

古典群の緩増加な指標の等式について

福井大学教育学部 三上俊介 (Shunsuke Mikami)

§1. 序

G を $\mathbb{R}$ 上定義された連結半単純代数群とし, $G = G(\mathbb{R})$ ($\mathbb{R}$ -rational points 全体) とする実半単純 Lie 群 G について考える。 Θ を G 上の緩増加な不変固有超関数 (IED) とし, その infinitesimal character を $\hat{\lambda}$ とする。 すなわち G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の複素化の展開環 $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ の中心を $\mathfrak{Z}$ としたとき, $\hat{\lambda} \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{Z}, \mathbb{C}^{\times})$ で $D\Theta = \hat{\lambda}(D)\Theta$ ($\forall D \in \mathfrak{Z}$) が成り立つ。 このとき, Θ は G 上の局所可積分関数で, さらに $G' (= G$ の正則元全体) 上, 実解析関数になる。 この関数も同じ Θ で表すことにする。 また, $\{T_j\}_{j=1, \dots, l}$ を G の Cartan 部分群の共役類全体の代表系とすると,

$$G' = \bigcup_{g \in G} \bigcup_{j=1}^l g T_j' g^{-1} \quad T_j' = T_j \cap G'$$

であるから, Θ は各 T_j' への制限の形で決定される。 そこで, $\{\Theta|_{T_j'}\}_{j=1, \dots, l}$ の間にどのような関係があるのかを考える。

本講では、 T_* を G の split (あるいは、maximally split) T の Cartan 部分群とすると、

$$(1.1) \quad \Theta|_{T_*} \equiv 0$$

となるための必要十分条件を $\hat{\lambda}$ が T_e -admissible になる (いくつかの) Cartan 部分群上での Weyl 群を用いた条件で表す。(§3) また、D. Shelstad の stable T 増加指標の持ち上げとの関連にも示れる。(§5)

④ が同じ infinitesimal character $\hat{\lambda}$ をもつ G の指標の一次結合になっている場合には、(1.1) は T_* 上の指標等式とみられ、それらの特徴付けを記述したことになる。また T_* 以外の Cartan 部分群上での (1.1) の型の等式についても、原理的には G の部分群に対しての T_* 上での等式の問題に還元される。

現在までのところ、 A, C, D 型の群のうち、 $Sp(n, \mathbb{R})$, $SU(p, q)$, $SO(2n, 2n)$ の場合に結果が得られているが、それを一般の G にまでは拡張できていない。

§2 準備と記号

主結果を述べるために必要な記号他を導入する。 T を G の Cartan 部分群、 $\mathfrak{t}$ をその Lie 環とする。

1. $S(\mathfrak{t}_e)$: $\mathfrak{t}_e$ の symmetric algebra

$$I(\mathfrak{t}_e) = S(\mathfrak{t}_e)^W$$

$= \{ S(t_c) \text{ の元で Weyl 群 } W=W(\mathfrak{g}_c, t_c)\text{-不変 } T \text{ の全体} \}$

$\gamma_t : \mathfrak{z} \longrightarrow I(t_c) \quad \text{Harish-Chandra 同型}$

$$\lambda_t = \hat{\lambda} \circ \gamma_t^{-1} \in \text{Hom}_{\mathfrak{alg}}(I(t_c), \mathbb{C}^\times)$$

$\exists T \in S(t_c) (= U(t_c))$ の元は T 上の微分作用素 とみえる。

そこで

$$\mathcal{B}(T, \lambda_t) = \left\{ S \in C^\infty(T); \begin{array}{l} 1) S \text{ は } \varepsilon\text{-symmetry とみえる} \\ 2) DS = \lambda_t(D)S \quad \forall D \in I(t_c) \\ 3) S \text{ は 緩増加} \end{array} \right\}$$

定義 $\hat{\lambda}$ は T に関して T_c -admissible

$$\Leftrightarrow \mathcal{B}(T, \lambda_t) \neq \{0\}$$

(註1) $\hat{\lambda}$ が regular の場合は T_c -admissible に属する G の Cartan 部分群 (の共役類) は 1 つに属するが, singular の場合には 2 つ以上ある。

