

ラブラシアン¹の整数巾が生成する一径数半群について

山形大 理 中里 博 (Hiroshi Nakazato)

§1 設定 から結論

種々の Riemann 多様体 M 上の熱方程式¹

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} f(t: x) = \Delta f(t: x) \\ \lim_{t \rightarrow 0} f(t: x) = \varphi(x) \end{cases} \quad \begin{pmatrix} t > 0 \\ x \in M \end{pmatrix}$$

がよく議論の対象とされる。ただし

$\Delta = \text{div} \cdot \text{grad}$: Laplace-Beltrami 作用素

$0 \leq t < \infty$: 時間 φ : 初期関数

これを一般化した、次のような「放物型」方程式¹

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} f(t: x) = -(-\Delta)^n f(t: x) \\ \lim_{t \rightarrow 0} f(t: x) = \varphi(x) \end{cases} \quad [n = 1, 2, 3, \dots]$$

を $\varphi(\cdot), f(t, \cdot) \in C_0(M)$ or $L^p(M)$ [$1 \leq p < \infty$]

なる枠組で考える。特に, $C_0(M), L^1(M)$ に

おいて主に(2)を考える。[以下の考察は, $L^2(M)$

に対しては, Hilbert 空間の自己共役作用素の

calculus に帰着される]。ここでは、等質な Riemann 空間 G/K (G : 連結 Lie 群, K は G のコンパクト部分群) のみを扱い、主として、次のことを問題にする。

1°) 基本解 $\{f^*(t, \cdot)\}_{t>0}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} f^*(t; x) = -(-\Delta)^n f^*(t; x) \\ \lim_{t \downarrow 0} f^*(t, \cdot) = \delta_0 \end{cases}$$

δ_0 G/K の原点に
おける Dirac 測度

が $L^1(G)$ [$L^1(K \backslash G/K)$] において存在するか?

2°) $\sup_{0 < t \leq 1} \|f_t^*\|_{L^1(G)} < +\infty$?

3°) K を含む 相対コンパクトな任意の開集合 U に対して、 $\int_{G \setminus U} |f_t^*(x)| dx \rightarrow 0$ $t \downarrow 0$?

1°), 2°), 3°) が、次のような場合には肯定的となり、その結果として、次の定理が成り立つ

定理 1. G を中心有限, 連結な非コンパクト型半単純実 Lie 群, K をその極大コンパクト部分群とする。対称 Riemann 空間 G/K において Laplace-Beltrami 作用素 Δ の整数 n 中 $-(-\Delta)^n$ ($n=1, 2, 3, \dots$) を考える。

このとき, 次の I), II) のいずれかが成り立
てば, $-(-\Delta)^n$ は, $C_0(G/K)$.

$L^p(G/K)$ $[1 \leq p < \infty]$ における
強連続一径数半群の(前)生成作用素
となる.

I) G が複素半単純 Lie 群である

II) G の実階数が 1 である //

また, 中零 Lie 群における類似定理が考えられる

定義 (cf. [5]) $\mathfrak{g}$ を中零実 Lie 環とする. 次の条件
が成り立つとき, $\mathfrak{g}$ は階層化されているという
(stratified)

① $\mathfrak{g}$ は s の線形部分空間 V_k ($k=1, 2, \dots, m$)
の直和として表わされ: $\mathfrak{g} = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_m$
 $[V_i, V_j] \subseteq V_{i+j}$ ($i+j \leq m$) $[V_i, V_j] = \{0\}$ ($i+j > m$)
が成り立つ

② V_1 は, $\mathfrak{g}$ を生成する, 即ち条件①の下で
 $\mathfrak{g} = V_1 \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ //

$\mathfrak{g}$ が階層化された中零 Lie 環のとき,
 V_1 の基底 $X_1, X_2, \dots, X_r$ を取り, $\mathfrak{g}$ の普遍包絡環
 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ の元 Δ と, $\Delta = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_r^2$ により定め
 Δ を, 連結, 単連結な中零 Lie 群 $G = \exp(\mathfrak{g})$ 上の
左不変な微分作用素とみなし, sub-Laplacian と呼ぶ.

