

半単純リ-群の離散系列表現の 誘導表現への埋めこみ

京大理 山下 博 (Hiroshi YAMASHITA)

§0. 序. G を中心有限な連結実半単純リ-群, K を G の極大 compact 部分群とする. 階数に関する条件 $\text{rank}(G) = \text{rank}(K)$ を仮定する. この時かつこの時に限り, 群 G は二乗可積分な既約 unitary 表現の系列: 離散系列 (discrete series, 以下 DS と略記する), をもつ (Harish-Chandra [3]). これらの既約表現は群 G 上の調和解析にとって極めて基本的な役割を果たしてきた. 我々は, DS 表現が G の興味深い種々の誘導表現にどのように現れるかを問題にする.

G/K が Hermite 対称空間の場合に, K からの正則誘導によって得られる正則離散系列表現 (HDS 表現) は highest weight module の構造をもつ. 我々は [10], [11, Part II] 及び [12] においてこの特別な DS に対して上記の問題を論じ, 誘導表現における K -有限な highest weight vector を求めるという手法 (cf. [4]) により, 主系列や generalized Gelfand-Graev 表現への

HDS表現の埋めこみを記述した。

本稿では、第一に、任意のDS表現は lowest K-type をもつことに着目して、holomorphic とは限らないDSの誘導表現への埋めこみを記述するための一般的な手法を与える。即ち、DSの実現のために Schmid [8] が導入した KG 上の微分作用素 D_λ を使って、誘導表現における lowest K-type を特徴づける G 上の微分方程式を提示する。この方程式の解は、殆んどの場合、誘導表現へのDSの埋めこみと一対一に対応している(定理2.3)。

第二に、この lowest K-type の方法を使って、 G の極小放物型部分群から誘導された主系列表現へのDS表現の埋めこみにつき論ずる。主系列への埋めこみの研究としては、Szegő 積分を用いた主系列からDSへの quotient map の構成 (Knapp-Wallach [7]), 実階数1の群の場合の Collingwood の仕事 [1] などがある。しかし一般の半単純リー群に対しては、DSの埋めこみの完全な記述は未だ得られていないようである。

我々は、実階数2の単純リー群である $G = SU(2, 2)$ の場合にDS表現の主系列への埋めこみをほぼ完全に記述する(定理4.2)。すなわち、各DSに対し埋めこみが可能な主系列を全て特定し、更に殆んど全2のDS表現は特定された各主系列表現に重複度1で実際に埋めこめる、ということ

を示す. なお, 群 $SU(2,2)$ は $SO_0(4,2)$ と局所同型であり, その既約 unitary 表現は Knapp-Speh [6] により完全に分類されていることを付け加えておく.

本稿での lowest K-type の方法は, 主系列のみならず Gelfand-Graev 表現等の他の誘導表現への DS の埋めこみを記述する為にも有効な筈である. この点については, 近い将来機を改めて報告したいと思う.

§1. 半単純リー群の離散系列とその実現.

群 G の DS 表現に関する既存の結果を必要な範囲でまとめておくことから始めよう. 記述を簡単にするため, 以下 G は単連結複素半単純リー群の連結な実型であると仮定する.

1.1. DS 表現の添数づけ. G のリー環 $\mathfrak{g} \equiv \text{Lie}(G)$ の Cartan 分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$, $\mathfrak{k} \equiv \text{Lie}(K)$, とする. $\mathfrak{p}$ を $\mathfrak{k}$ に含まれる $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分環とし, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ に関する root 系を Δ で表す. ここに $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ は各々 $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$ の複素化. compact root 全体のなす集合 $\Delta_c \subseteq \Delta$ は Δ の部分 root 系をなす. Δ, Δ_c の Weyl 群を各々 W, W_c ($W \supseteq W_c$) で表す.

定理 1.1 ([3], cf. [2, Th.3]). (1) $\mathfrak{p}$ を Δ -regularかつ integral な $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ 上の線型形式全体のなす集合とする. この時,

各 $\lambda \in \Xi$ に対し次の性質 (1.1) を満す G の DS 表現 π_λ が (unitary 同値を除き) - 一意に存在する.

$$(1.1) \quad \text{tr}(\pi_\lambda)|_{T'} = (-1)^{\dim \mathfrak{p}/2} \left(\sum_{w \in W_c} \det(w) e^{w\lambda} \right) / \left(\prod_{\substack{\alpha \in \Delta \\ (\lambda, \alpha) > 0}} e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2} \right).$$

ここに $\text{tr}(\pi_\lambda)|_{T'}$ は π_λ の超函数指標 $\text{tr}(\pi_\lambda)$ の $T' \equiv \{\exp t\alpha \mid \alpha \text{ regular elements}\}$ 上への制限であり, 右辺において $\mathfrak{g}_c$ の Killing 形式から定まる $(\text{Fit})^*$ 上の内積を $(\cdot, \cdot)$ で表した.

(2) G の任意の DS 表現はある $\pi_\lambda, \lambda \in \Xi$, と unitary 同値である.

(3) $\lambda_1, \lambda_2 \in \Xi$ に対し, $\pi_{\lambda_1} \simeq \pi_{\lambda_2}$ (unitary 同値) $\Leftrightarrow \lambda_1 \in W_c \cdot \lambda_2$.

