

C-関数の determinant について.

— $SL(n, \mathbb{R})$ case —

広大 理 田中 祥平 (Shohei Tamaka)

G を semisimple Lie group with finite center. G 及び
そのリー環 $\mathfrak{g}$ に対応する岩沢分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{a} + \mathfrak{n}$, $G = KAN$
とする. $P \in G$ の cuspidal parabolic subgroup とし. その Langlands 分解
を $P = MAN$ とする. $\hat{M}_d, \hat{K}$ をそれぞれ M の discrete series 及び K の
irreducible unitary 表現の equivalence class の集合. $\sigma \in \hat{M}_d$,
 $\tau \in \hat{K}$, $\tau = (\sigma, \tau)$ に対し. $\mathcal{C}_0(M, \tau)$ を M 上の τ -spherical
cusp form の空間とする. Harish-Chandra の C-関数

$$C_P(1, \nu) \in \text{End}(\mathcal{C}_0(M, \tau)), (\nu \in \mathcal{O}_e^*)$$

は. 表現論において. 重要な情報をもっており. Cohn は. C-関数の
determinant に関して. 以下の定理を導いた.

Theorem (Cohn) $\exists \mu_1, \dots, \mu_r \in \mathcal{O}_e^*, \exists \text{ Constants } P_{\bar{i}\bar{j}}, \rho_{\bar{i}\bar{j}}$
 $\in \mathbb{C}, (1 \leq \bar{i} \leq r, \bar{j} = 1, \dots, \bar{i})$ depending on τ . such that.

$$\det(C_P|P(1, \alpha))$$

$$= \frac{\prod \left(\frac{\langle \nu, \alpha_i \rangle}{2\langle \mu_i, \alpha_i \rangle} + \delta_{i\bar{j}} \right)}{\prod \left(\frac{\langle \nu, \alpha_i \rangle}{2\langle \mu_i, \alpha_i \rangle} + p_{ij} \right)}$$

但し. $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ は reduced α -roots.

Cohn の結果は. $\det(C_P|P(1, \alpha))$ が. ρ -関数の積・商 で表わされることを示しているが. 具体的な形については. 何もわかっていない. Cohn 自身は. 以下の予想を掲げている.

Cohn's Conjecture p_{ij}, δ_{ij} が. rational number であり. λ の highest weight に 関係 した量である.

本稿 では. $G = SL(n, \mathbb{R})$, P : minimal p.s.g.p. の場合に C -関数の determinant の 具体的な表示 について. 述べる.

§1. Notation and preliminaries.

G is semisimple Lie group with finite center, $\mathfrak{g}$ is its Lie algebra. k is $\mathfrak{g}$ の maximal compact subalgebra, $\mathfrak{g} = k + \mathfrak{p}$ is Cartan decomposition. θ is Cartan involution etc. $\alpha_p \in \mathfrak{p}$ の maximal abelian subspace とし. $L(\alpha_p) \in \alpha_p$ -root からなる root 系 $\Pi_p \equiv \bigcup_{\alpha \in \Pi_p} \alpha$, $\nu_p \equiv \sum \alpha_p$ とし. $\beta \in L(\alpha_p)$

に対し. $\eta_p^{(\beta)} \equiv \sum_{c>0} \mathfrak{a}_c \beta$, $\nu_p^{(\beta)} \equiv \mathfrak{o} \eta_p^{(\beta)}$, $N_p, V_p, N_p^{(\beta)}, V_p^{(\beta)}$ を対応する analytic subgroup とする. $M_p \equiv Z_K(\mathfrak{a}_p)$, $M_p \equiv N_K(\mathfrak{a}_p)$ とおく. G の minimal parabolic subgroup $P_p \equiv M_p A_p N_p$ と同じ. split component を含む parabolic subgroup 全体の集合を $\mathcal{P}(A_p)$ で表わす.