定理 2. $\mathfrak{g}$ を階層化された中零 Lie 環
 $\subset \mathfrak{g}$, Δ を中零 Lie 群 $G = \exp(\mathfrak{g})$ 上の
 sub-Laplacian とするときは, 次の整数中
 $-(-\Delta)^n \quad [n=1, 2, 3, \dots]$ は, $C_0(G)$,
 $L^p(G) \quad (1 \leq p < \infty)$ における強連続
 一径数半群の (前) 生成作用素となる //

§ 2. 定理 1, 2 からの帰結 および註

系. Δ を, 定理 1 における Laplacian または
 定理 2 における sub-Laplacian とする. このとき,
 $\exp\{t\Delta\}(f) = f * f_t \quad (f \in L^1(G/K))$
 なる写像 (半群) $t \in (0, \infty) \longrightarrow f_t (\in L^1(G))$
 は, 複素平面の右半平面 $\{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) > 0\}$
 に解析的に拡張され, t として任意の

$f \in L^1(G/K), 0 < p < \frac{\pi}{2}$ に対し

$$\sup_{\substack{|\text{Arg } z| \leq p \\ |z|=t}} \|f * f_z - f\|_{L^1(G)} \rightarrow 0 \quad \text{as } t \downarrow 0 //$$

註 1. 一般の中心有限な非コンパクト型の実半単純
 Lie 群 G に対し, 1°) は, Trombi-Varadarajan [17]
 より, また, G : コンパクト群, $K=1$ のときは, 杉浦
 [15] より, 2°) は, それぞれ肯定的に解決
 される.

註2. $L^1(G)$ の元より成る convolution に関する一径数半群 $\{f_t\}_{t>0}$ で, $t \in (0, \infty) \longrightarrow f_t \in L^1(G)$ がノルム連続かつ $\sup_{0 < t \leq 1} \|f_t\|_{L^1(G)} = +\infty$

となる例が, 次のようにして与えられる:

$$G = \mathbb{T}^1 \quad f_t(e^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-t a_n} e^{i n \theta}$$

$$\text{ただし } a_n = \begin{cases} |n| & \text{for } |n| \neq 2^k \\ n^2 & \text{for } |n| = 2^k \end{cases} \quad (k=1, 2, 3, \dots) \quad [\text{cf. 広川 [10] p.115-122}]$$

註3. $G = \mathbb{R}$ とするときは, フーリエ変換の中
 $-(-\Delta)^n = (-1)^{n+1} \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \quad [n=1, 2, 3, \dots]$

に対応する方程式の基本解 $\{f_t\}_{t>0}$ は

$$f_t(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} e^{-t\alpha^{2n}} d\alpha$$

で与えられる. f_t は実数値偶関数となるが.

$n \geq 2$ のときは, $f_t \geq 0$ にはならない.

註4. 熱方程式に対応する解析的半群

$\{\exp(t\Delta)\}_{t \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(t) > 0}$ は, 虚軸 $\{t \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(t) = 0\}$ 上では, $L^1(G)$ -ノルムで, 強連続とはならない:

$G = \mathbb{T}^1$ のとき, $t = i 2\pi \frac{1}{m}$, m : 素数, $m \geq 3$

とすれば, $\widehat{\mu}_t(n) = e^{it n^2} \quad (n \in \mathbb{Z})$ となる

$\mathbb{T}^1$ 上の有界 Radon 測度 μ_t に対し,

$$\|\mu_t\| = \sqrt{m} \quad \text{となる} \quad (\text{cf. Vinogradov [19] ch. 5. Ex. 11})$$

註5. Banach 空間 X における強連続一径数半群 $\{T_t\}_{t \geq 0}$, $A = s\text{-}\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \{T_t - I\}$ に対し

$(\exp\{-t(-A)^\alpha\})_{t \geq 0} \quad (0 < \alpha < 1)$ が定義

される. これは, 次のような Laplace 変換に関する

結果に基づいて：

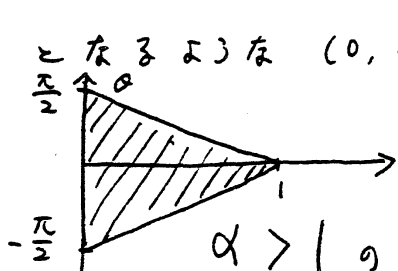
$$\int_{(0, \infty)} e^{-\lambda s} d\mu_{\alpha, t}(s) = e^{-t\lambda^\alpha} \quad (\lambda > 0)$$

