

Rank 1 の対称空間の不変超函数

東下・理 落合 啓之 (Hiroyuki Ochiai')

§ 0

G/H を rank = 1 の半単純対称空間とし、対応する Lie 環の分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{f} + \mathfrak{h}$ とする。 $\mathfrak{h}$ には H が adjoint によって作用する。(以下では、 H は連結とし、 $H < GL(\mathfrak{h})$ と思う) Killing form の $\mathfrak{h}$ への制限を ω とかく。これは (定数倍を除いて) 唯一つの $\mathfrak{h}$ 上の H -不変な非退化 2 次形式である。 ω から作られる $\mathfrak{h}$ 上の 2 階の微分作用素を $\square$ と書く。

次に $\tilde{H} := \{ T \in GL(\mathfrak{h}) ; \omega(Tx) = \omega(x), \forall x \in \mathfrak{h} \}$ 。(単位元連結成分) と定義すると、 $H < \tilde{H}$ が成り立つ。 $\tilde{H}$ の Lie 環 $\tilde{\mathfrak{f}}$ についても、 $\mathfrak{f} < \tilde{\mathfrak{f}}$ が成り立つ。

例 0 $G/H = SO_0(p+1, q) / SO_0(p, q)$

$$\mathfrak{g} = \mathbb{R}^{p+q}, \quad \omega = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2$$

$$\tilde{H} = SO_0(p, q)$$

$$\text{このとき } \mathfrak{f} = \tilde{\mathfrak{f}}$$

しかし、一般には (他の場合には) $\mathfrak{f} \subsetneq \tilde{\mathfrak{f}}$ となる。

例 1 $G/H = SL(m+1, \mathbb{R}) / S(GL^+(m, \mathbb{R}) \times GL^+(1, \mathbb{R}))$, ($m \geq 2$)

$$\mathcal{O}_f = \mathbb{R}^{2m}, \quad \omega = x_1 y_1 + \cdots + x_m y_m$$

$$\tilde{H} \cong \mathfrak{so}_0(m, m)$$

$$\tilde{\mathfrak{f}} = \mathfrak{so}(m, m) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & -{}^t A \end{pmatrix} ; \begin{matrix} {}^t B = -B, {}^t C = -C \\ A, B, C \in M(m, \mathbb{R}) \end{matrix} \right\}$$

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}) \cong \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -{}^t A \end{pmatrix} ; A \in M(m, \mathbb{R}) \right\}$$

又 2. $\mathcal{O}, \mathcal{B}$ を各々 distribution, hyperfunction の成す層とし.

$$\mathcal{O}_\lambda^H(\mathcal{O}_f), \mathcal{B}_\lambda^H(\mathcal{O}_f), \mathcal{O}_\lambda^{\tilde{H}}(\mathcal{O}_f), \mathcal{B}_\lambda^{\tilde{H}}(\mathcal{O}_f) \quad \text{らを}$$

$$\mathcal{O}_\lambda^H(\mathcal{O}_f) := \left\{ f \in \mathcal{O}(\mathcal{O}_f) ; \begin{matrix} D_X f = 0 & (\forall X \in \mathfrak{f}) \\ (\square - \lambda)f = 0 \end{matrix} \right\}, \quad (\lambda \in \mathbb{C})$$

等と定義し.

$$\mathcal{O}^H(\mathcal{O}_f), \mathcal{B}^H(\mathcal{O}_f), \mathcal{O}^{\tilde{H}}(\mathcal{O}_f), \mathcal{B}^{\tilde{H}}(\mathcal{O}_f) \quad \text{らを}$$

$$\mathcal{B}^{\tilde{H}}(\mathcal{O}_f) := \left\{ f \in \mathcal{B}(\mathcal{O}_f) ; D_X f = 0 \quad (\forall X \in \tilde{\mathfrak{f}}) \right\}$$

等と定義する.