$\hat{M}_p, \hat{K}$ を M_p, K のそれぞれの irreducible unitary 表現の equivalence class の集合とする. $\sigma \in \hat{M}_p$, $\nu \in \sigma \mathfrak{a}_p^*$ に対し.

$$\pi_{\sigma, \nu} \equiv \text{ind}_{P_p}^G \sigma \otimes \nu \otimes 1$$

とし. その表現空間を $H^{P_p, \sigma, \nu}$ で表わす. $\gamma \in \hat{K}$ に対し. $H_\gamma^{P_p, \sigma, \nu} \in H^{P_p, \sigma, \nu}$ の γ -isotypic component とする.

§2. Some lemmas on the intertwining operators.

$P_p = M_p A_p N_p$, $P'_p = M_p A_p N'_p \in \mathcal{P}(A)$ に対し. intertwining operator $A(P'_p: P_p: \sigma: \nu)$ を.

$$A(P'_p: P_p: \sigma: \nu) f(x) \equiv \int_{V_p \cap N'_p} f(xv) dv \quad (f \in H^{P_p, \sigma, \nu})$$

で与える. 但し. dv は $V_p \cap N'_p$ 上の Haar measure である.

$$\int_{V_p \cap N'_p} e^{-(\nu + \mathfrak{s}_{P_p})H(v)} dv = 1$$

を満足するものとする. 以下. 後で. 必要とされると思われる性質を述べておく. 詳しくは. Knap - Stein [10] を参照されたい.

Lemma. 2.1 (1) $A(P'_p: P_p: \sigma: \nu) f$ は $\{ \nu \in (\mathfrak{a}_p)^* \mid \langle \text{Re. } \nu, \mathfrak{a} \rangle > 0. \text{ for all}$

P_p -positive α_p -roots α } 上で絶対収束し さらに $(\alpha_p)^*_\mathbb{C}$ 上の meromorphic function にも拡張できる。(2). $\sigma \in \widehat{M}_p$, $\nu \in (\alpha_p)^*_\mathbb{C}$ に対し.

$$A(P'_p: P_p: \sigma: \nu) \pi_{P_p, \sigma, \nu}(g) = \pi_{P'_p, \sigma, \nu}(g) A(P'_p: P_p: \sigma: \nu) \quad (g \in G)$$

を満足す。

$w \in M'$ に対し. $R(w)f(z) = f(zw)$ とする. $A_p(w, \sigma, \nu) \equiv R(w)A(w^{-1}P_p w: P_p: \sigma: \nu)$ は上の Lemma から

$$\pi_{P_p, w\sigma, w\nu}(\cdot) A_p(w, \sigma, \nu) = A_p(w, \sigma, \nu) \pi_{P_p, \sigma, \nu}$$

を満足す。

$P_i = M_p A_p N_i \in \mathcal{P}(A_p)$ ($0 \leq i \leq r$) に対し. P_p -positive reduced α_p -root. β_i ($1 \leq i \leq r$) が存在して

$$V_{\beta_i} \cap N_i = V^{(\beta_i)} \quad (1 \leq i \leq r)$$

$$P_0 = P_p, \quad P_r = P'_p$$

を満足すとき. P_i ($0 \leq i \leq r$) を P_p から P'_p への minimal string という. このとき.

$\{\beta_i\}_{1 \leq i \leq r}$ は. $\{\alpha \in \Sigma(\alpha_p) \mid \alpha \text{ は reduced } P_p\text{-positive and } P'_p\text{-negative root}\}$ と一致する。さらに.

$$A(P'_p: P_p: \sigma: \nu) = A(P_r: P_{r-1}: \sigma: \nu) \cdots A(P_1: P_0: \sigma: \nu)$$

が成立する。今 $w \in W(\alpha_p)$ ($\equiv N_K(\alpha_p)/Z_K(\alpha_p)$) をとり. $w^{-1}P_p w = \overline{P}_p$ ($\equiv \theta P_p$) を満足すとし. $w = w_r w_{r-1} \cdots w_1 \in W$ の minimal expression とする。(但し.

