

Path representations of $\hat{\mathfrak{sl}}(r, \mathbb{C})$

京大数理研 尾角正人
Okado Masato

この仕事は、伊達悦朗氏(京大養), 神保道夫, 三輪哲二氏(京大数理研) および 国場敦夫氏(東大養・物理) との共同の仕事である。

1. Path

2つの整数 $r \geq 2, l \geq 1$ をまず固定する。 $\mu \in \mathbb{Z}$ に対して $[\mu]$ は $\mathbb{Z}_r$ における modulo class を表すものとする。ここでは, $[\mu]$ を free $\mathbb{Z}$ -module $\mathbb{Z}[0] \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}[r-1]$ の元と思うことにする。 S という集合を次のように定義する。

$$S = \{ [\mu_1] + \cdots + [\mu_l] \mid \mu_1, \dots, \mu_l \in \mathbb{Z} \}$$

$\Lambda = \Lambda_{r_1} + \cdots + \Lambda_{r_l}$ を affine $\mathfrak{sl}$ -環 $\hat{\mathfrak{sl}}(r, \mathbb{C})$ の dominant integral weight とする。 Λ に対して, S の元の列 η_Λ を次のように定義する。

$$\begin{aligned} \eta_\Lambda &= (\eta_\Lambda(j))_{j \geq 0} \\ \eta_\Lambda(j) &= [r_1 + j] + \cdots + [r_l + j] \end{aligned}$$

$j \gg 0$ なる j に対して $\eta(j) = \eta_\Lambda(j)$ を満たす S の元の列 $\eta = (\eta(j))_{j \geq 0}$ を Λ -path と呼ぼう。さらに, Λ -path 全体の集合を $P(\Lambda)$ と書くことにする。 $L(\Lambda)$ を, Λ を highest weight に持つ 既約左 $\hat{\mathfrak{sl}}(r, \mathbb{C})$ -module とする時, 我々の目標は $P(\Lambda)$ で label される $L(\Lambda)$ の基底を構成することである。

2. マヤ図形

m は $\mathbb{Z}$ から $\mathbb{Z}$ への bijection とする。 m は $(m(j))_{j < 0}$ と $(m(j))_{j \geq 0}$ がともに単調増加であり, $|j| \gg 0$ なる j に対して $m(j) - j = r$ を満たす時 charge r のマヤ図形であると呼ばれる。 charge r のマヤ図形全体の集合を $\mathcal{M}[r]$ と書く。 $\mathcal{F}_\mathbb{Z}[r]$ を マヤ図形 $m \in \mathcal{M}[r]$ によって生成される free $\mathbb{Z}$ -module, $(,)$ を $m, m' \in \mathcal{M}[r]$ に対して $(m, m') = \delta_{mm'}$ になるような $\mathcal{F}_\mathbb{Z}[r]$ 上の対称双線形形式とする。 $I(m) = \{m(j) \mid j < 0\}$ と置き, $X_{jk} \in \text{End}_\mathbb{Z}(\mathcal{F}_\mathbb{Z}[r])$ を次のように定義する。

$j \neq k$ のとき

$$\begin{aligned} (X_{jk}(m), m') &= (-1)^{\#\{i \in I(m) \mid j < i\} + \#\{i \in I(m) \mid k < i\}} \\ &\quad \text{if } j \notin I(m), k \in I(m), I(m') = I(m) \cup \{j\} \setminus \{k\} \\ &= 0 \quad \text{otherwise} \end{aligned}$$

$j=k$ のとき

$$\begin{aligned} X_{jj}(m) &= m & \text{if } j \in I(m) \\ &= 0 & \text{otherwise} \end{aligned}$$