このとき, $\mathcal{O}_\lambda^H(\mathcal{O}_f) = \mathcal{O}_\lambda^{\tilde{H}}(\mathcal{O}_f)$ であることが, Cerezo と

van Dijk の結果によってわかり, さらにある rank 1 対称空間

のとき, この二つへ帰着する二つによって, $\mathcal{B}_\lambda^H(\mathcal{O}_f) = \mathcal{B}_\lambda^{\tilde{H}}(\mathcal{O}_f)$

も成立する. という結果が木幡氏によって得られている.

ここでは $\square$ の固有函数という二つを用いる.

$$\mathcal{O}^H(\mathcal{O}_f) = \mathcal{O}^{\tilde{H}}(\mathcal{O}_f), \quad \mathcal{B}^H(\mathcal{O}_f) = \mathcal{B}^{\tilde{H}}(\mathcal{O}_f)$$

が成立するか, という二つを考える.

§ 1.

$\mathcal{B}^H$, $\mathcal{B}^{\tilde{H}}$ を定義する微分方程式系を、各々、

$$\mathcal{M} = \mathcal{D} / \sum_{x \in \tilde{\mathcal{F}}} \mathcal{D} D_x$$

$$\mathcal{N} := \mathcal{D} / \sum_{x \in \tilde{\mathcal{F}}} \mathcal{D} D_x$$

と定義する。但し、 $\mathcal{D}$ は $\mathcal{O}_\sigma$ 上の微分作用素の成す環の層

、 D_x は $(D_x f)(y) = \frac{d}{dt} f(e^{tx} y) \big|_{t=0}$, $(y \in \mathcal{O}_\sigma, f \in C^\infty(\mathcal{O}_\sigma))$ で定義される微分作用素。

ここで、一般に $\mathcal{M} \twoheadrightarrow \mathcal{N}$ であるが、 $\mathcal{M} \xrightarrow{\sim} \mathcal{N}$ が成り

たれば、 $\mathcal{B}^H(\mathcal{O}_\sigma) = \mathcal{B}^{\tilde{H}}(\mathcal{O}_\sigma)$ が成り立つ。一方

定理 1 . 例 1 で $m \geq 3$ のとき $\mathcal{M} \xrightarrow{\sim} \mathcal{N}$ 」

証明の鍵は次の公式：

$$x_k D_{y_i} - x_j D_{y_k} = \begin{cases} (x_j D_{y_i} - x_i D_{y_j})(x_k D_{x_i} - y_i D_{y_k}) \\ + (x_i D_{y_k} - x_k D_{y_i})(x_j D_{x_i} - y_i D_{y_j}) \\ + (x_k D_{y_i} - x_i D_{y_k})(x_i D_{x_i} - y_i D_{y_i}) \end{cases}$$

(i, j, k は相異なる)

但し $D_{y_i} = \frac{\partial}{\partial y_i}$ 等と略記。

§ 2

定理 1 は $m=2$ のときは、本当に成り立たないので、より詳しく考えなくてはならない。 $\mathcal{O}_\sigma$ の H - ($\tilde{H}$ -) orbit を見よう。

$\mathcal{O}_{\text{reg}} := \{ Z \in \mathcal{O}_\sigma ; \text{codim}_{\mathcal{O}_\sigma} H \cdot Z = 1 \}$ とすると、

$$(\omega|_{\mathcal{O}_{\text{reg}}}) : \mathcal{O}_{\text{reg}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\omega|_{\mathcal{O}_{\sigma=0}}) : \mathcal{O}_{\sigma=0} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{は、各々、}$$

q_{reg} の H -orbit, $q-101$ の $\tilde{H}$ -orbit を parametrize する 2 点
知られている。つまり、各点で gradient $\neq 0$ で、 q_{reg} の H -orbit
は、 $(\omega|_{q_{reg}})^{-1}(t)$, $(t \in \mathbb{R})$ の形をしている。ゆえに、その上で
は B^H , $B^{\tilde{H}}$ の構造はよくわか、

$$\begin{array}{ccccc} B^{\tilde{H}}(q-101) & \hookrightarrow & B^H(q-101) & \longrightarrow & B^{\tilde{H}}(q_{reg}) \\ \parallel & & & & \parallel \\ (\omega|_{q-101})^{-1} B(q-101) & & & & (\omega|_{q_{reg}})^{-1} B(q_{reg}) \\ \parallel & & & & \parallel \\ B(\omega(q-0)) & \xlongequal{\quad} & & & B(\omega(q_{reg})) \end{array}$$

$$\therefore \forall f \in B^H(q_{reg}) \quad \exists g \in B^{\tilde{H}}(q-101) \quad \text{s.t.} \quad g|_{q_{reg}} = f.$$