$w_i = s_{\delta_i}$ で. δ_i は P_p -simple α_p -root ($1 \leq i \leq r$)。このとき以下の事実が容易にわかる。

Lemma 2.2 $P_i \equiv (w_i \cdots w_1)^{-1} P (w_i \cdots w_1) \quad (0 \leq i \leq r)$, $\beta_i = (w_{i-1} \cdots w_1)^{-1} \beta_0$
 $(1 \leq i \leq r)$ とす. β_i は P_i -positive reduced α_P -root である. $P_i \quad (0 \leq i \leq r)$ は
 $\{\beta_i\}_{1 \leq i \leq r}$ に associate した P_i から $\bar{P}$ への minimal string.

§3. C -関数 と intertwining operator.

$P, P' \in \mathcal{P}(A_P)$, $\delta \in \hat{K}$, $\sigma \in \hat{M}_P$, $A \in \text{Hom}_{M_P}(V^\delta, H^\sigma)$ とす. $\nu \in (\alpha_P)_\mathbb{C}^*$
 $v \in V^\delta$ に対し.

$$L_P(A, v, \nu)(kan) \equiv e^{-(\nu + \rho_P)(\log a)} A(\pi_\delta(k^{-1})v) \\ (k \in K \quad a \in A_P \quad n \in N_P)$$

とす.

$$\begin{array}{ccc} V^\delta \otimes \text{Hom}_{M_P}(V^\delta, H^\sigma) & \longrightarrow & H_\delta^{P_P, \sigma, \nu} \\ \downarrow & & \\ v \otimes A & \longmapsto & L_P(A, v, \nu) \end{array}$$

は bijective K -intertwining map である.

$$A_\delta(P'_P = P_P = \sigma = \nu) \equiv A(P'_P = P_P = \sigma = \nu) \Big|_{H_\delta^{P_P, \sigma, \nu}}$$

とす. $A_\delta(P'_P = P_P = \sigma = \nu) \in \text{Hom}_K(H_\delta^{P_P, \sigma, \nu}, H_\delta^{P'_P, \sigma, \nu})$ を満たす.

Lemma 3.1 (c.f. [11]) $\nu \in (\alpha_P)_\mathbb{C}^*$ s.t. $\langle \text{Re } \nu, \alpha \rangle > 0$.

for all P_P -positive roots α とす. このとき.

$$A_\delta(P'_P = P_P = \sigma = \nu) L_P(A, v, \nu) = L_{P'_P}(A \circ B_\delta(P'_P = P_P = \nu), v, \nu)$$

$$\text{但し. } B_\delta(P'_P = P_P = \nu) \equiv \int_{V_P \cap N'_P} \pi_\delta(X(v))^{-1} e^{-(\nu + \rho_P)(H(v))} dv \\ (v = X(v) \exp H(v) n(v))$$

が成り立ち. $B_\delta(P'_P = P_P = \nu)$ は. さらに. 以下の性質を満たす.

(1). $B_\sigma(P'_p: P_p = \nu)$ は、絶対収束する. (2). $B_\sigma(P'_p: P_p = \nu) \in \text{End}(V^\sigma)$ で、 $\forall \nu \in M_p$.

$$B_\sigma(P'_p: P_p = \nu) \pi_\sigma(m) = \pi_\sigma(m) B_\sigma(P'_p: P_p = \nu) \quad (\forall m \in M_p)$$

$\sigma \in \hat{M}_p$, $V^\sigma \in V^\sigma$ の σ -isotypic component とする.

$$B_\sigma^\sigma(P'_p: P_p = \nu) \equiv B_\sigma(P'_p: P_p = \nu)|_{V^\sigma}$$

とすると、 $\nu \longmapsto B_\sigma^\sigma(P'_p: P_p = \nu)$ は、 $(\sigma_p)^*_\mathbb{C}$ 上の meromorphic function に

拡張でき、 $B_\sigma^\sigma(P'_p: P_p = \nu) \in \text{End}(V^\sigma) \quad (\forall \nu \in (\sigma_p)^*_\mathbb{C})$ となる。Lemma 3.1 と

次の lemma から C -関数の determinant を求めることは、 $\det(B_\sigma^\sigma(\bar{P}_p: P_p = \nu))$ を求めることに帰着される。