いま, Δ_c の positive system Δ_c^+ を固定し, Δ_c^+ -dominant な Ξ の元全体の集合を Ξ_c^+ とおく. 上の定理より, 対応 $\lambda \mapsto \pi_\lambda$ は Ξ_c^+ から G の DS 表現の同値類全体の集合への全単射を与えることが判る.

Ξ における各 W -軌道 $W \cdot \lambda$ は Ξ_c^+ と $|W|/|W_c|$ 個の点で交わる. これらの交点に対応する DS 表現達 $\pi_{\lambda_1}, \lambda_1 \in W \cdot \lambda \cap \Xi_c^+$, は決して互いに同値にはならないが, 同一の infinitesimal character を持つ.

1.2. Lowest K-type theorem. $\lambda \in \Xi_c^+$ に対し, $\lambda \in \Delta_c^+$ -dominant にする Δ の positive system $\Delta^+ \equiv \{\alpha \in \Delta; (\lambda, \alpha) > 0\}$ を考え, $\rho \equiv (\sum_{\alpha \in \Delta^+} \alpha)/2$, $\rho_c \equiv (\sum_{\alpha \in \Delta_c^+} \alpha)/2$, $\rho_n \equiv \rho - \rho_c$ とおく.

また, DS 表現 π_λ の K の表現としての既約分解を

$$(1.2) \quad \pi_\lambda|_K \simeq \bigoplus_{\mu} [m_\lambda(\mu)] \cdot (\tau_\mu, V_\mu)$$

とする. 但し (τ_μ, V_μ) は $\mu \in t_c^* \in \Delta_c^+$ -highest weight とする有限次元既約 K -加群, $m_\lambda(\mu)$ は τ_μ の $\pi_\lambda|_K$ における重複度を表す.

命題 1.2 (cf. [9, Th.4.5]). $\lambda = \Lambda - \rho_c + \rho_n$ とおく. この時 DS 表現 π_λ は $\tau_\lambda \in$ lowest K -type にもつ. 即ち, $\pi_\lambda|_K$ における重複度 $\{m_\lambda(\mu)\}$ は次の性質 (1), (2) を満す.

$$(1) \quad m_\lambda(\lambda) = 1,$$

(2) $m_\lambda(\mu) \neq 0$ ならば $\mu - \lambda$ は Δ^+ の元のいくつかの和に表せる: $\mu = \lambda + \sum_{\alpha \in \Delta^+} n_\alpha \alpha$, $n_\alpha \in \{0, 1, 2, \dots\}$.

λ を DS 表現 π_λ の Blattner parameter と呼ぶ.

1.3. 微分作用素 D_λ . DS 表現の実現のために Schmid が導入した $K \backslash G$ 上の微分作用素 D_λ の定義を述べる. この作用素は次節以降の我々の議論にとって重要なので, ここでは少し一般的な状況で話を始める.

Fréchet 空間 V 上への K の C^∞ -表現 τ に対し, 函数空間

$$(1.3) \quad C_c^\infty(G) \equiv \{ \varphi: G \xrightarrow{C^\infty} V; \quad \varphi(kg) = \tau(k)\varphi(g), \quad (k, g) \in K \times G \}$$

は G の元の右移動: $R_g \varphi(x) = \varphi(xg)$ ($x, g \in G$), により G -加群の構造をもつ. いま, $(X_i)_{i=1}^{2n}$ を $\mathfrak{g}$ の Killing 形式に関する $\mathfrak{p}$ の正規直交基底とする. 各 $\varphi \in C_c^\infty(G)$ に対し, G 上の $(V \otimes \mathfrak{p}_\mathbb{C})$ -値函数 $\nabla \varphi$ を

$$(1.4) \quad (\nabla \varphi)(g) = \sum_{i=1}^{2n} L_{X_i} \varphi(g) \otimes X_i, \quad L_{X_i} \varphi(g) = \left. \frac{d}{dt} \varphi(\exp -t X_i \cdot g) \right|_{t=0},$$

で定義する. この時 $\nabla \varphi$ は $C_{\tau \otimes \text{Ad}_{\mathfrak{p}_\mathbb{C}}^K}(G)$ に属し, 基底 (X_i) のとり方によらない. 但し $\text{Ad}_{\mathfrak{p}_\mathbb{C}}^K$ は K の $\mathfrak{p}_\mathbb{C}$ 上への adjoint 表現を表す.

(τ_1, V_1) と別の K -加群, $P: V \otimes \mathfrak{p}_\mathbb{C} \rightarrow V_1$ を連続な K -加群準同型写像としたとき, 線型作用素 $\mathcal{D}_{\tau, \tau_1, P}: C_c^\infty(G) \rightarrow C_c^\infty(G)$ を

$$(1.5) \quad (\mathcal{D}_{\tau, \tau_1, P} \varphi)(g) = P(\nabla \varphi)(g) \quad (\varphi \in C_c^\infty(G)),$$

により定める. 明らかに $\mathcal{D}_{\tau, \tau_1, P}$ は G の右移動 R と可換である.

