

Hermite 対称対の Lie 環の既約最高ウェイト表現 の構成について

熊本電報高専 菅 修一 (Shuichi Suga).

1. 序 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ とし $e, h, f \in \mathfrak{g}$ の標準基底とす。
 $n \in \mathbb{Z}$ 非負整数, X を不定元とし $W_n \subset X$ の $\mathbb{C}$ 係数 n 次以下の
 多項式のなる空間 $W_n = \sum_{i=0}^n \mathbb{C} X^i$ とす。 $n \neq 0$ とするとき
 対応により $\mathfrak{g}$ の最高ウェイト n の有限次元既約表現が構成
 されることはよく知られている。

$$e \mapsto X^2 \frac{d}{dX} - nX, \quad h \mapsto 2X \frac{d}{dX} - n, \quad f \mapsto -\frac{d}{dX}.$$

さて、上の構成において n を任意の複素数 λ に、表現空間
 $W_n \subset W_\lambda = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{C} X^{\lambda-i}$ に置きかえると、 $\mathfrak{g}$ の最高ウェイト
 λ の既約表現が得られる。いずれの場合においても、その
 最高ウェイトベクトルは X の複素数である。

ここでは、Hermite 対称対の Lie 環のある種の最高ウェイト
 表現について、上と同様の構成が可能であることを示す。

また、これによりある種の概均質ベクトル空間の b -関数の
 零点の表現論的な意味がひとっきり明らかになる。

2. 主結果

(G_0, k_0) は下 a) の $\mathfrak{g}$ の Hermite 対称対と可る。

1. $G_0 = SU(n, n), k_0 = S(U(n) \times U(n)).$

2. $G_0 = Sp(2n, \mathbb{R}), k_0 = U(n)$

3. $G_0 = SO^*(4n), k_0 = U(2n)$

4. $G_0 = SO(n, 2), k_0 = SO(n) \times SO(2).$

G_0, k_0 の Lie 環を $\mathfrak{g}_0, \mathfrak{k}_0$ とし、 $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$ は $\mathfrak{g}_0$ の複素化と可る。 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{p}_0$ は $\mathfrak{g}_0$ の Cartan 分解とし、 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ に対応する $\mathfrak{g}$ の Cartan 分解と可る。 $\text{ad}(\mathfrak{k})$ -作用により、 $\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^+ \oplus \mathfrak{p}^-$ と分解し、 $\mathfrak{p}^+$ (resp $\mathfrak{p}^-$) は G_0/k_0 上の (反)正則ベクトル場となる Lie 環である。

$\mathfrak{t}_0 \subset \mathfrak{k}_0$ は Cartan 部分代数と可ると、 $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_0^{\mathbb{C}}$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数である。 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}^+$ とおく。 $\mathfrak{q}$ は $\mathfrak{g}$ の maximal parabolic subalgebra である。 $G \subset GL(\mathfrak{g})$ は $\text{ad}(\mathfrak{g})$ に対応する Lie 群とし、 k, Q は各々 $\text{ad}(\mathfrak{k}), \text{ad}(\mathfrak{q})$ に対応する G の部分群と可る。 $\tilde{G}, \tilde{k}, \tilde{Q}$ は各々 G, k, Q の universal covering と可る。

λ を $\tilde{k}$ の一次元表現として固定する。 λ の $\tilde{Q}$ への自然な拡張、及び λ の微分表現として得らる $\mathfrak{k}^*, \mathfrak{t}^*$ とも同じ記号 λ を用いることと可る。 $\tilde{k}$ の一次元表現全体 α なる群は加法群の記号を用いる。

Lie環の表現は、以下のように定める。 $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{q}$ から
 決まる $\tilde{G}/\tilde{Q}$ 上の homogeneous line bundle とする。 G は $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{q}$ の
 section 全体 $\Gamma(\mathfrak{g}/\mathfrak{q})$ に左移動で作用する。 この作用は、この
 G の作用の微分として定義する。

さて、よく知られているように $\mathfrak{k}$ は adjoint 作用により、
 $(\mathfrak{k}, \mathfrak{p}^-)$ は既約正則複素ベクトル空間である。 f を $\mathfrak{p}^-$ 上の
 (唯一の) 既約相対不変式とする。 χ を f から決まる $\mathfrak{k}$ の
 一次元表現とする。 即ち

$$f(\text{Ad}(b) \cdot x) = \chi(b) f(x) \quad b \in \mathfrak{k} \quad x \in \mathfrak{p}^-$$

$\mathfrak{k}$ の中心は一次元の $\mathfrak{a}$ で、ある複素数 μ が存在して、 $\lambda = \mu\chi$
 と書ける。 N^- を $\text{ad}(\mathfrak{p}^-)$ に対応する $\tilde{G}$ の部分群とする。