なる $(0, \infty)$ 上の有界 Radon 測度 $\mu_{\alpha, t}$ が存在する (実際 $\mu_{\alpha, t}$ は Lebesgue 測度に関して絶対連続, $\|\mu_{\alpha, t}\| = 1$, $\mu_{\alpha, t} \geq 0$). 一方,

$$\int_{(0, \infty)} e^{-\lambda s} d\nu_\alpha^\theta(s) = e^{-e^{i\theta}\lambda^\alpha} \quad (\lambda > 0)$$

$$[\alpha > 0, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}]$$

となるような $(0, \infty)$ 上の有界 Radon 測度 ν_α^θ は, $0 < \alpha < 1$, $|\theta| < \frac{\pi}{2}(1-\alpha)$ のときは存在するが, $\alpha > 1$ のとき, または $0 < \alpha \leq 1$, $|\theta| > \frac{\pi}{2}(1-\alpha)$ のときは存在しない.



註 6. (cf. Dyer [3]. Goodman [8]. Dixmier [2])

$\mathfrak{g}$: $\mathbb{R}$ 上の中零実 Lie 環で, 上記の「定義」の条件 ① を満たさないものが存在する. 実際, $\mathfrak{g}$ を, $\{X_1, X_2, \dots, X_7\}$ を基底とする 7 次元中零 Lie 環で, $[X_i, X_j]$ ($i < j$) が次のもの以外 0 となるものとして定める:

$$[X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_3] = X_4, [X_1, X_4] = X_5, [X_1, X_5] = X_6$$

$$[X_1, X_6] = X_7, [X_2, X_3] = X_6, [X_2, X_4] = X_7, [X_2, X_5] = -X_7$$

$$[X_3, X_4] = X_7$$

このとき $\mathfrak{g}$ の任意の自己同型は unipotent となる. また Dixmier [2] page 323 の $\mathfrak{g}_{5,6}$, $\mathfrak{g}_{5,3}$ は, 条件 ① を満たすが, 条件 ② を満たさような, 分解をもたない.

§3. 定理2の証明の概要

定理2 が 取り扱って いる もの の 特別の
場合 として, $G = \mathbb{R}^m$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_m^2}$

の場合 がある. この場合, $-(-\Delta)^n$ に

対応する 方程式' の 基本解 $\{f_t\}_{t>0}$ は,

$$(*) \quad f_t(x_1, x_2, \dots, x_m) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathbb{R}^m} e^{i\langle x, \xi \rangle} e^{-t(\xi_1^2 + \dots + \xi_m^2)} d\xi_1 \dots d\xi_m$$

($t>0$) で 与えられ, f_t は,

$$(**) \quad f_t(x_1, \dots, x_m) = t^{-\frac{m}{2n}} f_1(t^{-\frac{1}{2n}} x_1, \dots, t^{-\frac{1}{2n}} x_m)$$

なる 性質 を 満たし, このことより $\|f_t\|_{L^1} = \|f_1\|_{L^1}$

が わかる. 一般の 階層 構造 の 中零 Lie 環

$\mathfrak{g} = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_m$ に対しては $\mathfrak{g}$ の 一様数自己
同型群 $\{\tilde{\alpha}_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ は, $\tilde{\alpha}_t(X) = e^{kt} X$ for $X \in V_k$

により 定め, さらに $G = \exp(\mathfrak{g})$ の 自己同型群

$$\{\alpha_t\}_{t \in \mathbb{R}} \text{ は, } \alpha_t(\exp X) = \exp(\tilde{\alpha}_t(X)) \quad (X \in \mathfrak{g})$$

で 定める. ここで, $\nu = \dim V_1 + 2 \dim V_2 + \dots + m \dim V_m$

とするとき, $-(-\Delta)^n$ に 対応する 方程式' の 基本

解 $\{f_t\}_{t>0}$ は,

$$(***) \quad f_t(g) = t^{-\frac{\nu}{2n}} f_1(\alpha_{\frac{-1}{2t}} \log t(g))$$

($g \in G$) を 満たし, これより $\|f_t\|_{L^1} = \|f_1\|_{L^1} (\leq \infty)$

が わかる. ここで さらに, $\|f_1\|_{L^1} < +\infty$ となる

ことが. Hulanicki [11] Prop. 5.7 より 次のように

してわかる. Δ に対応する方程式の基本解を $\{\varphi_t\}_{t>0}$ とするとき, f_2 は $\{\varphi_t\}_{t>0}$ より生成される $L^1(G)$ の閉部分環 A に含まれ,

$$\mathcal{F}(f_2) = \exp \left[- \left\{ -\log \mathcal{F}(\varphi_1) \right\}^n \right]$$

となる. ただし $\mathcal{F}: A \rightarrow C_0(X): \text{Gel'fand 変換}$

$$\text{といて, } (-\infty, \infty) \text{ において } \phi(t) = e^{-[-\log t]^n}$$

for $t > 0$, $\phi(t) = 0$ for $t \leq 0$ と定義

される関数は, C^∞ -関数である.