Schmid の作用素 $\mathcal{D}_\lambda$ は (1.5) において (τ, τ_1, P) を次の様に定めたものである. DS 表現 π_λ の lowest K -type τ_λ と adjoint 表現 $\text{Ad}_{\mathfrak{p}_\mathbb{C}}^K$ の tensor 積は, $\tau_\lambda \otimes \text{Ad}_{\mathfrak{p}_\mathbb{C}}^K \simeq \bigoplus_{\beta \in \Delta_n} [m_\beta] \cdot \tau_{\lambda+\beta}$, $m_\beta = 0$ または 1 , なる形の既約分解をもつ. ここに Δ_n は Δ の non-compact root 全体のなす集合. $\tau_\lambda^+ \equiv \bigoplus_{\beta \in \Delta_n^+} [m_{\pm\beta}] \cdot \tau_{\lambda \pm \beta}$ (複号同順), $\Delta_n^+ \equiv \Delta_n \cap \Delta^+$, とおき, 分解 $\tau_\lambda \otimes \text{Ad}_{\mathfrak{p}_\mathbb{C}}^K \simeq \tau_\lambda^+ \oplus \tau_\lambda^-$ に沿った τ_λ^- -成分への射影作用素を P_λ とする. この時,

$D_\lambda \equiv D_{\tau_\lambda, \bar{\tau}_\lambda, P_\lambda}$ と定義する. この様に定義された G 上の 1 階の微分作用素 D_λ は楕円型である ([8, Lemma 1]).

1.4. DS 表現 π_λ の実現 ([5], [9]). 微分作用素 D_λ を用いて DS 表現 π_λ を次の様に実現することができる. いま,

$$(1.6) \quad \mathcal{H}_\lambda \equiv \{ \varphi \in C_c^\infty(G); D_\lambda \varphi = 0, \|\varphi\|^2 \equiv \int_G |\varphi(g)|_{V_\lambda}^2 dg < +\infty \}$$

とおく. 但し dg は G 上の Haar 測度, $|\cdot|_{V_\lambda}$ は V_λ 上の K -不変な内積から定まる norm を表す. D_λ の楕円性により $\mathcal{H}_\lambda$ は Hilbert 空間の構造をもち, 右移動 R により $\mathcal{H}_\lambda$ 上に G の unitary 表現が出来る.

定理 1.3. unitary 表現 $(R, \mathcal{H}_\lambda)$ は既約であり, DS 表現 π_λ を実現する.

$\mathcal{H}_\lambda^0$ を $\mathcal{H}_\lambda$ の K -有限 vector のなす $(\mathfrak{g}_c, K)$ -加群とする. Blattner parameter λ が十分に regular な時には, 方程式 $D_\lambda \varphi = 0$ の 解は必ず G 上 L^2 になる.
(右 K -有限な)

定理 1.4 [5, Th. 1]. $\lambda = \Lambda - \rho_c + \rho_n$ が条件

$$(1.7) \quad \Delta_n^+ \text{ の任意の部分集合 } Q \text{ に対し } \lambda + \rho_c - \sum_{\beta \in Q} \beta \text{ は } \Delta_c^+ \text{-dominant,}$$

を満すと仮定する. この時 右 K -有限な函数 $\varphi \in C_c^\infty(G)$ が $D_\lambda \varphi = 0$ を満すならば φ は G 上二乗可積分になる. 従って, $DS \pi_\lambda$ の Harish-Chandra 加群 $\mathcal{H}_\lambda^0$ に関して次の式が成立つ.

$$(1.8) \quad \mathcal{H}_\lambda^0 = \{ \varphi \in C_c^\infty(G); \varphi \text{ は右 } K\text{-有限, } D_\lambda \varphi = 0 \}.$$

この (1.8) 式は, 我々が次節で DS の誘導表現への埋めこみを論ずる際に極めて重要な役割を果す.

§2. 誘導表現の空間に働く作用素 $D_{\lambda, \eta}$ と離散系列の埋めこみ.

本節では, 前節とは異った, 新しい観点から作用素 D_λ をとらえる. 即ち, 我々は, G の誘導表現 $\text{Ind}_N^G(\eta)$ が与えられたとき, その π_λ^* -型, K -有限成分に働く作用素 $D_{\lambda, \eta} = D_\lambda$ を考え, その核 $\text{Ker}(D_{\lambda, \eta})$ と DS 表現 π_λ^* の $\text{Ind}_N^G(\eta)$ への埋めこみとの間の関係を明らかにする. ここで, 表現 π の反傾表現を π^* で表した.

2.1. C^∞ -誘導表現と作用素 $D_{\lambda, \eta}$. $\eta \in G$ の閉部分群 N の Fréchet 空間 $\mathcal{F}$ 上への C^∞ -表現とする. 函数空間

$$C^\infty(G; \eta) \equiv \{ \varphi: G \rightarrow \mathcal{F}; \varphi(gn) = \eta(n)^{-1} \varphi(g), (n, g) \in N \times G \},$$

は G の左移動 $L: L_g \varphi(x) = \varphi(g^{-1}x)$, により G -加群になる.