(註2) $(\mathfrak{g}_c, t_c)$ のルート α に対して, $X_\alpha \in \mathfrak{g}_c$ をそのルートベクトルとしたとき $\text{Ad}(t)X_\alpha = \xi_\alpha(t)X_\alpha \quad (t \in T)$ により定まる T の character を ξ_α とする。また $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha > 0} \alpha$ に対し, G が admissible の仮定の下で, その微分が ρ に属する様で, T の character を ξ_ρ とし,

$$\Delta(t) = \Delta^*(t) = \xi_\rho(t) \prod_{\alpha > 0} (1 - \xi_\alpha(t)^{-1}) \quad (t \in T')$$

$$\varepsilon_R(t) = \varepsilon_R^T(t) = \operatorname{sgn} \prod_{\alpha > 0, \text{ real}} (1 - \xi_\alpha(t)^{-1}) \quad (t \in T')$$

とおく。 ζ が ε -symmetry を満たすとは $S/\varepsilon_R \Delta$ が $W(G, T) = N_G(T)/T$ - 不変であることである。

(註3) 緩増加な IED Θ に対して、その height とよばれる Cartan 部分群上では、 $\varepsilon_R \Delta \cdot \Theta \in \mathcal{O}(T, \lambda_T)$ であり、逆に $\mathcal{O}(T, \lambda_T)$ の元 ζ に対して height が T で、 T 上 $\varepsilon_R \Delta \cdot \Theta = \zeta$ となる緩増加 IED Θ を構成する方法が平井 [2] により与えられている。

2. Σ, Σ^+ を $(\mathfrak{g}_c, \mathfrak{t}_c)$ のルート系及びその正のルートの全体とし、更に $\Sigma_I(\mathfrak{t})$ をその imaginary ルートの全体、 $\Sigma_c(\mathfrak{t})$ を compact ルートの全体とし、 $\Sigma_c^+(\mathfrak{t}) = \Sigma_c(\mathfrak{t}) \cap \Sigma^+$ とおく。(K は G の maximal compact 部分群、 θ は Cartan involution、 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ ($\mathfrak{k} = K$ の Lie 環) を Cartan 分解とする。 $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{k}$ のとき $\alpha \in \Sigma_c(\mathfrak{t}) \Leftrightarrow X_\alpha \in \mathfrak{k}_c$ 。それ以外の θ -stable $\mathfrak{t}$ に対しては $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_\mathfrak{k} + \mathfrak{t}_\mathfrak{p}$ ($\mathfrak{t}_\mathfrak{k} = \mathfrak{t} \cap \mathfrak{k}$, $\mathfrak{t}_\mathfrak{p} = \mathfrak{t} \cap \mathfrak{p}$) とおく。そのとき、 $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}_\mathfrak{p}) = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{t}_\mathfrak{k}$, $\mathfrak{t}_\mathfrak{k}$ は $\mathfrak{m}$ の compact Cartan subalgebra で、 Σ_I は $(\mathfrak{m}_c, \mathfrak{t}_{\mathfrak{k}_c})$ のルート系とみられる。そして

$$\alpha \in \Sigma_c(\mathfrak{t}) \Leftrightarrow \alpha|_{\mathfrak{t}_\mathfrak{k}} \in \Sigma_c(\mathfrak{m}_c, \mathfrak{t}_{\mathfrak{k}_c}).)$$

$\Sigma_I(\mathfrak{t})$ のルートに関する reflections で生成される $W(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}_c)$ の部分群を $W_I(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ と書く。上に述べた様に $W_I(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) \cong W(\mathfrak{m}_c, \mathfrak{t}_{\mathfrak{k}_c})$ である。

§ 3 主定理

$\hat{\lambda}$ が T_e -admissible になる Cartan 部分群を $\{T_j\}_{j \in J}$ ($J \subset \{1, 2, \dots, l\}$) とおく。

定理 1 $G = Sp(n, \mathbb{R}), SU(p, q), SO(2n, 2n)$ とし, $\Theta \in G$ 上の緩増加な不変固有超関数とするとき, 以下は同値である。

$$1) \quad \Theta|_{T_*'} \equiv 0$$

$$2) \quad \Theta(t^w) = -\Theta(t) \quad \forall t \in T_j' \ (j \in J) \\ \forall w \in W_I(\mathfrak{g}, T_j) \setminus W(G, T_j) \dots (*) \\ \text{かつ } w(\sum_c^+(t_j)) = \sum_c^+(t_j)$$

(ただし, $\hat{\lambda}$ には註 5 のべる様に少し制限がつく。)