$\exp: \mathfrak{p}^- \rightarrow N^-$ は微分同型を与え、 $\mathfrak{a}$ での逆写像を

$\log: N^- \rightarrow \mathfrak{p}^-$ とする。 $\tilde{G}/\tilde{Q}$ の開集合 $N^- \tilde{Q}/\tilde{Q}$ 上で決まる

$\Gamma(\mathfrak{g}/\mathfrak{q})$ の元 v^λ を

$$v^\lambda(nq) = \lambda(q) f^{-2\mu}(\log n) \quad n \in N^- \quad q \in \tilde{Q}$$

で定める。 $W(\lambda) = \cup(q) v^\lambda$ とおく。 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ とおいて次の定理が
 成立する。

定理 $W(\lambda)$ は最高ウェイト λ の既約最高ウェイトの $\mathfrak{g}$ -加群で
 その最高ウェイトベクトルは v^λ である。

注意. 例外型 $\mathfrak{a}$ Hermite 対称対

$G_0 = E_7$ の real form, $K_0 = E_6$ の real form $\times SO(2)$

1 つの $\mathfrak{g}$ にも上の定理は成立すると思われ 3 だ. 証明が今 $\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{b}$ 3 Case by Case の計算なので, 証明で 3 2 11 なる.

3. 具体例.

== では. $G_0 = SU(n, n)$ $K_0 = S(U(n) \times U(n))$ に対して.

上の表現がどのようなものであるかをみる. 定義より.

$$\mathfrak{g}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \mid {}^t \bar{A} + A = 0 \quad {}^t \bar{D} + D = 0 \quad {}^t \bar{B} = C, \operatorname{tr}(A+D)=0 \right\}.$$

$$\mathfrak{k}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}_0 \right\}.$$

とある. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2n, \mathbb{C})$. $\mathfrak{k} = \mathfrak{s}(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \times \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}))$.
である.

$$\mathfrak{p}^+ = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid B \in M_n(\mathbb{C}) \right\}.$$

$$\mathfrak{p}^- = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix} \mid C \in M_n(\mathbb{C}) \right\}$$

である. $G^* = SL(2n, \mathbb{C})$. $K^* = S(GL(n, \mathbb{C}) \times GL(n, \mathbb{C}))$

とある. Q^* は $\mathfrak{g}$ を定める

$$Q^* = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \in G^* \right\}.$$

$\tilde{G}/\tilde{Q}$ と G^*/Q^* は微分同型である。以下 G^*/Q^* で考える。

概均値ベクトル空間 (k, p^-) の既約相対不変式 f は次のように与えられる。

$$f(x) = \det C, \quad x = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \in p^-$$

$$k = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \in \tilde{K} \subset \tilde{G}. \quad f(\text{Ad } k \cdot x) = (\det A)^{-2} f(x) \text{ である。}$$

以下複素数 λ と $\tilde{K}$ 上の指標。

$$\tilde{K} \ni \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \longmapsto (\det A)^\lambda \in \mathbb{C}^\times$$

と同一視する。 $\lambda = -2$ であり、 $\mu = -\frac{1}{2}$ である。

よって v^λ は次の式で与えられる。

$$v^\lambda(mg) = \lambda(g)(\det C)^\lambda \quad m = \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ c & 1_n \end{pmatrix} \in N^- \quad g \in \tilde{Q}$$

さて、考えている対象が $\mathbb{A}^1 \times N^- \tilde{Q}$ 上の sections の空間なので、指数写像を用いてこの空間を p^- 上の関数の可空間 $\mathbb{C}(p^-)$ と同一視する。

$e_{ij} \in n \times n$ 行列の行列単位とし、

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & e_{ij} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in p^+ \quad F_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e_{ij} & 0 \end{pmatrix} \in p^-$$

と置く。また $p^- \ni \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \quad C = (x_{ij})$ とし、 $x_{ij} \in p^-$ の基底系と置く。 $\lambda = -2$ のとき $\mathfrak{g}$ の $\mathbb{C}(p^-)$ 上の作用は、次のように与えられる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{p}^- \ni F_{ij} \longmapsto -\frac{\partial}{\partial x_{ij}} \\ \mathfrak{k} \text{ の作用は. } k \in \mathfrak{k}^* \quad h \in \mathbb{C}(\mathfrak{p}^-) \text{ に対して.} \\ (k \cdot h)(x) = h(\text{Ad} k \cdot x) \text{ によって作用を定める.} \\ \mathfrak{p}^+ \ni E_{ij} \longmapsto \sum_{\alpha, \beta=1}^n x_{\alpha j} x_{i \beta} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha \beta}} - \lambda x_{ji} \end{array} \right.$$

