 $Z_1 \subset Z_2$ に関し、関手

$$\mathbb{R}\Gamma_{Z_2/Z_1} : D^b_G(\mathcal{D}_X) \longrightarrow D^b_G(\mathcal{D}_X)$$

$$\mathbb{R}\Gamma_{Z_2/Z_1} : D^b_G(\mathcal{O}_X) \longrightarrow D^b_G(\mathcal{O}_X)$$

が定義でき、両者は両立する。

<u>説明</u> 関手 $\mathbb{R}\Gamma_{Z_2/Z_1} : D^b(\mathcal{D}_X) \longrightarrow D^b(\mathcal{D}_X)$ と $\mathbb{R}\Gamma_{Z_2/Z_1} : D^b(\mathcal{O}_X) \longrightarrow D^b(\mathcal{O}_X)$ が在り、それらが両立することは良く知られている。 一方、

$$p^* \circ \mathbb{R}\Gamma_{Z_2/Z_1} = \mathbb{R}\Gamma_{G\times Z_2/G\times Z_1} \circ p^*$$

$$q^* \circ \mathbb{R}\Gamma_{Z_2/Z_1} = \mathbb{R}\Gamma_{G\times Z_2/G\times Z_1} \circ q^*$$

が成り立ち、 $\mathbb{R}\Gamma_{Z_2/Z_1}$ が同変性を保つことが判る。

<u>§3 局所化定理</u>

以降、 T をトーラス (即ち、 $(\mathbb{C}^\times)^n$ に同型。) とし、滑らかな多様体 X に作用しているものとする。

命題4　多様体 X には分割 $X=\coprod_{i=0}^{m} X_i$ が在って　次の様な性質を充たす。　各 X_i は $V_i\times T/T_i$ という形をしていて、V_i は滑らかなアフィン多様体で、T は V_i に自明に作用している。　さらに、X_i には T−不変なアフィン開近傍 U_i が在り、X_i は U_i で閉、そして法束層 $\mathcal{N}_{X_i|U_i}$ は自由 $\mathcal{O}_{X_i}$−加群となっている。

説明　先ず、条件を充たす開部分多様体 X_0 の存在を言いたい。　各点には、T−不変なアフィン近傍が必らず存在し [Su]、それをより多くの条件に適うように縮小させていく。基本的に X_0 の存在は [Ri] に拠る。　次に、$Y_1=X\setminus X_0$ とし、$(Y_1)_{reg}$ の連結成分について同様の事をやる。　以下、同様に繰り返せばよい。

圏 $D^b_T(\mathcal{D}_X)$ の対象の中で、全てのコホモロジーがホロノミー的であるもの全てで生成される自由加群を、次の関係で割った加群を $\tilde{K}_T(X)$ と書く。　即ち、$\mathcal{L},\mathcal{M},\mathcal{N}$ をそのような $D^b_T(\mathcal{D}_X)$ の対象とした時、もし $D^b_T(\mathcal{O}_X)$ の中で

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{M} \arrow[dr] & \\ \mathcal{L} \arrow[ur] & & \mathcal{N} \arrow[ll, "+1"] \end{tikzcd}$$

という三角形があれば、$[\mathcal{M}]=[\mathcal{L}]+[\mathcal{N}]$ とする。

補題1から、滑らかなT－多様体の射 $f: X \to Y$ があった時、

<u>補題5</u>　元 $[\mathcal{M}]$ を $[\mathbb{L}f^*(\mathcal{M})]$（または $[f^!\mathcal{M}]$）に移すことにより、準同型 $\mathbb{L}f^*: \tilde{K}_T(Y) \to \tilde{K}_T(X)$（または $f^!$）が得られる。

補題3から同様に、二つのT－不変閉部分集合 $Z_1 \subset Z_2 \subset X$ があった時、

<u>補題6</u>　元 $[\mathcal{M}]$ を $[\mathbb{R}\Gamma_{Z_2/Z_1}(\mathcal{M})]$ に移すことにより、$\tilde{K}_T(X)$ の自己準同型 $\mathbb{R}\Gamma_{Z_2/Z_1}$ が得られる。

明らかに、$\tilde{K}_T(\{pt\}) = K_T(\{pt\}) = R(T)$（Tの表現環）であるから、$\tilde{K}_T(X)$ は、指標λに対し $g^*(\lambda)$ をテンソルすることにより、$R(T)$－加群となる。ここで g はXから一点集合 $\{pt\}$ への射である。前述の準同型 $\mathbb{L}f^*$, $f^!$, $\mathbb{R}\Gamma_{Z_2/Z_1}$ は $R(T)$－準同型になっている。

<u>補題7</u>　群 T' をTの真の部分群とし、Vを或る滑らかな多様体でTが自明に作用しているものとする。集合 $\{1-\lambda \mid \lambda$ は1でないTの指標$\}$ で生成された $R(T)$ の積閉集合を Λ とする。この時、$R(T)$－加群 $\tilde{K}_T(T/T' \times V)$

の Λ での局所化 $\tilde{K}_T(T/T'\times V)_\Lambda$ は自明である。

<u>説明</u> 部分群 T' は真の部分群だから、T' 上では自明な T の自明でない指標 λ がある。この時、f を射 $T/T'\times V \to \{pt\}$ とすれば、$[f^*(\lambda)] = [f^*(1)]$ となる。