更に, 微分を通して $C^\infty(G; \eta)$ は $\mathfrak{g}_c$ -加群の構造をもつ. 表

現 $(L, C^\infty(G; \eta))$ を η から G への C^∞ -誘導表現と呼び、 $\pi(\eta) = C^\infty\text{-Ind}_N^G(\eta)$ と表す。 $\pi(\eta)$ に関する K -有限 vector 全体のなる $(\mathfrak{o}_C, K)$ -加群を $C^\infty(G; \eta)^0$ で表す。

K の有限次元表現 (τ, V) に対し、

$$C_\tau^\infty(G; \eta) \equiv \left\{ f: G \xrightarrow{C^\infty} V \otimes \mathfrak{F}; \begin{array}{l} f(kgn) = (\tau(k) \otimes \eta(n^{-1}))f(g) \\ (k, g, n) \in K \times G \times N \end{array} \right\}$$

とおく。 K -加群 $C^\infty(G; \eta)^0$ は次の如く既約分解される。

$$(2.2) \quad C^\infty(G; \eta)^0 \simeq \bigoplus_{\mu} V_{\mu}^* \otimes C_{\tau_{\mu}}^\infty(G; \eta).$$

ここに z , μ は K の有限次元既約表現の highest weight を動き、 $C_{\tau_{\mu}}^\infty(G; \eta)$ には自明な K -加群構造を入れる。この同型は、

$$\begin{aligned} C^\infty(G; \eta)^0 \ni f_{v^*} &\longleftarrow v^* \otimes f \in V_{\mu}^* \otimes C_{\tau_{\mu}}^\infty(G; \eta), \\ f_{v^*}(g) &\equiv \langle v^*, f(g) \rangle_{V_{\mu}^* \times V_{\mu}} \quad (g \in G), \end{aligned}$$

により与えられる。

いま、 $\lambda \in DS$ 表現 π_{λ} の Blattner parameter とする。 $\mathfrak{F}$ を自明な K -加群 $(\mathbb{1}_{\mathfrak{F}}^K, \mathfrak{F})$ と見なすことにより、線型作用素 $D_{\lambda}: C_{\tau_{\lambda} \otimes \mathbb{1}_{\mathfrak{F}}^K}^\infty(G) \rightarrow C_{\tau_{\lambda} \otimes \mathbb{1}_{\mathfrak{F}}^K}^\infty(G)$, が 1.3 ($\mathfrak{F} = \mathbb{C}$ の場合) と全く同様にして定義できる。 D_{λ} は G の右移動と可換なので、部分空間 $C_{\tau_{\lambda}}^\infty(G; \eta) \subseteq C_{\tau_{\lambda} \otimes \mathbb{1}_{\mathfrak{F}}^K}^\infty(G) \subseteq C_{\tau_{\lambda}}^\infty(G; \eta)$ の中へ移す。そこで我々は $D_{\lambda, \eta} = D_{\lambda}|_{C_{\tau_{\lambda}}^\infty(G; \eta)}$ とおく。

2.2. 核 $\text{Ker}(D_{\lambda,\eta})$ と DS の埋めこみ. いま, $w_0 \in \text{compact}$ Weyl 群 W_c の Δ_c^+ に関する最長元とする. 対応 $\Xi_c^+ \ni \lambda \mapsto -w_0\lambda$ は DS の parameter 空間 Ξ_c^+ 上の全単射をひきおこし, π_λ の反傾表現 π_λ^* は $\pi_{-w_0\lambda}$ と unitary 同値になる事が判る. さらに $\tau_\lambda^* \simeq \tau_{-w_0\lambda}$ は $\pi_\lambda^* \simeq \pi_{-w_0\lambda}$ の lowest K-type である.

さて, τ を π_λ^* から誘導表現 $\pi(\eta) = C^\infty\text{-Ind}_N^G(\eta)$ への $(\mathfrak{g}_c, K)$ -加群としての埋めこみとする. この時, π_λ^* の lowest K-type 成分 τ_λ^* の τ による像と同型 (2.2) を通して対応する 0 でない元 $f_{\tau_\lambda^*} \in C_{\tau_\lambda^*}^\infty(G; \eta)$ がスカラー倍を除き一意に存在する. $f_{\tau_\lambda^*}$ は, さらに次の条件 (2.3) を満す様に選ぶと一意である.

$$(2.3) \quad \pi_\lambda^* \hookrightarrow V_\lambda^* \xrightarrow{\tau} V_\lambda^* \otimes f_{\tau_\lambda^*} \subseteq V_\lambda^* \otimes C_{\tau_\lambda^*}^\infty(G; \eta) \hookrightarrow \pi(\eta),$$

$$\tau(v^*) = v^* \otimes f_{\tau_\lambda^*} \quad (v^* \in V_\lambda^*).$$

作用素 $D_{\lambda,\eta}$ の定義と $V_\lambda^* \otimes f_{\tau_\lambda^*}$ が $\pi(\eta)$ の lowest K-type であるという事を使って, 次の命題を得る.

