

対称空間の Eisenstein 積分

職業訓練大 佐野 茂 (Shigeru Sano)

序. 半単純リー群上に, Harish-Chandra は Eisenstein 積分の概念を導入し理論を展開している。Eisenstein 積分は cuspidal 放物的部分群からの誘導表現の matrix coefficient となっている。また, Eisenstein 積分の定数項は振幅が c -関数となる平面波の有限和で与えられるなど興味深いものである。本稿ではこれらの点をふまえて, 対称空間 G_c/G_R において Eisenstein 積分を考えてみたい。§ 1 では, 一般の半単純対称空間における対称空間 G_c/G_R の位置付けを明らかにする意味で G_c/G_R 上の G_c -不変微分作用素の G_R -両側不変な関数に対する radial part を決める。§ 2 では, G_c の対称空間 G_c/G_R の意味での連続系列表現から決まる不変帯球超関数の特徴付けをおこない, 連続系列に関する逆 Fourier 変換を与える (定理 2.3)。§ 3 では, cuspidal 放物的部分群に対応して連続系列, 離散系列をこめた形で Eisenstein 積分を与える。

§ 1. 両側不変性に関する双対性。 $\mathfrak{g}_c$ を複素半単純リ一環, σ を $\mathfrak{g}_c$ 上の対合的自己同形とする。 $\mathfrak{g}_c = \mathfrak{g}_R + \mathfrak{g}_{-1}$ を対応する固有空間分解とする。 θ を σ と可換な Cartan 対合とし, 対応する Cartan 分解を $\mathfrak{g}_c = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ とする。 $\mathfrak{g}_c$ の複素化を $\mathfrak{g}_H$ とおく。 G_H を $\mathfrak{g}_H$ に対応する連結半単純リ一群とする。 $\mathfrak{g}_c$ の双対を $\mathfrak{g}_c^d = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}_R + i(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}) + i(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{g}_R) + \mathfrak{p} \cap \mathfrak{g}$, また $\mathfrak{k}^d = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}_R + i(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{g}_R)$, $\mathfrak{g}_R^d = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}_R + \mathfrak{p} \cap \mathfrak{g}$ ($i = \sqrt{-1}$) とおく。 $G_c, G_R, G_c^d, K, K^d, G_R^d$ をそれぞれ $\mathfrak{g}_c, \mathfrak{g}_R, \mathfrak{g}_c^d, \mathfrak{k}, \mathfrak{k}^d, \mathfrak{g}_R^d$ に対応する G_H の解析的部分群とする。

$$\begin{array}{ccccc}
 & & G_H & & \\
 & \swarrow & & \searrow & \\
 G_c/G_R & & & & G_R \simeq G_R \times G_R / \Delta \\
 & \nwarrow \text{n.R.} & & \nearrow \text{n.R.} & \\
 & & G_c^d/K^d \simeq G_c/K & &
 \end{array}$$

$\alpha \in \mathfrak{g}$ を Cartan 部分空間とし $\alpha^d = i(\alpha \cap \mathfrak{k}) + \alpha \cap \mathfrak{p}$ とおくと, α^d は $\mathfrak{p}^d = i(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}) + \mathfrak{p} \cap \mathfrak{g}$ の split Cartan 部分空間となる。 A, A^d をそれぞれ α, α^d に対応する G_H の解析的部分群とする。 α の G_c における中心化を A_c とする。 Weyl 群を $W(\alpha) = N_K(\alpha) / Z_K(\alpha)$, $W(\alpha: \mathfrak{k} \cap G_R) = N_{\mathfrak{k} \cap G_R}(\alpha) / Z_{\mathfrak{k} \cap G_R}(\alpha)$ とおく。 $W(\alpha: \mathfrak{k} \cap G_R) \setminus W(\alpha)$ の代表系を $w_1 = 1, w_2, \dots, w_n (\in K)$ とし, $A_\alpha = \bigcup_{j=1}^n w_j A$ とおく。 G_c の部分集合 D に対し, その正則元全体を D' とする。

$A_j = w_j A$ に対し, $G_R[A_j] = G_R A_j G_R$ とおく。 $G_R[A_j]$ 上に台をもつ関数空間を

$$C_{A_j}^\infty(G_R \backslash G_c / G_R)^{W(\Omega)} \\ = \left\{ f \in C^\infty(G_R \backslash G_c / G_R) : \text{supp } f \subset G_R[A_j], f|_{A_j} \text{ は各点で局所的に } \mathbb{R}\text{-環の関数と考えたとき } W(\Omega)\text{-不変} \right\}$$