<u>命題8</u> 滑らかな T-多様体 Y に T-不変な閉部分多様体 $X = T/T'\times V$ が在るとする。ここで、V は T が自明に作用する滑らかなアフィン多様体とする。今、法束層 $\mathcal{N}_{X|Y}$ が T-同変自由 $\mathcal{O}_X$-加群であると仮定する。包含写像を i と書くと、関手 $\int_i$ は準同型写像

$$\int_i : \tilde{K}_T(X) \longrightarrow \tilde{K}_T(Y)$$

を導く。

<u>説明</u> 法束層 $\mathcal{N}_{X|Y}$ の $\mathcal{O}_X$ 上の基底を一つ決める。その基底に関して、関手 $\int_i : D^b(\mathcal{D}_X) \to D^b(\mathcal{D}_Y)$ と両立する様な関手 $D^b(\mathcal{O}_X) \longrightarrow D^b(\mathcal{O}_Y)$ を定義する。

<u>定理9</u> 命題4に於ける分割 $X = \coprod_{i=0}^{m} X_i$ に関して、$R(T)$-加群の同型

$$\tilde{K}_T(X) \simeq \bigoplus_{i=0}^{m} \tilde{K}_T(X_i)$$

がある。

<u>説明</u>　Z を X の滑らかな閉部分多様体とし、U をその補空間，i, j をそれぞれ Z, U の X への包含写像とする。この時、$\mathcal{M} \in D^b(\mathcal{D}_X)$ に対し、三角形

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{M} \arrow[dr] & \\ R\Gamma_Z(\mathcal{M}) = \int_i i^! \mathcal{M} \arrow[ur] & & \int_j j^! \mathcal{M} = R\Gamma_{X \setminus Z}(\mathcal{M}) \arrow[ll, "+1"] \end{tikzcd}$$

が存在するから、上の同型が得られる。

<u>系10</u>　X の T に関する不動点集合 X^T は、滑らかな X の閉部分多様体である [IV] が、$\tilde{K}_T(X)$ の自己準同型 $R\Gamma_{X^T}$ を Δ で局所化した $(R\Gamma_{X^T})_\Delta : \tilde{K}_T(X)_\Delta \to \tilde{K}_T(X)_\Delta$ は、恒等写像である。

<u>§4　指標</u>

<u>定義</u>　アフィン T－多様体 X が正性条件 (positivity condition) を充たすとは、$\mathbb{C}[X]/\mathbb{C}$ の全てのウェイトが或る半順序に関し、正である事である。

アフィン T－多様体 X が正性条件を充たす時、通常の形式的指標の定義（例えば [Di] 参照。）と両立する $R(T)_\Delta$ に

値をもつ形式的指標 ch が、有限生成 T-同変 $\mathbb{C}[X]$-加群に定義できる。

<u>補題11</u> 滑らかなアフィン T-多様体 X が正性条件を充たしているとする。 この時、

(1) X は、唯一つの T-不動点を有する。

(2) 有限階数を持つ T-同変局所自由 $\mathcal{O}_X$-加群は、自由である。

補題11から、T-同変 $\mathbb{C}[X]$-加群として $\Gamma(X, \mathcal{D}_X)$ に同型な加群 M の形式的指標 ch(M) を、

$$ch(M) := \Delta\, ch(\mathbb{C}[X]) \quad \in R(T)_\Delta$$

と定義できる。 ここで、Δ は X の T-不動点での接空間のウェイト $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ を使って $(1-\lambda_1)^{-1} \cdots (1-\lambda_n)^{-1}$ と表わされる $R(T)_\Delta$ の元である。 従って結局、R(T)-準同型 $ch : \tilde{K}_T(X) \longrightarrow R(T)_\Delta$ が定義できる。 もう少し一般に、

<u>定理12</u> 多様体 X は有限個からなる開被覆 $\bigcup_{i=1}^{m} U_i$ を持ち、各 U_i は滑らかなアフィン T-多様体で正性条件を充たすとする。 この時、R(T)-準同型

$$ch : \tilde{K}_T(X) \longrightarrow R(T)_\Delta$$

が定義でき、x_i を U_i の唯一つの不動点とすれば、$[\mathcal{M}] \in \tilde{K}_T(X)$ に対し、

$$\mathrm{ch}([\mathcal{M}]) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{ch}([\mathbb{R}\Gamma_{\{x_i\}}(\mathcal{M})])$$

である。

参 考 文 献

[Bo] A. Borel et al., "Algebraic $\mathcal{D}$-Modules," Perspectives in Math. 2, Academic Press, New York and London, 1986.

[Di] J. Dixmier, "Algèbres enveloppantes," Gauthier Villars, Paris, 1974.

[H] R. Hotta, "Introduction to $\mathcal{D}$-Modules," The Institute of Mathematical Sciences, Madras, 1987.

[Iv] B. Iversen, "A fixed point formula for action of tori on algebraic varieties," Invent. Math. 16 (1972), 229-236.

[Mu] D. Mumford, "Geometric Invariant Theory," Springer Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, 1973.

[O] 大山陽介, "D加群入門I," 数理解析研究所講究録 667 (1988), 1–98.

[Ri] R. W. Richardson Jr., "Principal orbit types for algebraic transformation spaces in characteristic zero," Invent. Math. 16 (1972), 6–14.

[Su] H. Sumihiro, "Equivariant completion," J. Math. Kyoto Univ. 14 (1974), 1–28.