$\mathfrak{k}$, $\mathfrak{p}^+$ の v^λ の作用を具体的に計算することはより、
 v^λ は最高ウェイト λ であることはわかり、 $W(\lambda)$ は
最高ウェイト加群である。

一方 $\mathfrak{g} = \mathfrak{p}^- \oplus \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}^+$ である。Birkhoff-Witt の
定理により

$W(\lambda) = U(\mathfrak{g}) v^\lambda = U(\mathfrak{p}^-) U(\mathfrak{k}) U(\mathfrak{p}^+) v^\lambda = U(\mathfrak{p}^-) v^\lambda$
が成立する。ここで $U(\cdot)$ は対応する Lie 環の enveloping
algebra である。 $\mathfrak{p}^-$ の基底 F_{ij} は座標の偏微分として作用する
のである。

$W(\lambda) = \{ v^\lambda = (\det C)^\lambda \text{ の "微分項式" } \}$
が成立する。

4. Verma-加群の可約性と b -関数の要点

$\mathfrak{g}$ の a -次元指標 λ と $\mathfrak{g}$ の表現空間 $\mathbb{C}_\lambda$ に対して. (一般化すれば)
Verma-加群 $V(\lambda) \in$

$$V(\lambda) = U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g}_-) \mathbb{C}_\lambda$$

で定める. $W(\lambda)$ は, $V(\lambda)$ の irreducible quotient である.
また, $\delta_0 \in \mathfrak{G}/\mathfrak{Q}$ の原点で a δ -関数とすると, v^λ の
定義式において, $f^{-2\mu}$ のかわりに $\delta_0 \in \mathfrak{g}$ 代入すれば $a \in v^{\delta_0}$ と
すると, $V(\lambda) = U(\mathfrak{g}) v^{\delta_0}$ が成立する.

また, $G = SU(n, n)$ $K_0 = S(U(n) \times U(n))$ とすると,
3 で述べた記号のもとで述べた成立する.

系 λ が正整数または, $\lambda \in \{0, -1, -2, \dots, -(n-1)\}$ ならば
Verma 加群 $V(\lambda)$ は可約である.

証明.

λ が正整数ならば $v^\lambda = (\det C)^\lambda$ は $\mathfrak{p}$ 上での多項式関数である.
よって, $U(\mathfrak{g}) v^\lambda = U(\mathfrak{p}) v^\lambda$ は有限次元である. $V(\lambda)$ は
既約ではあり得ない. $\lambda \in \{0, -1, -2, \dots, -(n-1)\}$ ならば
考える. λ は複素数とすると, 次の微分方程式が成立する.

$$\begin{aligned} \det\left(\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\right) \det(x_{ij})^\lambda &= \lambda(\lambda+1) \cdots (\lambda+n-1) \det(x_{ij})^{\lambda-1} \\ &= b(\lambda) \det(x_{ij})^{\lambda-1}. \end{aligned}$$

特に $\lambda \in \{0, -1, \dots, -(n-1)\}$ のとき $\det(\frac{\partial}{\partial x_{ij}}) \det(x_{ij})^{\lambda} = 0$ である。さて Verma-加群 $V(\lambda)$ が既約であるとき、 $V(\lambda) \simeq W(\lambda)$ であるから、この様式は成り立つ。よって $\lambda = a$ のとき $V(\lambda)$ は可約である。

上の証明の $b(\lambda)$ は、相対不変式 f の b -関数という。例外型も含めて他の tube 型の Hermite 対称対について同様の a ことが成り立つ。すなわち、 $\mathbb{K}$ の a -次元指標全体を適当に $\mathbb{C}$ で parametrize するとき、 b -関数の零点に対応する指標 λ から作られる Verma-加群 $V(\lambda)$ は可約である。さらに例外型も含めて、次の a ことが成り立つ。([1])。

Observation. λ が b -関数の零点に対応する a -次元表現とする。 $\lambda = a$ のとき $W(\lambda)$ は unitarizable な最高ウェイト加群である。

しかし、上の事実が何故成り立つかは、筆者にはわからぬ。

References

- [1] T.J.Enright, R.Howe and N.R.Wallach: A classificarion of unitary highest weight modules. P.C.Trombi ed. Representatoin Theory of Reductive Groups. Progress in Math.40, Birkhauser(1983)
- [2] K.D.Johnson: On a ring of invariant polynomials on a Hermitian symmmetric space. J. of algebra 67. 72-81 (1981)
- [3] J.C.Jantzen: Kontravatiante Formen auf induzierten Darstellungen halbeinfacher Lie-Algebren. Math. Ann. 226, 53-65 (1977)
- [4] 木村達雄:概均質ベクトル空間の理論,数学32巻2号,97-118(1980)
- [5] H.Weyl: The Classical Groups. Princeton Univ. Press. Princeton New Jersey, 1946.