一方、

定理 [Cerezo] $B^{\tilde{H}}(q) \rightarrow B^{\tilde{H}}(q-101)$ は全射

これを用いると、 $\forall g \in B^{\tilde{H}}(q-101) \quad \exists \tilde{g} \in B^H(q) \quad \text{s.t.} \quad \tilde{g}|_{q-0} = g$

$$\therefore \forall f \in B^H(q), \quad \exists g \in B^{\tilde{H}}(q) \quad \text{s.t.} \quad (f-g)|_{q_{reg}} = 0$$

$$\therefore B^H(q) = B^{\tilde{H}}(q) + B^H(q)[q-q_{reg}]$$

$$\text{但し } B^H(q)[q-q_{reg}] = \{f \in B^H(q) ; \text{supp } f \subset q-q_{reg}\}$$

以下 $B^H(q)[q-q_{reg}]$ を調べればよい。

命題 $B^H(q)[101] = B^{\tilde{H}}(q)[101]$]

加わり、こので、結局、

$$(*) \quad B^H(q-101)[q-q_{reg}-101] = 0 \quad \text{を言えればよい。}$$

・例 1 の $m=2$ の場合は、 $q-q_{reg}-101$ の各点の近傍で座標変換すると問題は次の事実に帰着できる。

$$\textcircled{Q} \quad u(t, x) \in B_{t,x}, \quad t \frac{\partial}{\partial t} u = 0, \quad \text{supp } u \subset \{t=0\} \Rightarrow u=0.$$

以上から 例1 $m=2$ のときも $\mathcal{B}^H(\mathfrak{g}) = \mathcal{B}^{\tilde{H}}(\mathfrak{g})$ が示せた。

§ 3

rank 1 の半単純対称空間の list は以下のとおり。 [VD]

	$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{f}$	
0)	$\mathfrak{so}(p+1, q)$	$\mathfrak{so}(p, q)$	
1)	$\mathfrak{sl}(m+1, \mathbb{R})$	$\mathfrak{sl}(\ell(1, \mathbb{R}) \times \ell(m, \mathbb{R}))$	$(m \geq 2)$
1')	$\mathfrak{su}(p+1, q)$	$\mathfrak{u}(\ell(1) \times \ell(p, q))$	
2)	$\mathfrak{sp}(m+1, \mathbb{R})$	$\mathfrak{sp}(1, \mathbb{R}) \times \mathfrak{sp}(m, \mathbb{R})$	$(m \geq 2)$
2')	$\mathfrak{sp}(p+1, q)$	$\mathfrak{sp}(1) \times \mathfrak{sp}(p, q)$	
3)	$\mathfrak{f}_4(4)$	$\mathfrak{so}(4, 5)$	
3')	$\mathfrak{f}_4(-20)$	$\mathfrak{so}(1, 8)$	
•	$\mathfrak{f}_4(-20)$	$\mathfrak{so}(9)$	: non compact Riemannian
•	$\mathfrak{f}_4(-52)$	$\mathfrak{so}(9)$	: compact Riemannian

1'), 2'), 3') は § 2 の方法で $\mathfrak{g}_{reg} = \mathfrak{g} - 10\mathfrak{f}$ となるので
(*) が自明に成立するようになる。

2) は § 1 の記号で $\mathcal{N} \xrightarrow{\sim} \mathcal{N}$ を示すことができる。

3) については $\mathcal{B}^H(\mathfrak{g}) = \mathcal{B}^{\tilde{H}}(\mathfrak{g})$ となるかどうかはわからない。