§4. 定理 1 の証明の概要

$G = KAN$ を中心有限な非コンパクト型実半単純 Lie 群 G の岩沢分解,

$\mathfrak{g} = \mathfrak{t} + \mathfrak{a} + \mathfrak{n}$ を対応する Lie 環 $\mathfrak{g}$ の分解, $\rho(X) = \frac{1}{2} \text{Tr}(\text{ad}_{\mathfrak{n}}(X))$ ($X \in \mathfrak{a}$)

とする. このとき, $-(-\Delta)^n$ に対応する方程式の基本解 $\{f_t\}_{t>0} \subset L^1(K \backslash G/K)$ の球 Fourier 変換が,

$$\hat{f}_t(\lambda) = e^{-t(|\lambda|^2 + |\rho|^2)^n} = \prod_{k=0}^n e^{-t \binom{n}{k} |\rho|^{2(n-k)} |\lambda|^{2k}} \\ (\lambda \in \mathfrak{a}^*)$$

で与えられる. ゆえに, $L^1(K \backslash G/K)$ に属する関数の一径数半群,

$$\{f_t^{(1)}\}_{t>0}, \{f_t^{(2)}\}_{t>0}, \dots, \{f_t^{(n)}\}_{t>0} \text{ を}$$

$$\widehat{f}_t^{[k]}(\lambda) = e^{-t|\lambda|^{2k}} \quad (\lambda \in \mathcal{O}^*)$$

により定めれば,

$$f_t = e^{-t|\lambda|^{2n}} f_t^{[n]} * f_{|\lambda|^{2(n-1)}t}^{[n-1]} * \cdots * f_{|\lambda|^{2(n-1)}t}^{[1]} \quad (t>0)$$

となるから, $2^\circ) \sup_{0 < t \leq 1} \|f_t\|_{L^1(G)} < +\infty$

$3^\circ) K$ を含む任意の相対コンパクトな開集合

$$U \text{ に対し } \int_{G \setminus U} |f_t(x)| dx \rightarrow 0 \quad \text{as } t \downarrow 0$$

を示すには, 各 $f_t^{[k]} \quad (k=1, \dots, n)$ に対し

同様のことを示せばよい. ゆえに, 以下

$$\widehat{f}_t(\lambda) \equiv e^{-t|\lambda|^{2n}} \quad (\lambda \in \mathcal{O}^*, t>0)$$

で定められる, $L^1(K \setminus G/K)$ に属する関数の半群

$\{f_t\}_{t>0}$ により調べる.

$$(Af)(x) = e^{\rho(x)} \int_N f(e^x n) dn \quad (x \in \mathfrak{a})$$

により, G 上の両側 K -不変な急減少関数

f の Abel 変換 Af を定めるとき,

$$\widehat{f}(\lambda) = \int_{\mathcal{O}} e^{i\langle \lambda, x \rangle} Af(x) dx \quad \text{となる}$$

$$\text{から, } (Af_t)(x) = \int_{\mathcal{O}^*} e^{-i\langle \lambda, x \rangle} e^{-t|\lambda|^{2n}} d\lambda$$

$(x \in \mathfrak{a}, t>0)$ が得られる. ここで,

F. Rouvière [14] に従い, Abel 変換

A の反転 A^{-1} を具体的な作用素

として表示する.

公式 I. ([14]. Th. 6)

G を複素半単純 Lie 群とする.