とおく。 A_j の任意の点 a に対し, 十分小さな近傍 θ を, θ の $W(\Omega)$ -不変な領域 Ω が存在して, $\theta = w_j \exp \Omega$ により微分同型となるようにとる。 θ 上の関数 f に対し, $\theta^d = \exp \Omega^d \subset A^d$ 上の関数 $f^?$ を $f(w_j \exp X) = f^?(\exp X^d)$ ($X^d = i(X \cap k) + (X \cap p)$) で定義する。

命題 1.1. $C_{A_j}^\infty(G_R \backslash G_c / G_R)^{W(\Omega)} \ni f \longmapsto f^? \in C^\infty(k^d \backslash G_c^d / k^d)$ は局所的に同型となる。 $f^?(x) = f(\theta x)$ ($x \in G_c^d / k \cap G_R$) 。

注意 1. この対応は, 一般の半単純対称空間 G/H においても $C_A^\infty(H \backslash G/H)^W \longrightarrow C^\infty(k^d \backslash G^d / k^d)$ 局所的に同型となる。

次に, $ID(G_c / G_R)$, $ID(G_c^d / k^d)$ をそれぞれ G_c / G_R , G_c^d / k^d 上の G_c -不変, G_c^d -不変微分作用素全体の集合とする。

$U(\mathfrak{g})^{G_R}$, $U(\mathfrak{p}^d)^{k^d}$ をそれぞれ $\text{Ad}(G_R)$ -不変, $\text{Ad}(k^d)$ -不変な $\mathfrak{g}$ 上, そして $\mathfrak{p}^d$ 上の多項式全体の集合とすると, 代数的に同型 $ID(G_c / G_R) \simeq U(\mathfrak{g})^{G_R}$, $ID(G_c^d / k^d) \simeq U(\mathfrak{p}^d)^{k^d}$ が成り立つ。 k_c^d と k^d の複素化とし, K_c^d を対応する G_H の解析的部分群とする。 $D \in U(\mathfrak{g})^{G_R}$ を k_c^d 上の K_c^d -不変な

多項式に拡張し, $U(\mathfrak{p}^d)^{k^d}$ に制限したものを $D^?$ とする。

このとき

命題 1.2. $f \in C_{A_j}^\infty(G_R \backslash G_c / G_R)^{W(\mathfrak{h})}$, $D \in ID(G_c / G_R)$

に対して

$$(Df)^? = D^? f^?$$

が成立。

$\mathfrak{h}$ の正のルート系を $\Sigma^+ = \Sigma^+(\mathfrak{h}, \mathfrak{g}_c)$ とし, Weyl 群を W , $\rho = \sum_{\alpha \in \Sigma^+} \alpha$ として $\nu = \sum_{\alpha \in \Sigma^+} \mathfrak{g}_c(\alpha; \alpha)$ とおく。 A_c 上の解析関数 Δ を $\Delta(a) = \prod_{\alpha \in \Sigma^+} (e^{\alpha(X)} - e^{-\alpha(X)})$ ($a = \exp X$, $X \in \mathfrak{h}_c$) で定義する。

$\mathfrak{g}_c$ の包絡環 $U(\mathfrak{g}_c)$ から $U(\mathfrak{h}) = S(\mathfrak{h})$ への写像 γ' を

$$D - \gamma'(D) \in \mathfrak{g}_R U(\mathfrak{g}_c) + U(\mathfrak{g}_c) \nu$$

とし, さらに $\gamma: U(\mathfrak{g}_c) \rightarrow S(\mathfrak{h})$ を $\gamma(D)(\lambda) = \gamma(D)(\lambda - \rho)$

($\forall \lambda \in \mathfrak{h}^*$) で定義すると, γ は $ID(G_c / G_R) \simeq U(\mathfrak{g}_c)^{\mathfrak{g}_R} / \langle U(\mathfrak{g}_c)^{\mathfrak{g}_R} \cap U(\mathfrak{g}_c) \mathfrak{g}_R \rangle \xrightarrow{\sim} I(\mathfrak{h}) = S(\mathfrak{h})^W$ 代数的同型となる。

f を G_c 上の G_R -両側不変な C^∞ -関数とする。 $D \in ID(G_c / G_R)$ に対し $(Df)|_{A_{\mathfrak{h}}} = I(D)(f|_{A_{\mathfrak{h}}})$ を満足する D の radial part $I(D)$ が存在する。

命題 1.3. f を G_c 上の G_R -両側不変な C^∞ -関数とするとき

$$I(D)(f|_{A_{\mathfrak{h}}}) = \Delta^{-1} \gamma(D) \Delta (f|_{A_{\mathfrak{h}}}) \quad D \in ID(G_c / G_R)$$