Lemma. 3.2 (C-f. [8]) (1). $\sigma \in \hat{M}_p$ に對し、

$$\begin{array}{ccc} \exists \psi^\sigma : \text{End}(H_g^{P_p, \sigma, \nu}) & \longrightarrow & {}^\circ \mathcal{C}_\sigma(M, \tau_M) : \text{linear Iso.} \\ \downarrow & & \\ T & \longrightarrow & \psi_T^\sigma \end{array}$$

$$\text{s.t.} \quad C_{P_p|P_p}(1, \nu) \psi_T^\sigma = \psi_{A(\bar{P}_p: P_p: \sigma: \nu)}^\sigma T$$

(2). $S \in W(\sigma_p)$, $W \in N_K(\sigma_p)$ s.t. $WM = S$ に對し、

$$C_{P_p|P_p}(1, \nu) \psi_T^\sigma = C_{P_p|WP_pW^{-1}}(1, S\nu) \psi_{R(W)TR(W^{-1})}^{W\sigma}$$

§ 4. B_σ^σ -function in the $SL(m, \mathbb{R})$ case.

以下、 $G = SL(m, \mathbb{R})$ の場合に 7.17. 述べる。 $\Theta = -\text{transpose}$,

$$K = SO(m), \quad \sigma_p = \{ x \in \mathfrak{g} \mid x = \text{diag}(x_1, \dots, x_m) \}.$$

$$M_p = \{ m \in G \mid m = \text{diag}(m_1, \dots, m_m) \}, \quad A_p = \exp \sigma_p$$

$$N_p = \left\{ m \in G \mid m = \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad P_p = M_p A_p N_p.$$

とする。ここで、 $e_{\tilde{j}} \ (1 \leq \tilde{j} \leq m)$ は $(\sigma_p)^*_{\mathbb{C}}$ の元で、 $\tilde{j}$ 番目の対角成分をとりだす写像とすると、 $\Sigma(\sigma_p) = \{ e_{\tilde{i}} - e_{\tilde{j}} \mid 1 \leq \tilde{i}, \tilde{j} \leq m, \tilde{i} \neq \tilde{j} \}$ で、 $\alpha_{\tilde{j}} \equiv e_{\tilde{j}} - e_{\tilde{j}+1}$ ($1 \leq \tilde{j} \leq m-1$) が、 P_p -simple σ_p -root になる。

$E_{\tilde{i}\tilde{j}} \ (1 \leq \tilde{i}, \tilde{j} \leq m)$ を m -次元正行行列の行列単位とし、 $H_{\ell} \equiv E_{2\ell-1, 2\ell} - E_{2\ell, 2\ell-1}$ ($1 \leq \ell \leq [m/2]$) とすると、 $\mathfrak{h} \equiv \sum_{1 \leq \ell \leq [m/2]} \mathbb{R} H_{\ell}$ は、 $\tilde{K}$ の maximal abelian subalgebra になる。 $w \in W(\sigma_p)$ に対し、 $B_{\delta}(P_p, w, \nu) \equiv B_{\delta}(w^{-1}P_p w : P_p : \nu)$ とおく。

Lemma 4.1 $\gamma \in \hat{K}$, μ : weight of V^{γ} , $\nu \in (\sigma_p)^*_{\mathbb{C}}$, v_{μ} : μ -weight vector of V^{γ} とすると、

$$B_{\delta}(P_p, S_{\alpha_{\tilde{j}}}, \nu) v_{\mu} = \underbrace{\alpha(\mu_{\tilde{j}}, \nu)}_{\text{Const.}} \prod_{1 \leq \tilde{j} \leq m-1, \tilde{j} \equiv 1 \pmod{2}} (H_{[(\tilde{j}+1)/2]}) v_{\mu}$$

但し、

$$\alpha(s, m) = \frac{\prod(\frac{s}{2}) \prod(\frac{s+1}{2})}{\prod(\frac{s+1-m}{2}) \prod(\frac{s+1+m}{2})} \quad (s \in \mathbb{C}, m \in \mathbb{N})$$

$$\mu_{\tilde{j}} = 2 \langle \mu, \alpha_{\tilde{j}} \rangle \cdot \langle \alpha_{\tilde{j}}, \alpha_{\tilde{j}} \rangle^{-1} \quad (1 \leq \tilde{j} \leq m-1)$$