ある定数 $C \neq 0$ が存在して, G 上の
両側 K -不変な急減少関数 f に対し.

$$\begin{aligned} & f(e^X) \cdot \prod_{\lambda \in \Phi^+} \sinh^2 \lambda(X) \\ &= C \prod_{\lambda \in \Phi^+} [\partial_\lambda (Af)(X)] \sinh \lambda(X) \end{aligned}$$

($X \in \mathcal{O}$) となる. ただし, Φ^+ は, 正の restricted root の集合, ∂_λ は $\mathcal{O}$ 上の X_λ 方向の偏微分,
 $X_\lambda \in \mathcal{O}$ は, $\langle X_\lambda, X \rangle = \lambda(X)$ ($X \in \mathcal{O}$) なる元 //

ここに, $l = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{O}$, $m = |\Phi^+|$ に含まれる元の数
とすれば, 先ほどの $\{f_t\}_{t>0} \subset L^1(K \backslash G/K)$ には

対し, $0 < t < 1$ とき,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{O}} |f_t(e^X)| \prod_{\lambda \in \Phi^+} \sinh^2 \lambda(X) dX \\ &= |C| \cdot t^{-\frac{l}{2n}} t^{-\frac{m}{2n}} \int_{\mathcal{O}} \left| \left(\prod_{\lambda \in \Phi^+} \partial_\lambda \right) (Af_t)(t^{-\frac{1}{2n}} X) \right| \\ & \quad \cdot \left| \prod_{\lambda \in \Phi^+} \sinh \lambda(X) \right| dX \\ &= |C| t^{-\frac{m}{2n}} \int_{\mathcal{O}} \left| \left(\prod_{\lambda \in \Phi^+} \partial_\lambda \right) (Af_t)(Y) \right| \left| \prod_{\lambda \in \Phi^+} \sinh \lambda(t^{-\frac{1}{2n}} Y) \right| dY \\ &\leq |C| \int_{\mathcal{O}} \left| \left(\prod_{\lambda \in \Phi^+} \partial_\lambda \right) (Af_t)(Y) \right| \left| \prod_{\lambda \in \Phi^+} \sinh \lambda(Y) \right| dY < \infty \end{aligned}$$

となり 2°) が示された. 3°) も, 同様に示される.

次に, 実階数 1 の非コンパクト型半単純 Lie 群の場合を考える. この場合, 正の restricted root の集合 Φ^+ は, $\Phi^+ = \{\alpha\}$ ($G = SO(1:n)$ の場合) または $\Phi^+ = \{\alpha, 2\alpha\}$ ($G = SU(1:n)$, $G = Sp(1:n)$, $G = F_4(-20)$ の場合) となる.

$H \in \mathfrak{a}$ を, $\alpha(H) = 1$ とするよう取り.

$a_t = \exp(tH)$, $(A f)(sH) \equiv F_f[ch s]$
 $(t \in \mathbb{R}, s \geq 0)$ と置く. このとき,

[14) Th. 1 の Abel 変換の反転公式] を.

微分作用素の分数中を用いず, 通常の integro-differential operator で表示すれば
 以下のようになる.

公式 II. [cf. [14) : Helgason [9] p. 487-488]
 以下 C は 0 でない定数.

II₁: $G = SO(1:2m+1)$. ($m=1, 2, 3, \dots$) の場合

$$f(a_s) = C \left. \frac{d^m}{ds^m} \right|_{s=ch s} F_f[s] \quad (s > 0)$$

II₂: $G = SO(1:2m)$. ($m=1, 2, 3, \dots$) の場合

$$f(a_s) = C \int_s^\infty \left\{ \left. \frac{d^m}{dt^m} \right|_{t=cht} F_f[t] \right\} \frac{sh t}{\sqrt{cht - ch s}} dt \quad (s > 0)$$

$$\text{II}_3 : G = SU(1:n) \quad (n \geq 2) \text{ の場合}$$

$$f(a_s) = c \int_s^\infty \left\{ \frac{2^n}{2\xi^n} \right\}_{\xi=cht} F_j[\xi] \left\{ \frac{\text{sh } t}{\sqrt{ch^2 t - ch^2 s}} \right\} dt \quad (s > 0)$$

$$\text{II}_4 : G = Sp(1:n) \quad (n \geq 4) \text{ の場合}$$

$$f(a_s) = c \int_s^\infty \left\{ \frac{2^{2n}}{2\xi^{2n}} \right\}_{\xi=cht} F_j[\xi] \left\{ \frac{\text{sh } t}{ch t} \frac{1}{\sqrt{ch^2 t - ch^2 s}} \right\} dt$$