が成り立つ。

証明。 $G_c^d/k^d \simeq G_c/k$ 上の球関数の具体的形と、命題 1.1, 1.2 を用いて示せる。

注意 2. $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_c)$ を $U(\mathfrak{g}_c)$ の中心、さらに $\mathfrak{g}_c$ を実半単純リー環と考えた包絡環の中心を $\mathfrak{z}_R(\mathfrak{g}_c)$ とおく。 $(\mathfrak{g}_c, \mathfrak{m}_c)$ の Weyl 群 W に対し、 $(\mathfrak{g}_c, \mathfrak{m}_c)$ を実半単純リー環と考えるとその複素化から決まる Weyl 群を W_R とする。 $I(\mathfrak{m}_c) = U(\mathfrak{m}_c)^W$, $I_R(\mathfrak{m}_c) = U(\mathfrak{m}_c)^{W_R}$ とおく。 $\gamma^{\mathfrak{m}}: \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_c) \rightarrow I(\mathfrak{m}_c)$, $\gamma_R^{\mathfrak{m}}: \mathfrak{z}_R(\mathfrak{g}_c) \rightarrow I_R(\mathfrak{m}_c)$ をそれぞれの Harish-Chandra 同型とする。このとき次の可換図式が成立

$$\begin{array}{ccc}
 \mathfrak{z}_R(\mathfrak{g}_c) & \xrightarrow{\quad} & I_R(\mathfrak{m}_c) \\
 \text{projection} \downarrow & \curvearrowright & \downarrow \text{projection} \\
 U(\mathfrak{g}_c)^{G_R} & \xrightarrow{\quad} & I(\mathfrak{m}) \\
 \lambda \downarrow & \curvearrowright & \downarrow \lambda \\
 \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_c) & \xrightarrow{\quad} & I(\mathfrak{m}_c)
 \end{array}$$

この埋め込み λ は G_c/G_R の G_c への埋め込み $gG_R \mapsto g \circ g|^{-1}$ に対応するもので $\lambda(X) = 2X$, $\lambda(1) = 1$ から決まるもの。

§2. 連続系列. 以下 $X = G_c/G_R$ とおき、対称空間 X を扱う。対称対 $(\mathfrak{g}_c, \mathfrak{g}_R)$ がこの §2 では split Cartan 部分空間 $\mathfrak{m}$ をもつと仮定しよう。対応する極小放物的部分群を $P = MAN$ ($MA = Z_{G_c}(\mathfrak{m})$, $A = \exp \mathfrak{a}$) とする。 $UG_R \cap P$ は G_c の中で open dense となる。
 $w \in W(\mathfrak{m}; G_R \cap K) \setminus W(\mathfrak{m})$

$g \in G_c$ に対し, $m(g) \in M$, $H^i(g)$ を $g \in G_R$ $w_i m(g) \exp(H^i(g)) N$ で定義する. $\lambda \in (\mathfrak{m}^*)$ に対し G_c 上の G_R -両側不変な関数 $\psi_{j,\lambda}^\lambda(g)$ を

$$\psi_{j,\lambda}^\lambda(g) = \int_K \exp(\lambda - \rho)(H^j(gk)) \exp(-(\lambda + \rho)H^j(g^{-1}k)) dk$$

で定義する. dx を X 上の G_c -不変な測度とし, X 上の不変帯球超関数を

$$\Theta_{j,\lambda}^\lambda(f) = \int_X \psi_{j,\lambda}^\lambda(x) f(x) dx \quad (f \in C_c^\infty(X))$$

で定義する. ルート α に対し, 双対な元 $H_\alpha \in \mathfrak{h}$ とし, $\pi = \prod_{\alpha > 0} H_\alpha$ とおく.

命題 2.1. X 上の不変帯球超関数 $\Theta^\lambda = \sum_{j=1}^n \Theta_{j,\lambda}^\lambda$ は A'_n 上解析関数となり

$$\Theta^\lambda \Big|_{A'_j} = \frac{\pi(\rho) \sum_{w \in W} \varepsilon(w) e^{w\lambda(X)}}{\pi(i\lambda) \Delta(\exp X)} \quad (w_j \exp X \in A'_j)$$

が成り立つ.

証明. Θ^λ は A'_n 上解析関数になる. $\Theta_{j,\lambda}^\lambda$ は $C_{A'_j}^\infty(G_R \backslash G_c / G_R)^{U(\mathfrak{m})}$ に入る. 命題 1.1 と G_c/K 上の球関数の具体的形より各 A'_j の Weyl chamber で形が決まる. さらに $\Delta \Theta^\lambda$ は A'_j 上に解析的にのびることより, global な形が決まる.