証明 $\mu \in (\sigma_p)^*_{\mathbb{C}}$ s.t. $\langle \operatorname{Re} \mu, \alpha \rangle > 0$ for all P_p -positive roots α とすると、 B_{δ} -function の定義から、

$$B_{\delta}(P_p, S_{\alpha_{\tilde{j}}}, \nu) v_{\mu}$$

$$= \text{Const} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x)^{-(\nu_{\tilde{j}}+1)} \pi_{\tilde{j}}(f(x)^{-1} k_{\tilde{j}}(x))^{-1} dx \nu_{\mu}$$

$$(1 \leq \tilde{j} \leq m-1)$$

但し.

$$f(x) = (1+x^2)^{1/2}$$

$$k_{\tilde{j}}(x) = \left[\begin{array}{cc|cc} f(x) & & & \\ \hline & f(x) & & \\ \hline & & 1 & -x \\ & & x & 1 \\ \hline & & & f(x) \\ & & & f(x) \end{array} \right] \left. \vphantom{\begin{array}{cc|cc} f(x) & & & \\ \hline & f(x) & & \\ \hline & & 1 & -x \\ & & x & 1 \\ \hline & & & f(x) \\ & & & f(x) \end{array}} \right\} \tilde{j}-1$$

$$(1 \leq \tilde{j} \leq m-1, x \in \mathbb{R})$$

と仮定. $- \tilde{\tau} \quad t \in \mathbb{R}$ に對し.

$$\pi_{\tilde{j}}(t H_{[(\tilde{j}+1)/2]}) \nu_{\mu} = e^{+i\mu(H_{[(\tilde{j}+1)/2]})} \nu_{\mu}$$

$$(1 \leq \tilde{j} \leq m-1, \tilde{j} \equiv 1 \pmod{2})$$

より. $\cos t = f(x)^{-1} \quad \sin t = x \cdot f(x)^{-1}$ とおくと.

$$\pi_{\tilde{j}}(f(x)^{-1} k_{\tilde{j}}(x))^{-1} \nu_{\mu} = \left(\frac{1 + \sqrt{-1} x}{f(x)} \right)^{-\sqrt{-1} \mu(H_{[(\tilde{j}+1)/2]})} \nu_{\mu}$$

$$(1 \leq \tilde{j} \leq m-1, \tilde{j} \equiv 1 \pmod{2})$$

を得る. 従つて

$$B_{\tilde{j}}(P, S_{\alpha_{\tilde{j}}}, \nu)$$

$$= \text{Const} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x)^{-(\nu_{\tilde{j}}+1)} \left(\frac{1 + \sqrt{-1} x}{f(x)} \right)^{-\sqrt{-1} \mu(H_{[(\tilde{j}+1)/2]})} dx \nu_{\mu}$$

$$(1 \leq \tilde{j} \leq m-1, \tilde{j} \equiv 1 \pmod{2})$$

と仮定. lemma の主張は次の proposition から導かれる.

Proposition 4.2

$s \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N}$ に対して.

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+x^2)^{-\frac{s+1}{2}} \left(\frac{1-\sqrt{-1}x}{(1+x^2)^{1/2}} \right)^n dx$$

$$= \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{s}{2}) \Gamma(\frac{s+1}{2})}{\Gamma(\frac{s+1-n}{2}) \Gamma(\frac{s+1+n}{2})}$$

C_ℓ ($1 \leq \ell \leq [\frac{n+1}{2}] - 1$) を n 次の正交行列で.

$$\begin{matrix} 2(\ell-1) \\ 3 \end{matrix} \left\{ \begin{array}{c|c|c} \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} & & \\ \hline & & 1 \\ \hline & -1 & \\ \hline & 1 & \\ \hline & & \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} \end{array} \right\} \in K$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{2(\ell-1)} \quad \underbrace{\hspace{2em}}_3$

とすると.

$$C_\ell^2 = 1, \quad C_\ell k_{2\ell}(x) C_\ell^{-1} = k_{2\ell-1}(x)$$

$$(1 \leq \ell \leq [\frac{n+1}{2}] - 1, x \in \mathbb{R})$$

を満足す. このことより, 次の事実が導かれる.

