

Affine Kac-Moody Lie 群に対する Borel-Weil 定理

広大 理 岡本清郷

広大 学校教育 池田 章

広大 理 橋本隆司

広大 理 河野泰治

§.1 Central Extension (中心拡大)

$H^{(n)} := L^2(S^1, \mathbb{C}^n)$ とし、 $H^{(n)} = H_+^{(n)} \oplus H_-^{(n)}$ と分解する.

$$\begin{aligned} H_+^{(n)} &:= \{ f \in H^{(n)} ; f = \sum_{k \geq 0} f_k e^{ik\theta} \} \\ H_-^{(n)} &:= \{ f \in H^{(n)} ; f = \sum_{k < 0} f_k e^{ik\theta} \} \end{aligned}$$

$GL(H^{(n)})$ により $H^{(n)}$ 上の有界作用素とその逆もまた有界作用素であるものの全体を表し、分解 $H^{(n)} = H_+^{(n)} \oplus H_-^{(n)}$ に関し

て $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(H^{(n)})$ とかくと

$$GL_{\text{res}}(H^{(n)}) := \left\{ g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(H^{(n)}) ; b, c : \text{Hilbert-Schmidt 作用素} \right\}$$

とおく. $GL_{\text{res}, 0}(H^{(n)})$ は $GL_{\text{res}}(H^{(n)})$ の単位元の連結成分を表す.

$$\mathcal{I} := \{ t \in GL(H_+^{(n)}) ; \det t \text{ が存在する} \}$$

とある。

$$\mathcal{E} := \{ (g, \varphi) \in GL_{res,0} \times GL(H_+^{(n)}) ; \det(a\varphi^{-1}) \text{ が存在する} \}$$

とする。

$$1 \rightarrow \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow GL_{res,0} \rightarrow 1$$

は完全列になる。 $\mathcal{E} \times \mathbb{C}^\times$ への $\mathcal{J}$ の作用を

$$(g, \varphi, a) \cdot t := (g, \varphi t, \det t \cdot a)$$

で定義し、これに関する orbit space $\tilde{GL}_{res,0}$ とおく：これは determinant bundle Det の dual bundle に同体する、 $\mathbb{C}^\times$ の構造群とすることができる主束である。(cf. [1])

次に $\tilde{GL}_{res,0}$ の 2 つの元 $[g, \varphi, a], [g', \varphi', a']$ に対して $\tilde{\mathcal{E}}$ の積を

$$[g, \varphi, a][g', \varphi', a'] := [g\varphi', \varphi\varphi', aa']$$

で定義すると、 $\tilde{GL}_{res,0}$ は群になる。 $\underbrace{GL_{res}}_{GL_{res,0}}(H^{(n)})$ の中心拡大にはついでに [1] を参照。

$$LGL_n(\mathbb{C}) := \{ \gamma : S^1 \rightarrow GL_n(\mathbb{C}), C^\infty \} \quad \text{とある。}$$

の 2 つの元 γ_1, γ_2 に対して $\tilde{\mathcal{E}}$ の積 $\gamma_1 \gamma_2$ を

$$(\gamma_1 \gamma_2)(z) = \gamma_1(z) \gamma_2(z) \quad z = e^{i\theta}$$

で定義すると $LGL_n(\mathbb{C})$ は無限次元 (complex) Lie 群になる。

$$\mu : LGL_n(\mathbb{C}) \rightarrow GL_{res}, \gamma \mapsto \mu_\gamma$$

$$\text{f.e. } (\mu_\gamma \cdot f)(z) := \gamma(z) f(z) \quad (f \in H^{(n)} = L^2(S^1, \mathbb{C}^n))$$

とあると M は $1 \neq 1$ の準同型になる。この M により $LG_n(\mathbb{C})$ の GL_n の中への埋め込みを先ほど GL_n に pull back するこにより $LG_n(\mathbb{C})$ の central extension $\tilde{LG}_n(\mathbb{C})$ が得られる。

§. 2 "Exceptional" Representation

$$G := \left\{ \begin{pmatrix} a(z) & b(z) \\ c(z) & d(z) \end{pmatrix} ; \begin{array}{l} a, b, c, d \in C^\infty(S^1) \\ a(z)d(z) - b(z)c(z) \equiv 1 \end{array} \right\}$$

$$P := \left\{ \begin{pmatrix} a(z) & b(z) \\ c(z) & d(z) \end{pmatrix} \in G ; c(z) \equiv 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a(z) & b(z) \\ 0 & \frac{1}{a(z)} \end{pmatrix} \in G \right\}$$