$f(x) \in C_c(X)$ に対し, 変換を次のように定義する.

$$F_f^{\omega}(a) = \Delta(a) \int_{G_R/Z_{G_R}(\omega)} f(ha G_R) d h^* \quad (a \in A_{\omega})$$

ただし, dh^* は $G_R/Z_{G_R}(\omega)$ 上の G_R -不変測度。

命題 2.2. $f \in C_c^\infty(X)$ に対し, dh^* を適当にとると

$$\partial(\omega) F_f^{\omega}(\omega_j G_R) = f(\omega_j G_R)$$

が成立。

$(\omega)^*$ の W による / つの Weyl chamber を ω とする。このとき

命題 2.1, 2.2 より

定理 2.3. $f \in C_c^\infty(X)$, $\text{supp } f \subset G_R[A_{\omega}]$ に対して,

$$\int_{\omega} \Theta^\lambda(f) \overline{\Theta^\lambda(g)} \frac{d\lambda}{|c(\omega)|} = f(g G_R)$$

が成立。

注意. これは $G_R = K$ の場合には, 逆 Fourier 変換公式になっている。一般の G/G_R においては, 連続系列は

$|W(\omega: k \cap G_R) \setminus W(\omega)|$ の multiplicity をもつことが分る。

§3. Eisenstein 積分. この節では, 離散系列もこめて考えたいので $G_c^\sigma = G_R$ とする。 G_c が単連結のときはこのように

とれる。 $\{j_1, \dots, j_m\}$ を $k \cap G_R$ で互いに共役とならない g の Cartan 部分空間とする。 j_1 は $\mathfrak{z}_1 = j_1 \cap k$ が $\mathfrak{g} \cap k$ の極大な可換部分空間となる Cartan 部分空間とし, $\mathfrak{z}_2 = j_2 \cap k \subset \mathfrak{z}_1$ となるようにしておく。 B_ℓ を $\mathfrak{z}_2$ に対応する解析的部分群とし, $P_\ell = M_\ell B_\ell N_\ell$ ($M_\ell B_\ell = Z_{G_\ell}(\mathfrak{z}_2)$) を G_ℓ の放物的部分群とする。

$X_\ell = M_\ell / M_\ell \cap G_R$ は split Cartan 部分空間をもつ。 B_ℓ の character 群を B_ℓ^* とする。 X_ℓ の split Cartan に対応する §2 で与えた Weyl chamber を $\mathcal{F}_\ell$ とする。 $\lambda \in \mathcal{F}_\ell, \mathfrak{f} \in B_\ell^*$ に対して Poisson 核 $P_\ell^{\mathfrak{f}, \lambda}(g)$ を

$$P_\ell^{\mathfrak{f}, \lambda}(g) = \begin{cases} 0 & g^{-1} \notin G_R P_\ell \\ \bigoplus^{\lambda(m)} \mathfrak{f}^{-1}(b) & g^{-1} \in G_R m b N_\ell \\ & (m \in M_\ell, b \in B_\ell) \end{cases}$$

で定義する。これを用いて Fourier 変換を

$$\hat{\varphi}(\ell; \mathfrak{f}, \lambda; g) = \int_X \overline{P_\ell^{\mathfrak{f}, \lambda}(g^{-1}x)} \varphi(x) dx$$

で定義し, さらに Eisenstein 積分を

$$E(P_\ell; \mathfrak{f}, \lambda; g) = \int_{K \times X_\ell} P_\ell^{\mathfrak{f}, \lambda}(m^{-1}k^{-1}g) \hat{\varphi}(\ell; \mathfrak{f}, \lambda; km) dk dm^*$$

で定義する。

注意。 G/G_R の離散系列を具体的に与え、連続系列は不変
帯球超関数の形で与えてあり、群の場合とは逆転している。
この形は大島先生が [3] で与えた Poisson 変換と Fourier 変換を
合わせたものに対応している。

References

- [1] S.Helgason: Analysis on Lie groups and homogeneous spaces. Conf.Board Math.Sci.Series, No.14, American Mathematical Society, 1972.
- [2] Harish-Chandra: The Maass-Selberg relations and the Plancherel formula. Ann. of Math., (2)104, 117-201, 1976.
- [3] 大島 利雄: 半単純対称空間上の調和解析、数学、37、97-112、1985.
- [4] T.Oshima and J.Sekiguchi: Eigenspaces of Invariant differential operators on an affine symmetric space, Invent. Math., 57, 1-81, 1980.
- [5] S.Sano: (a) Invariant spherical distributions and the Fourier inversion formula on $GL(n, \mathbb{C})/GL(n, \mathbb{R})$. J.Math.Soc.Japan, No.2, 191-218, 1984.
 (b) Distributions spheriques invariantes sur l'espace semi-simple et son dual. Lecture Notes in Mathematics, Vol.1243, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
 (c) Une integrale Invariante sur l'algebre de Lie Symetrique Semi-Simple. Advanced Studies in Pure Math., 14, 499-517, 1988.
- [6] 杉浦 光夫: ユニタリ表現論60年、数学、37、250-263、1985.