Lemma 4.3

$$\pi_\delta(C_{\tilde{j}/2}) B_\delta(P_P, S_{\alpha_{\tilde{j}}}, \psi) \pi_\delta(C_{\tilde{j}/2}) = B_\delta(P_P, S_{\alpha_{\tilde{j}-1}}, -(C_{\tilde{j}/2} \cdot \psi))$$

$$(1 \leq \tilde{j} \leq n-1, \tilde{j} \not\equiv 0 \pmod{2})$$

但し, $C_{\tilde{j}/2} \cdot \psi \in (\mathcal{O}_P)_\mathbb{C}^*$ は, $C_{\tilde{j}/2} \cdot \psi(H) \equiv \psi(C_{\tilde{j}/2}^{-1} \cdot H C_{\tilde{j}/2}) \quad (H \in (\mathcal{O}_P)_\mathbb{C})$.

$\gamma \in \hat{K}$ に対して, $V_\sigma^\gamma \in V^\gamma$ の γ -isotypic component とする.

$$V^\gamma = \sum_{\sigma \in \hat{M}} V_\sigma^\gamma \quad (\text{direct sum}).$$

$P_\sigma: V^\gamma \longrightarrow V_\sigma^\gamma \in$ projection operator とする. Lemma 3.1 (2) より, $P_\sigma, P'_\sigma \in \mathcal{P}(A_P)$ に対応.

$$B_\sigma(P'_\sigma: P_\sigma; \psi) P_\sigma = P_\sigma B_\sigma(P'_\sigma: P_\sigma; \psi) \quad (\psi \in (\mathcal{O}_P)_\mathbb{C}^*) \quad (4.1)$$

が, 成り立つ. $\mu, \mu' \in V^\gamma$ の weight とし.

$$\mu \sim \mu' \stackrel{\text{def}}{\iff} \mu(H_\ell) = \pm \mu'(H_\ell) \quad 1 \leq \ell \leq [\frac{m}{2}]$$

で, equivalent relation $\sim$ を定義し, $[\mu] \in \mu$ の equivalence class. $\gamma \in$ equivalence class 全体の集合とする. $V^\gamma, \mu \in V^\gamma$ の μ -weight space,

$$V_\sigma^{\gamma, \mu} \equiv P_\sigma(V^\gamma, \mu), \quad V_\sigma^{\gamma, [\mu]} \equiv \sum_{\mu \sim \mu'} V_\sigma^{\gamma, \mu'}$$

とする.

Lemma 4.4

$$V_\sigma^\gamma = \sum_{[\mu] \in \gamma} V_\sigma^{\gamma, [\mu]} \quad (\text{direct sum})$$

Lemma 4.5 $\psi \in (\mathcal{O}_P)_\mathbb{C}^*, \quad \bar{j} \in \mathbb{N} \text{ s.t. } 1 \leq \bar{j} \leq m-1 \text{ に対して.}$

(1) $\bar{j} \equiv 1 \pmod{2}$ のとき

$$\begin{aligned} & \det(B_\sigma^\psi(P_\sigma, \alpha_{\bar{j}}, \psi)) \\ &= \text{Const} \cdot \prod_{[\mu] \in \gamma} \alpha(\mu_{\bar{j}}, F|\mu(H_{[(\bar{j}+1)/2]}))^{d(\sigma, \psi, \mu)} \end{aligned}$$

(2) $\bar{j} \equiv 0 \pmod{2}$ のとき.

$$\det(B_{\delta}^{\sigma}(P_p, \alpha_{\delta}, \mu)) \\ = \text{Const} \cdot \prod_{[\mu] \in \gamma_{\delta}} \alpha(\mu_{\delta}, \Gamma \mu(H_{[(\delta+1)/2]}))^{d(\gamma, C_{[(\delta+1)/2]} \cdot \sigma, \mu)}$$