(註 4) $T_j = B$ が compact とする。

1) $G = Sp(n, \mathbb{R}), SU(p, p)$ の場合: 条件(*)を満たす元は唯一つ w_1 しかない。さらに $W_I(\mathfrak{g}, B)$ の最長元を w_2 とおくと, $w_1, w_2^{-1} \in W(G, B)$ となる。この場合 2) の条件は $\Theta(t^{w_2}) = -\Theta(t)$ と同じになる。

2) $G = SU(p, q)$ ($p < q$) の場合: 条件(*)を満たす元は存在しない。従ってこの場合は 2) を満たす Θ は 0 だけと考えることにする。

3) $G = SO(2n, 2n)$ の場合: 条件(*)を満たす元は2つ w_1, w_2 存在する。そして $w_1, w_2 \in W(G, B)$ となっている。この場合は $W_I(\mathfrak{g}, \mathfrak{b})$ の最長元は $W(G_0, B)$ に属してしう。

(註5) singular $\tau_0 \hat{\lambda}$ については、現在までのところ A 型の場合以外では (w, τ_0) のルート系がどうなるかに^も関連し、少し制限が^もついている。この制限は本質的でない^もと期待しているが、それを外した形ではまだ証明できていない。

§4 D 型の場合の1つの注意

D 型の場合は非連結な群 $G = SO(2n, 2n)$ を対象としている。

$$G = SO(2n, 2n) = \{g \in SL(4n, \mathbb{R}) ; {}^t g J g = J\}$$

$$J = \begin{pmatrix} 1_{2n} & \\ & -1_{2n} \end{pmatrix}$$

$$G_0 = SO_0(2n, 2n)$$

$$B \cong \overbrace{SO(2) \times \cdots \times SO(2)}^{2n} \quad (2n \text{ 個の直積})$$

$\lambda \in \mathbb{C}$ 上の regular τ_0 integral form とし、 λ に対応する G_0 の離散系列表現を π_λ , その指標を Θ_λ と書く。 $w \in W(G, B) \setminus W(G_0, B)$ (実際 $w = [(diag(1_{2n-1}, -1, 1_{2n-1}, -1)]$ 程度) に対し $w\lambda$ もまた regular integral form に τ_0 あり、 $\Theta_\lambda \neq \Theta_{w\lambda}$ であり、かつ $\Theta_{w\lambda}(g) = \Theta_\lambda(wg w^{-1})$ ($g \in G_0'$) が成り立つ。ところで G_0 の split Cartan 部分群 T_* として、

$$T_* = \left\{ \begin{pmatrix} \varepsilon_1 c h t_1 & & & \varepsilon_1 s h t_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \varepsilon_{2n} c h t_{2n} & \varepsilon_{2n} s h t_{2n} \\ \varepsilon_1 s h t_1 & & & \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \varepsilon_{2n} s h t_{2n} & \varepsilon_{2n} c h t_{2n} \end{pmatrix} : \begin{array}{l} t_j \in \mathbb{R} \\ \varepsilon_j = \pm 1 \\ \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{2n} = 1 \end{array} \right\}$$

をとり、 $\forall t \in T_*$ に対し $w t w^{-1} = t$ が成り立つ。従って

$$(4.1) \quad \tilde{\mathcal{H}}_{\lambda|T_*} \equiv \mathcal{H}_{w\lambda|T_*}$$

が成り立つ。故に regular integral なる λ に対する G_0 上の指標等式' については、 G 上のそれと (4.1) を重ねて考えればよい。

また $\text{Ind}_{G_0 \uparrow G} \pi_\lambda = \tilde{\pi}_\lambda$ が G の離散系列表現で、その指標を $\tilde{\mathcal{H}}_\lambda$ と書けば、 $\tilde{\mathcal{H}}_{\lambda|G_0} = \mathcal{H}_\lambda + \mathcal{H}_{w\lambda}$, $\tilde{\mathcal{H}}_{\lambda|G \setminus G_0} = 0$ であり、また integral regular なる λ に対する G 上の緩増加 Γ -IED はその台が G_0 上にのっていることが示される。

一方、singular なる λ の場合、 $\pi \in G$ の既約表現とし、 $\pi|_{G_0}$ もまた既約である様な表現の指標の台は $G \setminus G_0$ 上にも広がっているかもしれない。連結群の場合に用いた証明の手法がどこまで使えるかを含め、非連結な場合をどう処理するかは残された問題である。