命題 2.1. 函数 $f_{\tau_\lambda^*}$ は作用素 $D_{\lambda,\eta}$ の核に属する: $D_{\lambda,\eta} f_{\tau_\lambda^*} = 0$. 従って対応 $\tau \mapsto f_{\tau_\lambda^*}$ は 次の線型空間の埋めこみを与える.

$$(2.4) \quad \text{Hom}_{\mathfrak{g}_c-K}(\pi_\lambda^*, \pi(\eta)) \hookrightarrow \text{Ker}(D_{\lambda,\eta}) \quad (\pi_\lambda^* \simeq \pi_{-w_0\lambda}).$$

更に, λ と η に関するきわめて弱い仮定の下に 写像 (2.4)

が全単射になるということも、定理 1.4 を用いて証明することができる。

定義 2.2. Γ -群 N の連続表現 $(\eta, \mathfrak{F})$ が弱巡回的であるとは、次の条件を満たす $\mathfrak{F}$ 上の連続線型汎函数 T が存在するときという： $T(\eta(n)w) = 0 \ (\forall n \in N)$ を満たす元 $w \in \mathfrak{F}$ は $w = 0$ のみである。

定理 2.3. G の DS 表現 π_λ の Blattner parameter $\lambda = \lambda - \rho_c + \rho_n$ は条件 (1.7) を満たし、かつ部分群 $N \subseteq G$ の C^∞ -表現 $(\eta, \mathfrak{F})$ は弱巡回的であると仮定する。この時、(2.3) により定まる対応 $\psi \mapsto f_\psi$ は線型空間の同型 $\text{Hom}_{G \times K}(\pi_{w_0\lambda}, \pi(\eta)) \simeq \text{Ker}(\mathcal{D}_{\lambda, \eta})$ を与える。ここに w_0 は Weyl 群 W_c の最長元。

かくして、 G の DS の誘導表現 $\pi(\eta) = C^\infty\text{-Ind}_N^G(\eta)$ への埋めこみを記述する事は、微分方程式 $\mathcal{D}_{\lambda, \eta} f = 0$ の解く問題に大部分の場合帰着された。

§3. $SU(2, 2)$ の離散系列と主系列.

以下 $G = SU(2, 2)$ とする。我々は G の DS の主系列への埋めこみを、§2 で与えた手法を使ってほぼ完全に記述する。

結果を正確に述べるために、^{(2.27)は} $SU(2,2)$ の群構造及び表現に関する記号を用意する。

3.1. 離散系列の parameter. 群 G を次の如く実現する。

$$G = SU(2,2) = \{g \in SL(4, \mathbb{C}); {}^t \bar{g} I_{2,2} g = I_{2,2}\}, \quad I_{2,2} \equiv \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{bmatrix}.$$

G の Cartan 対合を $g \mapsto {}^t \bar{g}^{-1}$ で定め、対応する $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ の Cartan 分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ とする。このとき $\mathfrak{g}$ の極大 compact ^(部分) 群は $K = S(U(2) \times U(2))$ である。compact Cartan 部分環 $\mathfrak{t} = \{\sqrt{-1} \text{diag}(h_1, h_2, h_3, h_4); h_i \in \mathbb{R}, \sum h_i = 0\} \subseteq \mathfrak{k}$ とする。root 系 $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}_c, \mathfrak{t}_c)$, $\Delta_c = \Delta(\mathfrak{k}_c, \mathfrak{t}_c)$ は各々 A_3 型, $A_1 \times A_1$ 型で、

$$\Delta = \{\beta_{ij}; 1 \leq i, j \leq 4, i \neq j\} \supset \Delta_c = \{\pm \beta_{12}, \pm \beta_{34}\},$$

$$\beta_{ij}(\text{diag}(h_1, h_2, h_3, h_4)) \equiv h_i - h_j,$$

により与えられる。 Δ_c の positive system を $\Delta_c^+ = \{\beta_{12}, \beta_{34}\}$ で定める。 Δ, Δ_c の Weyl 群は各々 $W = \mathfrak{S}_4$, $W_c = \mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_2$ ($\mathfrak{S}_n$ は n 次対称群) ゆえ、 Δ_c^+ を含む Δ の positive system は丁度 $|\mathfrak{S}_4|/|\mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_2| = 6$ 個ある。それらは次の Δ_j^+ ($1 \leq j \leq \text{VI}$) である。

$$\Delta_I^+ \equiv \{\beta_{ij}; i < j\}, \quad \Delta_{II}^+ \equiv s_{23} \Delta_I^+, \quad \Delta_{III}^+ \equiv s_{24} \Delta_{II}^+,$$

$$\Delta_{IV}^+ \equiv s_{13} \Delta_{III}^+, \quad \Delta_V^+ \equiv s_{24} \Delta_{IV}^+, \quad \Delta_{VI}^+ \equiv s_{14} \Delta_V^+.$$

そこで $s_{ij} \equiv (i \text{ と } j \text{ の互換}) \in \mathfrak{S}_4 = W$. 従って、 G の DS の

parameter 空間 Ξ_c^+ (cf. 1.1) は6つの部分に分れる: $\Xi_c^+ = \coprod_{1 \leq j \leq 6} \Xi_j^+$, $\Xi_j^+ \equiv \{\lambda \in \Xi_c^+; \lambda \text{ は } \Delta_j^+ \text{-dominant}\}$.