但し. $d(\gamma, \sigma, \mu) \equiv \dim V_{\sigma}^{\gamma, [\mu]}$, $C_{\delta/2} \cdot \sigma \in \hat{M}_p$ ($1 \leq \delta \leq n-1$, $\delta \equiv 0 \pmod{2}$)

$$\text{で. } C_{\delta/2} \cdot \sigma(m) \equiv \sigma(C_{\delta/2}^{-1} \cdot m \cdot C_{\delta/2}) \quad (m \in M_p).$$

証明 (1) は. Lemma 4.1 及び. Lemma 4.4. (4.1) より従う. (2) は Lemma 4.3 及び. (1) より従う.

§5. $\det(B_{\delta}^{\sigma}(\bar{P}_p; P_p; \mu))$ について.

$w \in W(\alpha_p)$ をとる. $w^{-1}P_p w = \bar{P}_p$ を満足せよ. $W = w_r \cdots w_1$ を W の minimal expression と. $w_i = S_{\alpha_{\delta_i}}$ ($1 \leq i \leq r$) とする.

$$A(\bar{P}_p; P_p; \sigma; \mu) = R(w) A_p(w, \sigma, \mu)$$

が. 成り立つ.

$$A_p(w, \sigma, \mu)$$

$$= A_p(w_r, w_{r-1} \cdots w_1 \sigma, w_{r-1} \cdots w_1 \mu) \cdots A_p(w_2, w_1 \sigma, w_1 \mu) A_p(w_1, \sigma, \mu)$$

と. Lemma. 3.1 より.

$$B_{\delta}(\bar{P}_p; P_p; \mu)$$

$$= B_{\delta}(P_p, w_1, \mu) \pi_{\delta}(w_1) B_{\delta}(P_p, w_2, w_1 \mu) \pi_{\delta}(w_2) \cdots B_{\delta}(P_p, w_r, w_{r-1} \cdots w_1 \mu) \\ \cdot \pi_{\delta}(w_r) \pi_{\delta}(w). \quad (5.1)$$

が. 成り立つ.

$\bar{j} \in \mathbb{N}$ s.t. $1 \leq \bar{j} \leq m-1$, $\sigma \in \hat{M}_p$ に對し $\tilde{C}_{\bar{j}} \cdot \sigma \in \hat{M}_p$ なる様に.

与ふる.

$$\tilde{C}_{\bar{j}} \cdot \sigma = \begin{cases} C_{\bar{j}/2} \cdot \sigma & (\bar{j} \equiv 0 \pmod{2}) \\ \sigma & (\bar{j} \equiv 1 \pmod{2}) \end{cases}$$

Theorem 5.1 $\nu \in (\sigma_p)^*_c$, $\gamma \in \hat{K}$, $\sigma \in \hat{M}_p$ に対して.

$$\begin{aligned} & \det(B_{\gamma}^{\sigma}(\bar{P}_p; P_p; \nu)) \\ &= \text{Const.} \prod_{i=1}^r \prod_{[\mu] \in \gamma} \alpha(2 \cdot \langle \nu, \beta_i \rangle \cdot \langle \beta_i, \beta_i \rangle^{-1}, \Gamma \backslash \mu(H[(\bar{j}_i+1)/2]))^{d_i} \end{aligned}$$

但し, $\beta_i \in \Sigma(\sigma_p)$ ($1 \leq i \leq r$) は Lemma 2.2 で述べたもの, 定数 d_i ($1 \leq i \leq r$) は $d_i = d(\gamma, \tilde{C}_{\bar{j}} \cdot \sigma, \gamma)$ で与えられる.