§5. Shelstad の理論との関連

定理 2 $G = \text{Sp}(n, \mathbb{R}), \text{SU}(p, q), \text{SO}(2n, 2n)$ で、 $\hat{\lambda}$ が regular の場合、定理 1 における 1), 2) は次の 3) と同値で

ある。

2) T_x と同型の Cartan 部分群を持たない有限個の quasi-split な群 H ((T, x) -群 ある 1 は G の endoscopic 群とよばれる) が存在し。

$$(5.1) \quad \Theta = \sum_H c_H \text{Lift } \Theta_H \quad (c_H: \text{定数})$$

と表される。

定理 2 の中のいくつかの用語を説明する為に、Shelstad の理論 [3][4][5] の概略を以下にのべる。

$\underline{G}$ を R 上定義された連結 reductive 線型代数群, $\underline{T}$ を R 上定義された極大トーラス, $G = \underline{G}(R)$, $T = \underline{T}(R)$ とおく。(T は G の Cartan 部分群になる。) 1) 1

$$(5.2) \quad A(T) = \{ g \in \underline{G} : g \underline{T} g^{-1} \text{ が } R \text{ 上定義され,}$$

$$\text{Ad } g|_{\underline{T}} : \underline{T} \longrightarrow g \underline{T} g^{-1} \text{ が } R\text{-同型} \}$$

$$= \{ g \in \underline{G} : g \underline{T} g^{-1} \subset \underline{G} \}$$

と定義する。 また $\Gamma = \text{Gal}(\mathbb{C}/R) = \{1, \sigma\}$ とおく。

$$A(T) = \{ g \in \underline{G} : \sigma(g^{-1})g \in \underline{T} \}$$

であることがわかる。 従って $A(T)$ の元 g は Γ から $\underline{T}$ への 1-cocycle ($1 \mapsto 1, \sigma \mapsto \sigma(g^{-1})g$) が対応し、さらに

$$(5.3) \quad \omega(T) = G \backslash A(T) / \underline{T} \hookrightarrow H'(\Gamma, \underline{T})$$

なる injection が存在する。 そこで $x \in \text{Hom}(H'(\Gamma, \underline{T}), \mathbb{C}^\times)$

とし, (T, χ) に対し χ -orbital integral Φ_f^χ を次の様に定義する。

$$(5.4) \quad \Phi_f^\chi(t) = \sum_{\omega \in \mathcal{B}(T)} \chi(\omega) \int_{G/T} f(gt\omega g^{-1}) d\bar{g} \\ (f \in \mathcal{C}(G), t \in T \cap G').$$

ただし $\mathcal{C}(G)$ は G 上の急減少関数全体, $d\bar{g}$ は適当に正規化された G/T 上の G -不変測度である。

定義 G 上の緩増加 IED Θ が stable である

$\Leftrightarrow G$ の任意の Cartan 部分群 T に対し,

$$\Theta(gt\omega g^{-1}) = \Theta(t) \quad \forall g \in A(T) \quad \forall t \in T \cap G'$$

が成り立つ。

さて (T, χ) に対して次の性質をもつ $\mathbb{R}$ 上定義された quasi-split reductive 代数群 $\underline{H}$ が構成される。 $((T, \chi)$ -群, ある $\mathbb{R}$ は G の endoscopic 群とよばれる) $H = \underline{H}(\mathbb{R})$ とおく。

$$1) \quad \text{rank } H = \text{rank } G, \quad \dim H \leq \dim G$$

$$2) \quad \exists \underline{T}^H : \mathbb{R} \text{ 上定義された } \underline{H} \text{ の極大ト-ラス}$$

$$\text{s.t. } \exists i : \underline{T}^H \longrightarrow \underline{T} \quad (\mathbb{R}\text{-同型})$$

$$3) \quad \mathcal{D}_H(\underline{T}^H) \quad (i \text{ により } \mathcal{D}(G) \text{ の部分集合とみて) 上 } \chi \equiv 1 \text{ とする。}$$

