

Hirzebruch 曲面のグローブ、 F_0 とC型 Weyl 群.

東大・理 松澤淳一 (Jun-ichi Matsuzawa)

3次元複素射影空間内の非特異3次曲面上の27本の第一種例外曲線の symmetry は E_6 型 Weyl 群によって記述されること加古くから知られている。一般に d 次の Del Pezzo 曲面 ($d=1, 2, 3$) 上の第一種例外曲線の symmetry は E_{9-d} 型の Weyl 群およびルート系と密接に関係していることが知られている。(Du Val [D1], [D2], Manin [M]).

上にあげた曲面はいつでも射影平面 P^2 を何回かで blow up して得られるわけであるが、その他の相対極小曲面、すなわち Hirzebruch 曲面を blow up した場合、出てくる Weyl 群、ルート系はC型となる。詳細については [Mat] を参照していただきたい。

[定義] $e \in \mathbb{N}$ とする。 e 次 Hirzebruch 曲面 (ruled surface) H_e とは、 $P^2 \times P^1$ の部分多様体

$$\{ (y_0: y_1: y_2) \times (x: 1) \in P^2 \times P^1 \mid x^e y_2 - x^e y_1 = 0 \}$$

のことにいう。

He の第 2 成分への射影のファイバー F と切断 S とを次のように定める。

$$F := \{ (z_0:z_1:z_2) \times (t:x) \in He \mid s=0 \}$$

$$S := \{ (z_0:z_1:z_2) \times (t:x) \in He \mid z_1=z_2=0 \}.$$

[定義]. He 上の点 $p_1, \dots, p_m$ が “一般の位置にある” とは、完備線形系 $|F+S|$ に含まれる既約非特異曲線で、 $p_1, \dots, p_m$ のうち $e+1$ 点を通り、 $n-e-1$ 点を通らないもの ($e+1 > m$ のときは m 点を通る) があるときをいう。

さて、 $p_1, \dots, p_m$ を He の点で一般の位置にあるものとする。
 $\pi: X_e(m) \rightarrow He$ を、 $p_1, \dots, p_m$ での blow up とする。
 ファイバー F と切断 S の π による広義引き戻しの線形同値類をそれぞれ f, s とする。 $E_1, \dots, E_m$ ($E_i = \pi^{-1}(p_i)$) を例外曲線とし、 $e_1, \dots, e_m$ をその線形同値類とする。このとき、

(1) $\text{Pic}(X_e(m)) \cong \mathbb{Z}^{n+2}$ であって、 $f, s, e_1, \dots, e_m$ で生成される。
 ($\text{Pic}(X_e(m))$ は、 $X_e(m)$ の Picard 群)。

(2) $X_e(m)$ の交差数は、 $f^2=0, s^2=-e, e_i^2=-1$ ($1 \leq i \leq m$)、

$$f \cdot s = 1, f \cdot e_i = 0, s \cdot e_i = 0, e_i \cdot e_j = 0 \quad (i \neq j)$$

で与えられる。

(3) 標準因子の線形同値類 k は、 $k = -(e+2)f - 2s + e_1 + \dots + e_n$

で与えられる。

が成り立つ。(Hartshorne [H] Chap V 参照)。

[命題] $e \geq 2$ とすると、 $X_e(m)$ 上にちょうど $2m$ 本の第一種例外曲線が存在するための必要十分条件は $e \geq n$ である。

このとき、この $2m$ 本の例外曲線は

(i) 例外曲線 E_i ($\pi(E_i) = p_i, 1 \leq i \leq n$)

(ii) 各 p_i を含むファイバー F_i の狭義引き戻し $\tilde{F}_i, (1 \leq i \leq m)$ 。

となる。

$X_e(m)$ の Picard 群 $\text{Pic}(X_e(m))$ の交差形式を $\text{Pic}(X_e(m)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ に自然に拡張し、部分空間 V と、その部分集合 Δ を次のように定義する。

$$V := \{ v \in \text{Pic}(X_e(m)) \otimes \mathbb{R} \mid v \cdot k = v \cdot f = 0 \}.$$

$$\Delta := \left\{ l_1 - l_2 \mid \begin{array}{l} l_1, l_2 \text{ は } X_e(m) \text{ の第一種例外曲線の線形同値類, } l_1 \neq l_2. \end{array} \right\}$$

2n と 2 次が成立する。

[定理] $e \geq 2$, $e \geq n$ とすると, Δ は V における C_m 型ル
ート系となり, その Weyl 群 W は次で特徴付けられる。

$$W \simeq \left\{ \sigma \in GL(\text{Pic}(X_{e,m})) \left| \begin{array}{l} \text{(i)} \sigma \text{ は 交 差 形 式 を 保 つ。} \\ \text{(ii)} \sigma(h) = h, \\ \text{(iii)} \sigma(f) = f. \end{array} \right. \right\}$$

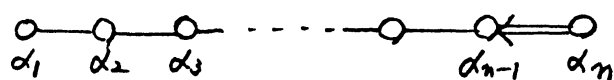
実際, Δ は次のような集合となっている。

$$\Delta = \{ \pm(e_i - e_j) \mid 1 \leq i < j \leq n \} \cup \{ \pm(f - e_i - e_j) \mid 1 \leq i \neq j \leq n \} \\ \cup \{ \pm(f - 2e_i) \mid 1 \leq i \leq n \}.$$

ルート系の基底としては, 次のとおり。

$$\Pi = \{ e_1 - e_2, \dots, e_{n-1} - e_n, -f + 2e_n \}.$$

これらの基底を左から順に $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ とすると, Dynkin 図形は。



となり, W は α_i に関する鏡映で生成された有限群である,

$$W = \langle S_i \mid S_i \text{ は } \alpha_i \text{ に関する鏡映, } 1 \leq i \leq n \rangle.$$

[註]. (1). Δ_1 を次のようにとると. Δ_1 は V における D_m 型ルート系となる.

$$\Delta_1 = \left\{ l_1 - l_2 \mid \begin{array}{l} l_1, l_2 \text{ は } X_0(m) \text{ の 第一種例外曲線の線形同} \\ \text{値類. } l_1 \cdot l_2 = 0. \end{array} \right\}$$

(2) Δ_2 を次のようにとると. これは Δ_1 と一致して. V の D_m 型ルート系となる.

$$\Delta_2 = \{ v \in \text{Pic}(X_0(m)) \mid v^2 = -2, v \cdot k = 0, v \cdot f = 0 \}.$$

参考文献.

- [D 1] Du Val, P., On the directrices of a set of points in a plane, Proc. London Math. Soc. (2) 35 (1932), pp 23-74.
- [D 2] Du Val, P., On the Kantor group of a set of points in a plane, Proc. London Math. Soc. (2) 42 (1937), 18-51.
- [H] Hartshorne, R., Algebraic Geometry, Springer-Verlag, 1977.
- [M] Manin, Yu. I., Cubic Forms, 2nd edition, North-Holland, 1986.
- [Mat] Matsuzawa, J., Monoidal transformations of Hirzebruch surfaces and Weyl groups of type C, J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sec. IA, vol 35, No. 2, 425-429, (1988)