$\lambda \in \Xi_c^+$ に対して, DS 表現 π_λ の Blattner parameter $\lambda = \lambda - \rho_c + \rho_n$ を次の如く座標表示する: $\lambda = [r, s; u]$. ここに,

$$(3.1) \quad r \equiv \lambda \left(\begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & 0 & 0 \end{bmatrix} \right), \quad s \equiv \lambda \left(\begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & 1 & -1 \end{bmatrix} \right), \quad u \equiv \lambda \left(\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & -1 & -1 \end{bmatrix} \right).$$

λ は Δ_c^+ -dominant かつ integral ゆえ, r, s 及び u は常に次の条件を満たす整数である.

$$(3.2) \quad r, s \geq 0, \quad r+s+u \in 2\mathbb{Z}.$$

λ がどの Ξ_j^+ に属するかに応じて, r, s, u にさらに条件が加わる. 例えば,

$$\lambda \in \Xi_{\text{III}}^+ \iff (4.2) \quad \& \quad r-s-2 > u > -(r-s-2).$$

3.2. 主系列表現. $H_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $H_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ とおくと,

$\alpha_p \equiv \mathbb{R}H_1 \oplus \mathbb{R}H_2$ は $\mathfrak{g}$ の極大可換部分空間をなす. $\mathfrak{g}$ の α_p に関する root 系 Ψ は,

$$\Psi = \{ \pm \frac{1}{2}(\psi_2 \pm \psi_1), \pm \psi_1, \pm \psi_2 \}, \quad \psi_i(H_j) \equiv 2\delta_{ij},$$

で与えられる. Ψ の positive system $\Psi^+ \equiv \{ \frac{1}{2}(\psi_2 \pm \psi_1), \psi_1, \psi_2 \}$ に対応して定まる $\mathfrak{g}$ の極大巾零部分 Lie 環を $\mathfrak{u}_m$ で表す.

この時 $\mathfrak{g}$ 及び G は各々次の岩沢分解をもつ: $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a}_p \oplus \mathfrak{n}_m$,
 $G = K A_p N_m$, ここに $A_p \equiv \exp \mathfrak{a}_p$, $N_m \equiv \exp \mathfrak{n}_m$. $M \in K$ に
 おける A_p の正規化群とする. 群 M は次の構造をもち, 直積
 群 $\mathbb{T} \times \{\pm 1\}$ ($\mathbb{T}$ は 1 次元 torus) と同型になる.

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} e^{i\varphi} & & \\ & e^{-i\varphi} & \\ & & e^{-i\varphi} & \\ & & & e^{i\varphi} \end{bmatrix}; \varphi \in \mathbb{R} \right\} \times \left\{ I, \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{bmatrix} \right\} \simeq \mathbb{T} \times \{\pm 1\}.$$

複素化 $(\mathfrak{a}_p)_\mathbb{C} = \mathfrak{a}_p \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C}$ の双対空間 $(\mathfrak{a}_p)_\mathbb{C}^*$ と $\mathbb{C}^2$ と対応 $(\mathfrak{a}_p)_\mathbb{C}^*$
 $\ni \psi \mapsto (\psi(H_1), \psi(H_2)) \in \mathbb{C}^2$ により同一視する. また, (n, k)
 $\in \mathbb{Z} \times \{\pm 1\}$ に対して M の unitary 指標 $\sigma = \sigma(n, k)$ を

$$\sigma \left(\begin{bmatrix} e^{i\varphi} & & \\ & e^{-i\varphi} & \\ & & e^{-i\varphi} & \\ & & & e^{i\varphi} \end{bmatrix} \right) = e^{in\varphi}, \quad \sigma \left(\begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{bmatrix} \right) = k,$$

により定めると, 対応 $(n, k) \mapsto \sigma$ は $\mathbb{Z} \times \{\pm 1\}$ から可換群
 M の unitary 双対 $\hat{M}$ への全単射を与える事が判る.

さて, $(\sigma, \psi) \in \hat{M} \times (\mathfrak{a}_p)_\mathbb{C}^*$ に対して, G の極小放物型部分群
 $P_m \equiv M A_p N_m$ からの G への C^∞ -誘導表現を

$$\pi[\sigma, \psi] \equiv C^\infty\text{-Ind}_{P_m}^G (\sigma \otimes e^{\psi + \delta} \otimes 1_{N_m})$$

により定義する. ここに $\delta \equiv \frac{1}{2} \sum_{\nu \in \mathfrak{I}^+} m_\nu \cdot \nu = (1, 3) \in \mathfrak{a}_p^*$,
 $m_\nu \equiv \text{root } \nu \text{ の重複度}$. 表現 $\pi[\sigma, \psi]$ は (C^∞) に誘導された
 G の主系列表現と呼ばれる. 群 K 上の L^2 -norm を考える事
 により, $\pi[\sigma, \psi]$ を Hilbert 空間上への G の連続表現 $\pi[\sigma, \psi]$

に拡張することが出来る. $\psi \in \sqrt{-1}\sigma_p^*$ の時には, 拡張された表現 $\pi[\sigma, \psi]$ は unitary である.