証明. $\pi_{\sigma}^{\sigma}(w') \equiv \pi_{\sigma}(w')|_{V_{\sigma}^{\sigma}}$ ($w' \in W(\sigma_p)$) とする. (5.1) から.

$$\begin{aligned} & B_{\gamma}^{\sigma}(\bar{P}_p, P_p, \nu) \\ &= B_{\gamma}^{\sigma}(P_p, w_1, \nu) \pi_{\sigma}^{\sigma}(w_1) B_{\gamma}^{w_1 \sigma}(P_p, w_2, w_1 \nu) \pi_{\sigma}^{w_1 \sigma}(w_2) \cdots \\ & \quad \cdot B_{\gamma}^{w_{r-1} \cdots w_1 \sigma}(P_p, w_r, w_{r-1} \cdots w_1 \nu) \pi_{\sigma}^{w_{r-1} \cdots w_1 \sigma}(w_r) \pi_{\sigma}^{w \sigma}(w) \end{aligned}$$

従って.

$$\begin{aligned} & \det(B_{\gamma}^{\sigma}(\bar{P}_p; P_p; \nu)) \\ &= \text{Const.} \det(B_{\gamma}^{\sigma}(P_p, w_1, \nu)) \cdots \det(B_{\gamma}^{w_{r-1} \cdots w_1 \sigma}(P_p, w_r, w_{r-1} \cdots w_1 \nu)) \end{aligned}$$

Lemma 4.5 より.

$$= \text{Const} \cdot \prod_{i=1}^r \prod_{[\mu] \in \mathcal{O}} \alpha((w_{i-1} \cdots w_1 L)_{\beta_i}, \Gamma_1 \mu(H_{[(\beta_i+1)/2]}))^{d_i}$$

Lemma 2.2 より.

$$= \text{Const} \cdot \prod_{i=1}^r \prod_{[\mu] \in \mathcal{O}} \alpha(2 \cdot \langle L, \beta_i \rangle \cdot \langle \beta_i, \beta_i \rangle^{-1}, \Gamma_1 \mu(H_{[(\beta_i+1)/2]}))^{d_i}$$

よって、定理の主張が示された。

//

Remark 1). Theorem 5.1 より. Chom's Conjecture は. $G = \text{SL}(M, \mathbb{R})$, P

minimal p.s.g.p の場合. 正しいことがわかる。

2). 定数 d_i ($1 \leq i \leq r$) は. 具体的には. 今のところ. . わかっている. けれど.

$n = 3, 4$ の場合. 三浦一田中 [3] において. 求められている。

References

- [1] L. Cohn, Analytic Theory of the Harish - Chandra C-function, Springer - Verlag Lecture Notes in Math. 429 (1974)
- [2] ———, Some theorems on C-functions, Bull. Amer. Math. Soc. 80 (1974), 921 - 926.
- [3] M. Eguchi and S. Tanaka, The explicit representation of the determinant of Harish - Chandra's C-function in $SL(3, \mathbb{R})$ and $SL(4, \mathbb{R})$ cases, preprint.
- [4] Harish - Chandra, Harmonic analysis on real reductive groups I. The theory of the constant term, J. Func. Anal. 19 (1975), 104 - 204.
- [5] ———, Harmonic analysis on real reductive groups II. Wave packets in the Schwartz space, Invent. Math. 36 (1976) 1 - 55.
- [6] ———, Harmonic analysis on real reductive groups III. The Mœss-Selberg relations and the Plancherel formula, Ann. of Math. 104 (1976) 117 - 201.
- [7] S. Helgason, Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces, Academic Press, New York, 1978.

- [8] A.W. Knap, Representation Theory of Semisimple Groups : An Overview Based on Examples, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1986.
- [9] A.W. Knap and E.M. Stein, Intertwining operators for semisimple groups, Ann. of Math. 93 (1971), 489-578.
- [10] ———, Intertwining operators for semisimple groups II, Invent. Math. 60 (1980), 9-84.
- [11] N.R. Wallach, Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces, Marcel Dekker, New York, 1973.
- [12] ———, On Harish-Chandra's generalized C-functions, Amer. J. Math. 97 (1975), 385-403.
- [13] G. Warner, Harmonic Analysis on Semi-Simple Lie Groups Vol I, Springer-Verlag, New York, 1972.
- [14] ———, Harmonic Analysis on Semi-Simple Lie Groups Vol. II, Springer-Verlag, New York, 1972.
- [15] J. Sekiguchi, Harish-Chandra の C-函数について, ユニバーサル表現論セミナー報告集 I 1981