例えば $G = \text{SU}(p, q)$ $T = B$ のとき, H としては χ の選び方により

$p+q=2m$ のとき, $SU(m, m), SU(m-r, m-r) \times SU(r, r) \times SO(2)$

$$SU(m-r-1, m-r) \times SU(r, r+1) \times SO(2)$$

$p+q=2m+1$ のとき, $SU(m, m+1), SU(m-r, m-r+1) \times SU(r, r) \times SO(2)$

$$SU(m-r, m-r) \times SU(r, r+1) \times SO(2)$$

と (局所) 同型になる。

以後 (T, π, T^H, i) の代りに (T, π, T^H, i) と書く。一般に G の極大トラス $\underline{T}$ が H の極大トラス $\underline{T}^H$ と (standard な方法で) $\mathbb{R}$ -同型のとま $T (= \underline{T}(\mathbb{R}))$ を H に originate する G の Cartan 部分群とよぶ。いま H に originate する G の Cartan 部分群 (の共役類の代表系) を $\{T_m; m=1, \dots, n\}$ とおき, 対応する H の Cartan 部分群を T_m^H , 及び $\mathbb{R}$ -同型を i_m と書く。

$$i_m: T_m^H \longrightarrow T_m \quad \mathbb{R}\text{-同型} \quad (m=1, \dots, n)$$

$\mathcal{G} = \{i_m; m=1, \dots, n\}$ とおく。

定義 $t_H \in H$ が $t \in T_m'$ に originate している ($\mathcal{G}$ に関し)

$$\Leftrightarrow \exists h \in A(T_m^H) \text{ s.t. } h i_m^{-1}(t) h^{-1} = t_H$$

(註6) 各 T_m に対し $\exists \pi_m \in \text{Hom}(H'(\Gamma, T), \{\pm 1\})$ s.t.

(T_m, π_m) から同じ H が構成される。特別、混乱を生じない

ときはすべて π と書くことにする。

定理 (Shelstad) G が半単純のとき, $\bigcup_{m=1}^n T_m'$ 上の関数 Δ_H^G で次の条件を満たすものがある。

$\forall f \in \mathcal{C}(G)$ に対し $\exists f_H \in \mathcal{C}(H)$ s.t

- 1) $\Phi_{f_H}'(t_H) = \Delta_H^G(t) \Phi_f^x(t)$
if t_H or $t \in T_m'$ is originate
- 2) $\Phi_{f_H}'(t_H) = 0$ otherwise

(注) 左辺の Φ_{f_H}' は (5.4) において H 上, $x \equiv 1$ に対して定義される orbital integral である。また f に対して f_H は唯一つに定まるわけではない。

そこで $\mathbb{H}_H$ を H 上の stable 緩増加 IED とすると, 対応

$$(5.5) \quad \mathcal{C}(G) \ni f \longmapsto \mathbb{H}_H(f_H)$$

は well-defined かつ, G 上の緩増加 IED を与える。それを $\mathbb{H}_H$ の G への持ち上げといい, $\text{Lift } \mathbb{H}_H$ と書く。

系 (Shelstad) T_m ($m=1, \dots, n$) のいずれとも共役でない G の Cartan 部分群 T に対して

$$(5.6) \quad \text{Lift } \mathbb{H}_H|_T \equiv 0$$

さらに $\mathbb{H}_H$ が stable 緩増加指標のとき, G の有限個の緩

増加既約指標 Θ_i が存在し $\text{Lift } \Theta_\mu = \sum_i \varepsilon_i \Theta_i$ ($\varepsilon_i = \pm 1$)

と表される。[5]

従って定理 1 と 2 を合わせると, T_* 上での (1.1) の型の指標等式は (5.6) の型のものによってつくられていることになる。

文 献

- 1 Hirai, T. : Invariant eigendistributions of Laplace operators on real semisimple Lie groups, II, Japan.J.Math., 2 (1976) 27-89.
- 2 Hirai, T. : Invariant eigendistributions of Laplace operators on real semisimple Lie groups, III, Japan. J.Math., 2(1976) 269-341.
- 3 Shelstad, D. : Orbital integrals and a family of groups attached to a real reductive group, Ann.Sci.Ecole Norm.Sup., 12(1979) 1-31.
- 4 Shelstad, D. : Embedding of L-groups, Canad.J.Math., 33(1981) 513-558.
- 5 Shelstad, D. : L-indistinguishability for real groups, Math.Ann. 259(1982), 385-430.
- 6 Mikami, S. : On character identities for $\text{Sp}(n, \mathbb{R})$ and the lifting of stable tempered invariant eigendistributions, Japan.J.Math., 11(1985), 361-385.
- 7 Mikami, S. : $\text{SU}(p, q)$ の指標等式について, 数理解析研究所講究録 598