$$- c \int_s^\infty \left\{ \frac{2^{2n-1}}{2\xi^{2n-1}} \right\}_{\xi=cht} F_j[\xi] \left\{ \frac{\text{sh } t}{ch^2 t} \frac{1}{\sqrt{ch^2 t - ch^2 s}} \right\} dt$$

$$\text{II}_5 : G = F_4(-20) \quad \text{の場合} \quad \begin{matrix} (s > 0) \\ \text{(cf. R. Takahashi)} \\ [16] \end{matrix}$$

$$f(a_s) = c \int_s^\infty \left\{ \frac{2^8}{2\xi^8} \right\}_{\xi=cht} F_j[\xi] \left\{ \frac{\text{sh } t}{ch^3 t} \frac{1}{\sqrt{ch^2 t - ch^2 s}} \right\} dt$$

$$- 6c \int_s^\infty \left\{ \frac{2^7}{2\xi^7} \right\}_{\xi=cht} F_j[\xi] \left\{ \frac{\text{sh } t}{ch^4 t} \frac{1}{\sqrt{ch^2 t - ch^2 s}} \right\} dt$$

$$+ 15c \int_s^\infty \left\{ \frac{2^6}{2\xi^6} \right\}_{\xi=cht} F_j[\xi] \left\{ \frac{\text{sh } t}{ch^5 t} \frac{1}{\sqrt{ch^2 t - ch^2 s}} \right\} dt$$

$$- 15c \int_s^\infty \left\{ \frac{2^5}{2\xi^5} \right\}_{\xi=cht} F_j[\xi] \left\{ \frac{\text{sh } t}{ch^6 t} \frac{1}{\sqrt{ch^2 t - ch^2 s}} \right\} dt$$

(s > 0) //

この公式を用いて、実数域 1 の場合には
 対する定理 1 の証明を行うことが
 できる

参考文献

- [1] G. da Prato : "Weak solutions for linear differential equations in Banach spaces"
Advances in Mathematics 5 (1970) pp 181-245
- [2] J. Dixmier : " Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents " Canad. J. Math. 10 (1958) 321-348
- [3] J. L. Dyer " A nilpotent Lie algebra with nilpotent automorphism group " Bulletin of A.M.S. 76 (1970) 52-56
- [4] G. B. Folland " Subelliptic estimates and function spaces on nilpotent Lie groups " Ark. Math. 13 (1975) 161-207
- [5] G. B. Folland, E. M. Stein "Hardy spaces on homogeneous groups" Princeton Univ Press. 1982
- [6] I. M. Gel'fand, G. E. Shilov "Generalized Functions" Vol. 3. Academic Press. 1967
- [7] D. Geller : " Fourier analysis on the Heisenberg group. I. Schwartz space " Journ. Funct. Anal. 36 (1980) 205-259
- [8] R. W. Goodman "Nilpotent Lie groups" Springer L N M 562 (1976)
- [9] S. Helgason "Group and geometric analysis" Academic Press 1984
- [10] 広川 晃 "フーリエ解析" 森北出版
H. Hirokawa

- [11] A. Hulanicki "Subalgebra of $L'(G)$ associated with laplacians on a Lie group" *Colloquium Math.* 31 (1974) 259-287
- [12] C. Meaney "The inverse Abel transform for $SU(p, q)$ " *Ark. Math.* 24 (1986) 131-140
- [13] N. Okazawa [岡沢登] "A generation theorem for semigroups of growth order d " *Tôhoku M. J.* 26 (1974) 37-51
- [14] F. Rouvière "Sur la transformation d'Abel des groupes de Lie semisimples de rang un" *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* ser. IV. 10 (1983) 263-290
- [15] M. Sugiura [杉浦光夫] "Fourier series of smooth functions on compact Lie groups" *Osaka J. M.* 8 (1971) 33-47
- [16] R. Takahashi [高橋礼司] "Quelques resultats sur l'analyse harmonique dans l'espace symétrique non compact de rang 1 du type exceptionnel" in *Springer LNM* 739 (1979)
- [17] P. C. Trombi, V. S. Varadarajan "Spherical transform on semisimple Lie groups" *Ann of Math.* 94 (1971) 296-303
- [18] 浦川 肇 "非コンパクト型 実素空間上の laplacian の要素について" *教理研講義録* 249 (1975)
- [19] I. M. Vinogradov "Elements of Number Theory" Dover, 1954.