と $G \ni g \mapsto \bar{z} \in \mathbb{C}$

$\omega(g) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} g^* \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ とある。 $\mathbb{C} \ni z \mapsto g^*(z) = g(z)^*$ とする。

$$G_0 := \{ g \in G ; \omega(g) = g \}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a(z) & \overline{b(z)} \\ b(z) & \overline{a(z)} \end{pmatrix} \in G ; |a(z)|^2 - |b(z)|^2 \equiv 1 \right\}$$

$$N := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \chi(z) & 1 \end{pmatrix} \in G ; |\chi(z)| < 1 \right\}$$

とする。このとき $\lambda : P \rightarrow \mathbb{C}^*$ は holomorphic character とし、 $\tilde{\lambda} \in \lambda$ から定まる、主束 $G \xrightarrow{P} G/P$ に同定する line bundle とする。 $e \in P$ の G_0 -orbit $= \{ g e P ; g \in G_0 \}$ は G/P の open set を主束 $G_0 P \xrightarrow{P} \{ g e P ; g \in G_0 \}$ が定まる。これに同定する line bundle は L_λ とおき、 ξ は holomorphic

sections 全体 $\Gamma = \Gamma(L_\lambda)$ とおく:

$$\Gamma = \left\{ f: W \rightarrow \mathbb{C}, \text{ holomorphic}; f(wb) = \lambda(b)^{-1} f(w) \right. \\ \left. (w \in W, b \in P) \right\}$$

($\because$ $W = G_0 P$ とおいた.) 実は $G_0 P \cong N \times P$ であるから, Γ 上 f は N 上で一意に定まる. G_0 の Γ 上の regular 表現を π_λ とかく. このとき.

Prop. $\exists! \sigma_\lambda \in \Gamma$ s.t.

$$(i) \quad \sigma_\lambda(1) = 1.$$

$$(ii) \quad \pi_\lambda(n) \sigma_\lambda = \sigma_\lambda \quad (n \in N)$$

この σ_λ を用いて Γ の (dense) subspace に内積が入り, その完備化が G_0 のユニタリ表現の表現空間になる.

G の Lie alg. を $\mathfrak{g}$ とかくと: $\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} a(z) & b(z) \\ c(z) & -a(z) \end{pmatrix}; a, b, c, d \in C^\infty(S^1) \right\}$

P に $\mathbb{Z}$ に対応する Lie alg. $\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{p} := \left\{ \begin{pmatrix} a(z) & b(z) \\ 0 & -a(z) \end{pmatrix} \in \mathfrak{g} \right\}$ とおき.

$\mathfrak{g}$ の base を $h_k = \begin{pmatrix} z^k & 0 \\ 0 & -z^{-k} \end{pmatrix}$, $e_k = \begin{pmatrix} 0 & z^k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $f_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z^k & 0 \end{pmatrix}$

($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) とおく. π_λ の微分表現 $d\pi_\lambda$ を考えよ.

$$f_k \rightarrow -\frac{\partial}{\partial x_k}, \quad h_k \rightarrow \lambda_k + 2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_{n-k} \frac{\partial}{\partial x_n}$$

$$e_k \rightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda_{n+k} x_n + \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} x_{n-m} x_m \frac{\partial}{\partial x_n}$$

$\because$

$$\left\{ \begin{array}{l} N \ni \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x(z) & 1 \end{pmatrix} \mapsto \mathbb{Z} \quad x(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n z^n \\ \lambda_k = \int_{S^1} z^k d\mu(z) \quad \mu \text{ は } S^1 \text{ 上の positive measure} \end{array} \right.$$

と置く. この $d\pi_\lambda$ は [2] の "exceptional" 表現の dual になる.

といふ。

[付記]

Det を拡張して、無限次元一般線形群の古典型実形式にたいしてユニタリ表現を構成できる。

参考文献

1. Pressly, A., Segal, G.: Loop Groups. Oxford, UK: Oxford Univ. Press., 1986
2. Jakobsen, H.P., Kac, V.G.: A new class of unitarisable highest weight representations of infinite dimensional Lie algebras in Lecture Notes in Physics, Springer 1983/84
226