このとき, $(X_{jk}(m), m') = (m, X_{kj}(m'))$ が成立する。

$$e_\mu = \sum_{j \equiv \mu \pmod r} X_{j-1 j}$$

$$f_\mu = \sum_{j \equiv \mu \pmod r} X_{j j-1}$$

と置く。 e_μ, f_μ によって生成されるリ-環は $\hat{\mathfrak{sl}}(r, \mathbb{C})$ とする。また, $\mathcal{F}[r] = \mathcal{F}_2[r] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ は左 $\hat{\mathfrak{sl}}(r, \mathbb{C})$ -module と思うこともできる。この時, $(e_\mu(m), m') = (m, f_\mu(m'))$ 。
 $\mathcal{M}[r]$ の元 v_γ を

$$v_r(j) = j + \gamma$$

で定義する。 $\mathcal{F}[r_1] \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}[r_\ell]$ の元 $v_{r_1} \otimes \cdots \otimes v_{r_\ell}$ で $\hat{\mathfrak{sl}}(r, \mathbb{C})$ 上生成される module は $L(\Lambda)$ に同型である。
 さらに, orthogonal projection π を定義しよう。

$$\pi: \mathcal{F}[r_1] \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}[r_\ell] \longrightarrow L(\Lambda)$$

3. highest lift

η を任意の Λ -path とする。 $M[r_1] \times \cdots \times M[r_\ell]$ の元 $(m_1, \dots, m_\ell)$ は $\eta(j) = [m_1(j)] + \cdots + [m_\ell(j)]$ ($j \geq 0$) である時, η の lift であると言う。 また, m, m' が 2, のマヤ図形である時

$$m \leq m' \iff m(j) \leq m'(j) \text{ for } \forall j \geq 0$$

と定義する。 $k \in \mathbb{Z}$ に対し, $m[k]$ は

$$m[k](j) = m(j) + k$$

で定義される マヤ図形を表すとする。 Λ -path η の lift $(m_1, \dots, m_\ell)$ は

$$m_1 \leq \cdots \leq m_\ell \leq m_1[r]$$

である時, admissible であると言われる。 さらに, すべての admissible な η の lift $(m'_1, \dots, m'_\ell)$ に対して

$$m'_k \leq m_k \quad (k=1, \dots, \ell)$$

となる lift のことを η の highest lift と呼ぶ。 二の時次が成り立つ。

命題 1. Λ の Λ -path は たゞ 1 つ の highest lift を 持つ.

η の highest lift を $M(\eta)$ と表そう.

4. 結果

目標としていた定理は次のものである.

定理 2. $\{\pi(M(\eta)) \mid \eta \in \mathcal{P}(\Lambda)\}$ は $L(\Lambda)$ の基底をなす.

次に $\pi(M(\eta))$ の weight を計算しよう. p という写像を次のように定義する.

$$p : \mathbb{Z}[0] + \cdots + \mathbb{Z}[r-1] \longrightarrow \widehat{sl}(r, \mathbb{C}) \text{ の weight lattice}$$

$$[j] \longmapsto \Lambda_{j+1} - \Lambda_j$$

ここで, p は $\mathbb{Z}$ -linear であり, $\Lambda_{\mu+r} = \Lambda_{\mu}$ と置く. $\alpha = [\mu_1] + \cdots + [\mu_l]$, $\beta = [\nu_1] + \cdots + [\nu_l]$ ($0 \leq \mu_j, \nu_j < r$) に対して

$$H(\alpha, \beta) = \min_{\sigma: \text{permutation}} \sum_{j=1}^l \theta(\mu_j - \nu_{\sigma(j)})$$

$$\begin{aligned} \theta(\mu) &= 1 & \mu \geq 0 \\ &= 0 & \mu < 0 \end{aligned}$$

と置く。この時,

命題3. $\pi(M(\eta))$ の weight は次の公式で与えられる。

$$\begin{aligned} \lambda(\eta) \equiv \Lambda &- \sum_{j=0}^{\infty} p(\eta(j) - \eta_{\Lambda}(j)) \\ &- \delta \sum_{j=1}^{\infty} j (H(\eta(j-1), \eta(j)) - H(\eta_{\Lambda}(j-1), \eta_{\Lambda}(j))) \end{aligned}$$

ここで, δ は null root である。

この命題により, string function の新しい表示が得られる。

References

- [1] E. Date, M. Jimbo, A. Kuniba, T. Miwa and M. Okado,
One dimensional configuration sums in vertex models
and affine Lie algebra characters, preprint RIMS Kyoto
University, to appear in Lett. Math. Phys.
- [2] " , Chemins, Diagrammes de Maya et Représen-
tations de $\hat{\mathfrak{sl}}(r, \mathbb{C})$, submitting to C.R. Acad. Sci. Paris.