$W(\Psi)$ を C_2 型の root 系 Ψ の Weyl 群とする. $W(\Psi)$ は半直積群 $\mathbb{C}_2 \ltimes \{\pm 1\}^2$ と同型であり, 主系列の parameter 空間 $\hat{M} \simeq \mathbb{Z} \times \{\pm 1\}$ 及び $(\alpha_p)_\mathbb{C}^* \simeq \mathbb{C}^2$ に次の如く作用する.

$$\delta \cdot (n, k) = (-n, (-1)^n k), \quad \varepsilon \cdot (n, k) = (n, k), \quad (n, k) \in \mathbb{Z} \times \{\pm 1\},$$

$$\delta \cdot (v_1, v_2) = (v_2, v_1), \quad \varepsilon \cdot (v_1, v_2) = (\varepsilon_1 v_1, \varepsilon_2 v_2), \quad (v_1, v_2) \in \mathbb{C}^2.$$

ここに $\delta = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_2$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \{\pm 1\}^2$.

主系列表現 $\pi[\sigma, \psi]$ は常に有限の長さの Jordan-Hölder 列をもち, その既約成分達は, parameter $[\sigma, \psi]$ を Weyl 群 $W(\Psi)$ の元の変換で移しても変わらないことが知られている.

§4. $SU(2, 2)$ の離散系列の主系列への埋めこみ.

4.1. 微分方程式 $D_{\lambda, 1_{N_m}} f = 0$ の解空間. 我々は $\eta = 1_{N_m}$ (N_m の 1 次元 trivial 表現), の場合に 2.2 で与えた微分方程式 $D_{\lambda, \eta} f = 0$ を具体的に解く事が出来る. その結果として次の定理を得る.

定理 4.1. (1) 解空間 $\mathcal{S}_\lambda \equiv \{f \in C_{\tau_\lambda}^\infty(G; 1_{N_m}); D_{\lambda, 1_{N_m}} f = 0\}$ の次元は $DS \pi_\lambda$ の parameter $\Lambda = \lambda + \rho_n - \rho_c \in \Xi_c^+$ がどの Weyl

chamber に属するかに応じて次の如く与えられる.

$$\dim \Delta_\lambda = \begin{cases} 1 & \Lambda \in \Xi_I^+ \cup \Xi_{VI}^+, \\ 3 & \Lambda \in \Xi_{III}^+ \cup \Xi_{IV}^+, \\ 7 & \Lambda \in \Xi_{II}^+ \cup \Xi_V^+. \end{cases}$$

(2) Δ_λ は, 右移動 R により MA_p -加群と見なしたとき, 1次元表現の直和に分解され, 各既約成分の重複度は 1 である.

(3) (2) の既約分解を具体的に書き下すことができる.

この定理により, 主系列表現に対応する微分方程式 $\Delta_{\lambda,\eta} f = 0$, $\eta = \sigma \otimes e^{\psi+d} \otimes 1_{N_m}$ ($\sigma \in \hat{M}$, $\psi \in (\alpha_p)_\mathbb{C}^*$), が完全に解けた事になる.

4.2. 主結果. 命題 2.1 と定理 2.3 及び 4.1 をあわせて, $G = SU(2,2)$ の DS 表現の主系列への埋めこみをほぼ完全に記述することができる. 次の定理が本報告の主結果である.

定理 4.2. (1) π_Λ , $\Lambda \in \Xi_\mathbb{C}^+$, を $G = SU(2,2)$ の DS 表現とする. π_Λ が部分表現として現われ得る G の主系列 $\pi[\sigma, \psi]$ の parameter $[\sigma, \psi] \in \hat{M} \times (\alpha_p)_\mathbb{C}^*$ は表 4.3 に挙げるものに限る. 更に, 埋めこみの重複度は常に 1 以下である: $\dim \text{Hom}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}-K}(\pi_\Lambda, \pi[\sigma, \psi]) \leq 1$.

(2) 逆に, 次の 2 つの場合 (a), (b) を除き, DS π_Λ は表 4.3 に挙げる各 parameter に対応する主系列表現に, 重複度 1 で実際に埋めこめる.

$$(a) \Lambda \in \Xi_{\text{II}}^+ \text{ かつ } \Lambda \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right) = 1, \quad (b) \Lambda \in \Xi_{\text{IV}}^+ \text{ かつ } \Lambda \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = 1.$$

表 4.3. $DS \pi_\Lambda$ の埋めこまれ得る主系列 $\pi[\sigma, \psi]$ の parameter $[\sigma, \psi]$.

$\Lambda \in \Xi_{\text{I}}^+$ の時	$[(-r+s, (-1)^{b_0}), (\ell_0-1, -\ell_3-3)].$
$\Lambda \in \Xi_{\text{II}}^+$ の時	$[\sigma_{\text{II}}^1, \psi_{\text{II}}^1] \equiv [(r+s, (-1)^{\ell_1}), (\ell_1-1, \ell_2-1)]; \quad \Delta \cdot [\sigma_{\text{II}}^1, \psi_{\text{II}}^1];$ $[\sigma_{\text{II}}^2, \psi_{\text{II}}^2] \equiv [(u-2, (-1)^{s+1}), (s, r)]; \quad \Delta \cdot [\sigma_{\text{II}}^2, \psi_{\text{II}}^2];$ $[\sigma_{\text{II}}^3, \psi_{\text{II}}^3] \equiv [(-r+s, (-1)^{\ell_0}), (\ell_0-1, \ell_3+1)]; \quad \Delta \cdot [\sigma_{\text{II}}^3, \psi_{\text{II}}^3];$ $\varepsilon_{(1)} \Delta \cdot [\sigma_{\text{II}}^3, \psi_{\text{II}}^3].$
$\Lambda \in \Xi_{\text{III}}^+$ の時	$[\sigma_{\text{III}}, \psi_{\text{III}}] \equiv [(r+s, (-1)^{\ell_1}), (-\ell_1-1, \ell_2-1)]; \quad \Delta \cdot [\sigma_{\text{III}}, \psi_{\text{III}}];$ $[(u, (-1)^s), (-s-1, r-1)].$
$\Lambda \in \Xi_{\text{IV}}^+$ の時	$[\sigma_{\text{IV}}, \psi_{\text{IV}}] \equiv [(r+s, (-1)^{\ell_1}), (\ell_1-1, -\ell_2-1)]; \quad \Delta \cdot [\sigma_{\text{IV}}, \psi_{\text{IV}}];$ $[(-u, (-1)^r), (-r-1, s-1)].$
$\Lambda \in \Xi_{\text{V}}^+$ の時	$[\sigma_{\text{V}}^1, \psi_{\text{V}}^1] \equiv [(-r-s, (-1)^{\ell_2}), (-\ell_2-1, -\ell_1-1)]; \quad \Delta \cdot [\sigma_{\text{V}}^1, \psi_{\text{V}}^1];$ $[\sigma_{\text{V}}^2, \psi_{\text{V}}^2] \equiv [(u+2, (-1)^{s+1}), (s, r)]; \quad \Delta \cdot [\sigma_{\text{V}}^2, \psi_{\text{V}}^2];$ $[\sigma_{\text{V}}^3, \psi_{\text{V}}^3] \equiv [(r-s, (-1)^{\ell_3}), (\ell_3-1, \ell_0+1)]; \quad \Delta \cdot [\sigma_{\text{V}}^3, \psi_{\text{V}}^3];$ $\varepsilon_{(1)} \Delta \cdot [\sigma_{\text{V}}^3, \psi_{\text{V}}^3].$
$\Lambda \in \Xi_{\text{VI}}^+$ の時	$[(r-s, (-1)^{\ell_2}), (\ell_3-1, -\ell_0-3)].$

但し, $\lambda = \Lambda - \rho_c + \rho_n = [r, s; u]$ (cf. (3.1)),

$$\ell_0 \equiv (r+s+u)/2, \quad \ell_1 \equiv (-r+s+u)/2, \quad \ell_2 \equiv (r-s+u)/2, \quad \ell_3 \equiv (r+s-u)/2,$$

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in G_2 \subseteq W(\Psi), \quad \varepsilon_{(1)} = (-1, 1) \in \{\pm 1\}^2 \subseteq W(\Psi).$$

(注) 同一の枠内に記した parameter はすべて互いに相異なる。

References

- [1] D.H.Collingwood, Embeddings of Harish-Chandra modules, n -homology and the composition series problem: the case of real rank one, Trans. Amer. Math. Soc., 285 (1984), 565-579.
- [2] M.Duflo, Représentations de carré intégrable des groupes semi-simples réels, Séminaire Bourbaki, 30e année, 1977/78, n°508, pp.1-19.
- [3] Harish-Chandra, Discrete series for semisimple Lie groups I; II, Acta Math., 113 (1965), 241-318; 116 (1966), 1-111.
- [4] M.Hashizume, Whittaker models for representations with highest weights, Lec. in Math., Kyoto Univ. No.14, *Lectures on Harmonic Analysis on Lie Groups and Related Topics* (ed. by T.Hirai and G.Schiffman), Kinokuniya, Tokyo, 1982, pp.51-73.
- [5] R.Hotta and R.Parthasarathy, Multiplicity formulae for discrete series, Invent. Math., 26 (1974), 133-178.
- [6] A.W.Knapp and B.Speh, Irreducible unitary representations of $SU(2,2)$, J. Funct. Anal., 45 (1982), 41-73.
- [7] A.W.Knapp and N.R.Wallach, Szegő kernels associated with discrete series, Invent. Math., 34 (1976), 163-200.
- [8] W.Schmid, On the realization of the discrete series of a semisimple Lie group, Rice Univ. Studies, 56 (1970), 99-108.
- [9] N.R.Wallach, On the Enright-Varadarajan modules: a construction of the discrete series, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., 9 (1976), 81-102.
- [10] H.Yamashita, Whittaker models for highest weight representations of semisimple Lie groups and embeddings into the principal series, Proc. Japan Acad., 63A (1987), 194-197.
- [11] H.Yamashita, Multiplicity one theorems for generalized Gelfand-Graev representations of semisimple Lie groups and Whittaker models for the discrete series, to appear.
- [12] H.Yamashita, Highest weight vectors for the principal series of semisimple Lie groups and embeddings of highest weight modules, to appear.